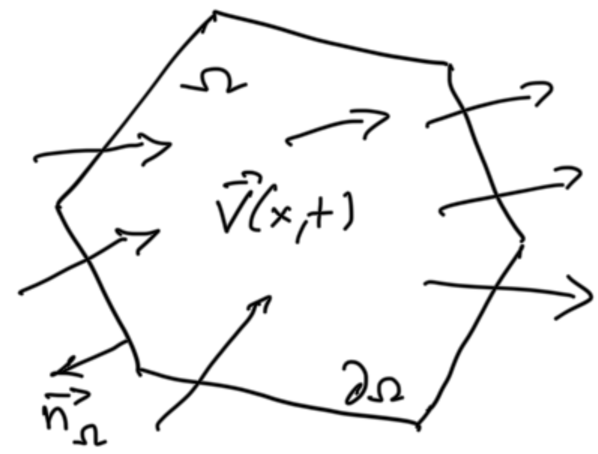
Discrétisation VF des équations hyperboliques scalaires en dimension $d = 1, 2, 3$



$$\boxed{\operatorname{div}(\vec{V}(x,t)) = 0}$$

$\vec{V} : \Omega \to \mathbb{R}^d$

$\vec{V} \in C^1(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^d)$

Equation hyperbolique scalaire

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) + \operatorname{Div}\left(f(u(x,t))\, \vec{V}(x,t)\right) = 0 & \text{sur } \Omega \times (0,T) \\ u(x,0) = u^0(x) & x \in \Omega \\ u(x,t) = u^D(x,t) & (x,t) \in \Sigma^-(T) \subset \partial\Omega \times (0,T) \end{cases}$$

$$\Sigma^-(T) = \left\{ (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T) \text{ tq } f'(u(x,t))\, \vec{V}(x,t) \cdot \vec{n}_\Omega(x) < 0 \right\}$$

Prop : soient $u^0 \in L^\infty(\Omega)$, $u^D \in L^\infty(\partial\Omega \times (0,T))$, $\vec{V} \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^d)$ et $f \in C^1(\mathbb{R})$ (ou Lipschitz)
alors il existe une solution faible entropique unique $u \in L^\infty(\Omega \times (0,T))$. De plus elle vérifie le principe du maximum :

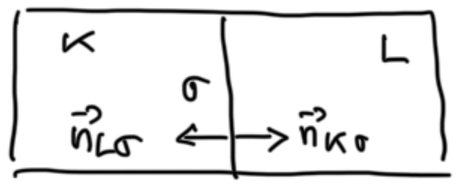
$$\min\left(\min_{y\in\Omega} u^0(y), \min_{(y,s)\in \Sigma^-(t)} u^D(y,s) \right) \leq u(x,t) \leq \max\left(\max_{y\in\Omega} u^0(y), \max_{(y,s)\in\Sigma^-(t)} u^D(y,s) \right)$$

$$I_0 = \left[\min\left(\min_{y\in\Omega} u^0(y), \min_{(y,s)\in\partial\Omega\times(0,T)} u^D(y,s)\right), \max\left(\max_{y\in\Omega} u^0(y), \max_{(y,s)\in\partial\Omega\times(0,T)} u^D(y,s)\right)\right]$$

Rq : en dimension 1 on avait $\vec{V} = \vec{e}_x$.

$$\partial_t u(x,t) + \partial_x f(u(x,t)) = 0$$

Discrétisation : maille $K \in \mathcal{M}_h$



$\sigma = K|L \in \mathcal{F}_h^{int}$

$\vec{n}_{K\sigma} + \vec{n}_{L\sigma} = 0$

$\sigma = K|. \in \mathcal{F}_h^{ext}$

$$V_h = \{ v_h \in L^\infty(\Omega) \text{ tq } u_h(x) = u_K \quad \forall x \in K, \forall K \in \mathcal{M}_h \}$$

$$t^* = \begin{cases} t^n & \text{si Euler implicite} \\ t^{n-1} & \text{si Euler explicite} \end{cases} \qquad \Delta t^n = t^n - t^{n-1}$$

$$u_K^* = \begin{cases} u_K^n & \text{si Euler implicite} \\ u_K^{n-1} & \text{si — explicite} \end{cases}$$

$$u_\sigma^* = \frac{1}{|\sigma|} \int_\sigma u^D(x, t^*)\, d\sigma$$

$$V_{K\sigma}^n = \frac{1}{\Delta t^n} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \int_\sigma \vec{V}(x,t) \cdot \vec{n}_{K\sigma}\, d\sigma(x)\, dt$$

$$V_{L\sigma}^n = \frac{1}{\Delta t^n} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \int_\sigma \vec{V}(x,t) \cdot \vec{n}_{L\sigma}\, d\sigma(x)\, dt$$

