TP MAM5 Dicrétisation Volume Fini des EDPs : équation de Buckley Leverett

l'équation de Buckley Leverett décrit l'injection de gaz (ici le CO2) en $x = 0$ dans un aquifère saturé en eau unidimensionnal $\Omega = (0, L)$. L'inconnue $s(x, t)$ est la fraction volumique de gaz dans le réservoir et $1 - s(x, t)$ est la fraction volumique d'eau.

$$\begin{cases} \partial_t s(x,t) + \partial_x f(s(x,t)) = 0, \; x \in \Omega, \; t \in (0, t_f), \\ s(0,t) = 1, \; t \in (0, t_f), \\ s(x,0) = 0, \; x \in \Omega, \end{cases}$$

avec la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ suivante

$$f(s) = V_T \frac{s^2}{s^2 + \frac{(1-s)^2}{\mu}},$$

pour une vitesse d'injection $V_T > 0$ donnée et μ le rapport de la viscosité de l'eau sur la viscosité du gaz. On considère une discrétisation uniforme de l'intervalle Ω avec $N + 1$ points $x_{i+1/2} = ih$, $i = 0, \cdots, N$ avec $h = L/N$. Avec les notations du cours, la discrétisation volume fini de l'intervalle Ω est définie par l'ensemble des N mailles $\kappa_i = (x_{i-1/2}, x_{i+1/2})$ avec $i = 1, \cdots, N$. Notez que $h_i = |x_{i+1/2} - x_{i-1/2}| = h$ pour $i = 1, \cdots, N$.

On discrétise l'intervalle de temps $[0, t_f]$ de la façon suivante : on pose $t^0 = 0$, on se donne le pas de temps initial $dt0$ tel que $tf > dt0 > 0$ et le pas de temps courant est pris égal à

$$\Delta t^n = t_n - t_{n-1} = \min(dt0, t_f - t_{n-1}), \quad k \geq 1.$$

(1) Ecrire la discrétisation Volume Fini de l'équation de Buckley Leverett avec le schéma de Godunov pour le flux numérique et un schéma d'Euler explite ou implicite pour l'intégration en temps. On introduira la fonction de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^N$ suivante :

$$F(S) = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} f(1) - f(S_1) \\ f(S_1) - f(S_2) \\ \vdots \\ f(S_{N-1}) - f(S_N) \end{pmatrix}$$

(2) Calculez le pas de temps de CFL 1 du schéma d'Euler explicite. En déduire une valeur de $dt0$ pour le schéma explicite.

(3) Programmez la fonction $F(S)$.

(4) Programmer la boucle en temps calculant les solutions successives $S^n \in \mathbb{R}^N$ aux temps $t^n, n \geq 1$ connaissant S^0.

(5) On choisit le jeu de données : $L = 1000$, $t_f = 3600 \times 24 \times 360 \times 10$ (en secondes soit 10 ans), $\mu = 10$, $VT = 10^{-6}$. Etudiez le comportement numérique (stabilité, convergence, nombre de pas de temps, temps calcul) du schéma explicite pour différentes valeurs de $N = 10, 100, 400$. Vérifiez l'instabilité du schéma pour les CFL plus grandes que 1.

(6) Programmez la fonction différentielle $dF(S)$.

(7) Programmez sous forme de fonction l'algorithme de Newton ci-dessous pour résoudre l'équation $G(y) = 0$ avec

$$G(y) = y - x - \Delta t F(y),$$

pour $x \in \mathbb{R}^N$ donné. Le Newton sera initialisé avec $y = x$. Le critère d'arrêt ϵ sur la norme du résidu relatif est fixé à 10^{-6}, et le nombre d'itérations maximum est fixé à 100. Le paramètre de relaxation $dsobj$ est fixé à $dsobj = 0.1$.

— *Initialisation*

$y = x$
$r = G(y)$; $nr = nr^{(0)} = \|r\|_2$;
$k = 0$.

— *Tant Que* $\frac{nr}{nr^{(0)}} > \epsilon$ *et* $k \leq 100$ *Faire*

$dy = -\big[dG(y)\big]^{-1} r$
$\alpha = \min(1,\, dsobj/\|dy\|_\infty)$
$y = y + \alpha dy$
$r = G(y)$
$nr = \|r\|_2$
$k = k + 1$

— *End Tant Que*

(8) Programmez le schéma implicite dans la boucle en temps à l'aide de la fonction précédente.

(9) Comparez le comportement numérique des schémas explicite et implicite en terme de précision et de stabilité.