$\forall \sigma = K|L \qquad V_{K\sigma}^n + V_{L\sigma}^n = 0$

Discrétisation VF de l'équation :

$$\frac{1}{\Delta t^n} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \int_K \partial_t u(x,t)\, dx\, dt + \frac{1}{\Delta t^n} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \int_K \operatorname{Div}\left(f(u(x,t))\, \vec{V}(x,t) \right) dx\, dt = 0$$

$$\underbrace{\int_K \frac{u(x,t^n) - u(x,t^{n-1})}{\Delta t^n}\, dx}_{} + \sum_{\sigma \in \mathcal{F}_K} \underbrace{\boxed{\frac{1}{\Delta t^n} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \int_\sigma f(u(x,t))\, \vec{V}(x,t) \cdot \vec{n}_{K\sigma}\, d\sigma\, dt}}_{\text{flux exact}} = 0$$

Discrétisé par

$$|K| \frac{(u_K^n - u_K^{n-1})}{\Delta t^n}$$

$F_{K\sigma}^n(u)$

Discrétisé par un flux numérique noté $F_{K\sigma}^n(u_h^*)$

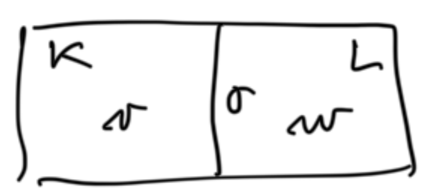
$\Rightarrow$ Equation dans la maille K et sur l'intervalle de temps (t^{n-1}, t^n) :

$$\left\{ |K| \frac{u_K^n - u_K^{n-1}}{\Delta t^n} + \sum_{\sigma \in \mathcal{F}_K} F_{K\sigma}^n(u_h^*) = 0 \quad \forall K \in \mathcal{M}_h, \ \forall n = 1, \dots, m \right.$$

<u>Discrétisation du flux</u> : flux monotone deux points

$$F_{K\sigma}^n(u_h) = \begin{cases} F_{K\sigma}^n(u_K, u_L) & \forall \sigma = K|L \in \mathcal{F}_h^{int} \\ F_{K\sigma}^n(u_K, u_\sigma) & \forall \sigma = K|. \in \mathcal{F}_h^{ext} \end{cases}$$

<u>propriétés</u> : <u>Conservativité</u> $F_{K\sigma}^n(v, w) + F_{L\sigma}^n(w, v) = 0$



$\forall \sigma = K|L \quad \forall (v, w) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

<u>Consistance</u> : on impose que le flux numérique est exact sur les "u constants"

$$F_{K\sigma}^n(v, v) = f(v) \cdot V_{K\sigma}^n \quad \forall K \in \mathcal{M}_h, \ \forall \sigma \in \mathcal{F}_K, \ \forall v \in \mathbb{R}$$

<u>Monotonie</u> : $F_{K\sigma}^n(v, w)$ est croissant par rapport à v, décroissant par rapport à w.

<u>Schéma VF</u> :

$$\left\{ \begin{array}{ll} |K| \dfrac{u_K^n - u_K^{n-1}}{\Delta t} + \displaystyle\sum_{\substack{\sigma = K|L \\ \sigma \in \mathcal{F}_K \cap \mathcal{F}_h^{int}}} F_{K\sigma}^n(u_K^*, u_L^*) + \displaystyle\sum_{\substack{\sigma = K|. \\ \in \mathcal{F}_K \cap \mathcal{F}_h^{ext}}} F_{K\sigma}^n(u_K^*, u_\sigma^*) = 0 & \\ u_K^0 = \dfrac{1}{|K|} \displaystyle\int_K u^0(x)\, dx & \forall K \in \mathcal{M}_h, \ \forall n = 1, \dots, m \end{array} \right.$$

Rappel du cas $d=1$:

$$\partial_t u(x,t) + \partial_x f(u(x,t)) = 0$$

le flux exact $\overline{F}_{i+\frac{1}{2}}(u) = f(u(x_{i+\frac{1}{2}}))$

le flux numérique : $F_{i+\frac{1}{2}} = F(u_i, u_{i+1})$

avec F flux monotone deux points vérifiant :

Consistance : $F(v,v) = f(v) \quad \forall v \in \mathbb{R}$

Monotonie : $F(v,w)$ croissante par rapport à v
décroissante par rapport à w

Lipchitz par rapport aux deux variables
avec Lip_{F_1} et Lip_{F_2} sur $I_0 \times I_0$

exemples :

pour f croissante : $F(v,w) = f(v)$
pour f décroissante : $F(v,w) = f(w)$
schéma décentré amont

Exemple pour f lipchitz :

$$F(v,w) = \frac{f(v)+f(w)}{2} + D(v-w)$$

$$D \geq \frac{1}{2} Lip_f = \max_{s \in I_0} |f'(s)|$$

proposition : soit $F(v,w)$ un flux monotone deux point pour $f(v)$, alors

$$F_{K\sigma}^n(v,w) = \begin{cases} F(v,w)\, V_{K\sigma}^n & \text{si } V_{K\sigma}^n \geq 0 \\ F(w,v)\, V_{K\sigma}^n & \text{si } V_{K\sigma}^n \leq 0 \end{cases}$$

est un flux monotone deux points pour le modèle multi-d.

on note $a^+ = \max(0,a)$, $a^- = \min(0,a)$

avec $a = a^+ + a^-$

$$F_{K\sigma}^n(v,w) = F(v,w)\,(V_{K\sigma}^n)^+ + F(w,v)\,(V_{K\sigma}^n)^-$$

preuve : Conservativité

$$F_{K\sigma}^n(v,w) + F_{L\sigma}^n(w,v) = \begin{cases} F(v,w)\,V_{K\sigma}^n + F(v,w)\,V_{L\sigma}^n = 0 & \text{si } \begin{cases} V_{K\sigma}^n \geq 0 \\ V_{L\sigma}^n \leq 0 \end{cases} \\ F(w,v)\,V_{K\sigma}^n + F(w,v)\,V_{L\sigma}^n = 0 & \text{si } \begin{cases} V_{L\sigma}^n \geq 0 \\ V_{K\sigma}^n \leq 0 \end{cases} \end{cases}$$

car $V_{K\sigma}^n + V_{L\sigma}^n = 0$

Consistance :

$$\begin{aligned} F_{K\sigma}^n(v,v) &= F(v,v)\,(V_{K\sigma}^n)^+ + F(v,v)\,(V_{K\sigma}^n)^- \\ &= f(v)\,\Big(\underbrace{(V_{K\sigma}^n)^+ + (V_{K\sigma}^n)^-}_{V_{K\sigma}^n}\Big) \\ &= f(v)\,V_{K\sigma}^n \end{aligned}$$

OK

Monotonie OK grace à la monotonie de $F(v,w)$ et à la permutation de v et w selon le signe de $V_{K\sigma}^n$.

principe du maximum discret

$$\text{①}\quad |K| \frac{u_K^n - u_K^{n-1}}{\Delta t^n} + \sum_{\sigma=K|L} F_{K\sigma}^n(u_K^*, u_L^*) + \sum_{\sigma=K|.} F_{K\sigma}^n(u_K^*, u_\sigma^*) = 0$$

$$\frac{1}{\Delta t^n}\int_{t^{n-1}}^{t^n}\int_K \operatorname{div} \vec V \, dx = 0 \iff \sum_{\sigma\in F_K} \underbrace{\frac{1}{\Delta t^n}\int_{t^{n}}^{t^{n-1}}\int_\sigma \vec V(x,t)\cdot \vec n_{K\sigma}\, d\sigma\, dt}_{V_{K\sigma}^n} = 0$$

$$\boxed{\sum_{\sigma\in F_K} V_{K\sigma}^n = 0}$$

$$\iff \quad \text{②}\quad \sum_{\sigma\in F_K} F(u_K^*, u_K^*) \underbrace{V_{K\sigma}^n}_{(V_{K\sigma}^n)^+ + (V_{K\sigma}^n)^-} = 0$$

① - ②

$$|K|\frac{u_K^n - u_K^{n-1}}{\Delta t^n} + \sum_{\sigma=K|L}\Big(\overbrace{F(u_K^*,u_L^*)(V_{K\sigma}^n)^+ - F(u_K^*,u_K^*)(V_{K\sigma}^n)^+}^{a_{K\sigma}(u_K^*-u_L^*)} + \overbrace{F(u_L^*,u_K^*)(V_{K\sigma}^n)^- - F(u_K^*,u_K^*)(V_{K\sigma}^n)^-}^{b_{K\sigma}(u_L^*-u_K^*)}\Big)$$

$$+ \sum_{\sigma=K|.}\underbrace{F(u_K^*,u_\sigma^*)(V_{K\sigma}^n)^+ - F(u_K^*,u_K^*)(V_{K\sigma}^n)^+}_{a_{K\sigma}(u_K^*-u_\sigma^*)} + \underbrace{F(u_\sigma^*,u_K^*)(V_{K\sigma}^n)^- - F(u_K^*,u_K^*)(V_{K\sigma}^n)^-}_{b_{K\sigma}(u_\sigma^*-u_K^*)}$$

$$\begin{cases} 0 \le a_{K\sigma} \le Lip_{F_2} \\ 0 \le b_{K\sigma} \le Lip_{F_1} \end{cases}$$

$$|K|\frac{u_K^n - u_K^{n-1}}{\Delta t^n} + \sum_{\sigma=K|L} a_{K\sigma}(u_K^* - u_L^*)(V_{K\sigma}^n)^+ + b_{K\sigma}(u_K^* - u_L^*)\left(-(V_{K\sigma}^n)^-\right)$$

$$+ \sum_{\sigma=K|.} a_{K\sigma}(u_K^* - u_\sigma^*)(V_{K\sigma}^n)^+ + b_{K\sigma}(u_K^* - u_\sigma^*)\left(-(V_{K\sigma}^n)^-\right) = 0$$

Cas implicite $\quad * = n$

$$\left(\frac{|K|}{\Delta t^n} + \sum_{\sigma\in F_K} a_{K\sigma}(V_{K\sigma}^n)^+ + b_{K\sigma}\left(-(V_{K\sigma}^n)^-\right)\right) u_K^n$$

$$= \frac{|K|}{\Delta t^n} u_K^{n-1} + \left(\sum_{\sigma=K|L} a_{K\sigma}(V_{K\sigma}^n)^+ + \sum_{\sigma=K|L} b_{K\sigma}\left(-(V_{K\sigma}^n)^-\right)\right) u_L^n$$

$$+ \left(\sum_{\sigma=K|.} a_{K\sigma}(V_{K\sigma}^n)^+ + \sum_{\sigma=K|.} b_{K\sigma}\left(-(V_{K\sigma}^n)^-\right)\right) u_\sigma^n$$

$\hookrightarrow$ Combinaison convexe donc du principe du maximum $\forall \Delta t^n > 0$.

<u>Cas explicite</u> $* = n-1$

$$\frac{|K|}{\Delta t} u_K^n = \left(\frac{|K|}{\Delta t^n} - \sum_{\sigma \in F_K} a_{K\sigma} (V_{K\sigma}^n)^+ + b_{K\sigma} (-(V_{K\sigma}^n)^-) \right) u_K^{n-1}$$

$$+ \left(\sum_{\sigma = K|L} a_{K\sigma} (V_{K\sigma}^n)^+ + b_{K\sigma} (-(V_{K\sigma}^n)^-) \right) u_L^{n-1}$$

$$+ \left(\sum_{\sigma = K|.} a_{K\sigma} (V_{K\sigma}^n)^+ + b_{K\sigma} (-(V_{K\sigma}^n)^-) \right) u_\sigma^{n-1}$$

$\hookrightarrow$ Combinaison convexe donc principe du maximum si

$$\Delta t^n \leq \min_{K \in M_h} \frac{|K|}{\sum_{\sigma \in F_K} a_{K\sigma} (V_{K\sigma}^n)^+ + b_{K\sigma} (-(V_{K\sigma}^n)^-)}$$

Condition suffisante <u>CFL</u> :

$$\boxed{\Delta t^n \leq \min_{K \in M_h} \frac{|K|}{\mathrm{Lip}\, F_2 \sum_{\sigma \in F_K} (V_{K\sigma}^n)^+ + \mathrm{Lip}\, F_1 \sum_{\sigma \in F_K} (-(V_{K\sigma}^n)^-)}}$$

$$|K|\left(\frac{u_K^n-u_K^{n-1}}{\Delta t^n}\right)+\sum_{\sigma=K|L}\underbrace{\left(f(u_L^{n-1})-f(u_K^{n-1})\right)}_{a_{K\sigma}(u_L^{n-1}-u_K^{n-1})}V_{K\sigma}^- +\sum_{\sigma=K|.}\underbrace{\left(f(d_\sigma)-f(u_K^{n-1})\right)}_{a_{K\sigma}(d_\sigma-u_K^{n-1})}V_{K\sigma}^-$$

$$=\underbrace{\left(f(c_K)-f(u_K^{n-1})\right)}_{b_K(c_K-u_K^{n-1})}h_K^+$$

$0\leq a_{K\sigma}\leq Lip_f=\max_{s\in I}|f'(s)|$

$0\leq b_K\leq Lip_f$ car f est croissante.

cf $a_{K\sigma}=\dfrac{f(u_L^{n-1})-f(u_K^{n-1})}{u_L^{n-1}-u_K^{n-1}}$ $\forall\sigma\in F_K\cap F_e^{int}$

$$\frac{|K|}{\Delta t^n}u_K^n=\left(\frac{|K|}{\Delta t^n}-\sum_{\sigma\in F_K}a_{K\sigma}(-V_{K\sigma}^-)-h_K^+b_K\right)u_K^{n-1}$$

$$+\sum_{\sigma=K|L}\underbrace{a_{K\sigma}}_{\geq 0}\underbrace{(-V_{K\sigma}^-)}_{\geq 0}u_L^{n-1}+\sum_{\sigma=K|.}\underbrace{a_{K\sigma}}_{\geq 0}d_\sigma\underbrace{(-V_{K\sigma}^-)}_{\geq 0}$$

$$+\underbrace{h_K^+b_K}_{\geq 0}c_K$$

On a une combinaison convexe si

$$\Delta t^n\leq\min_{K\in\mathcal{M}_h}\frac{|K|}{\sum_{\sigma\in F_K}a_{K\sigma}(-V_{K\sigma}^-)+b_K h_K^+}$$

$$\Leftarrow\quad\boxed{\Delta t^n\leq\min_{K\in\mathcal{M}_h}\frac{|K|}{Lip_f\left(\sum_{\sigma\in F_K}(-V_{K\sigma}^-)+h_K^+\right)}}$$

Rq: $-V_{K\sigma}^-=V_{L\sigma}^+$

car $V_{L\sigma}=-V_{K\sigma}$

<u>Condition CFL</u>

Sous la condition CFL, on obtient le principe du maximum :

$$\min\left(\min_{L\in\mathcal{M}_h} u_L^0,\ \min_{\sigma\in\mathcal{F}_h^-} d_\sigma,\ \min_{L\in\mathcal{M}_h^+} c_L\right) \leq u_K^n \leq \max\left(\max_{L\in\mathcal{M}_h} u_L^0,\ \max_{\sigma\in\mathcal{F}_h^-} d_\sigma,\ \max_{L\in\mathcal{M}_h^+} c_L\right)$$

$$\mathcal{F}_h^- = \{ \underset{\sigma = K|.}{\sigma \in \mathcal{F}_h^{ext}} \text{ tq } v_{K\sigma} < 0 \}$$

$$\mathcal{M}_h^+ = \{ L \in \mathcal{M}_h \text{ tq } b_L^+ > 0 \}$$