

Cours 3 : Extension à la dim 2, 3 des schémas VF pour les équations elliptiques du second ordre.

problème modèle $\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u = f \quad \text{sur } \Omega \\ u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right.$

$\Omega = \left\{ \begin{array}{l} \text{segment } d=1 \\ \text{polygone } d=2 \\ \text{polyèdre } d=3 \end{array} \right.$ (d dimension de l'espace)

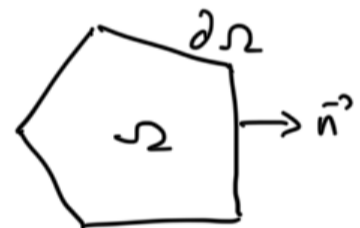
$H_0^1(\Omega) = \{ v \in L^2(\Omega) \text{ tq. } \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx < +\infty, u=0 \text{ sur } \partial\Omega \}$

$\|u\|_{H_0^1} = \|\nabla u\|_{L^2} = \sqrt{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx}$

$\langle u, v \rangle_{H_0^1} = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx$

Formule de Stokes : $\vec{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ ($\vec{F} \in H_{\text{div}}(\Omega)$)

$\int_{\Omega} \text{div}(\vec{F}) dx = \int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma(x)$



Formulation variationnelle : $v \in H_0^1(\Omega)$ fonction test

$\int_{\Omega} -\Delta u v dx = \int_{\Omega} f v dx$

on utilise : $-\Delta u v = \text{div}(-v \nabla u) + \nabla u \cdot \nabla v$

$\Rightarrow \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} \text{div}(-v \nabla u) dx = \int_{\Omega} f v dx$

Stokes $\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\partial\Omega} -v \nabla u \cdot n d\sigma(x) = \int_{\Omega} f v dx$

Comme $v \in H_0^1(\Omega)$ on a

$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx$

$$(EV) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouve } u \in H_0^1(\Omega) \text{ t.q. } \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \end{array} \right.$$

prop: d'après Lax Milgram, (EV) a une solution unique
De plus elle vérifie l'estimation a priori:

$$\|u\|_{H_0^1} \leq (\text{diam } \Omega) \|f\|_{L^2} \quad (*)$$

$$\text{diam } \Omega = \max_{(x,y) \in \Omega \times \Omega} |y-x|$$

Inégalité de Poincaré: $\forall v \in H_0^1(\Omega)$

$$\|v\|_{L^2} \leq (\text{diam } \Omega) \|v\|_{H_0^1}$$

preuve de la prop: on pose $v = u$ dans (EV)

$$\Rightarrow \|u\|_{H_0^1}^2 = \int_{\Omega} f u \, dx \underset{\text{C.S.}}{\leq} \|f\|_{L^2} \|u\|_{L^2}$$

$$\leq \underset{\text{Poincaré}}{(\text{diam } \Omega)} \|u\|_{H_0^1} \|f\|_{L^2}$$

$\Rightarrow (*)$

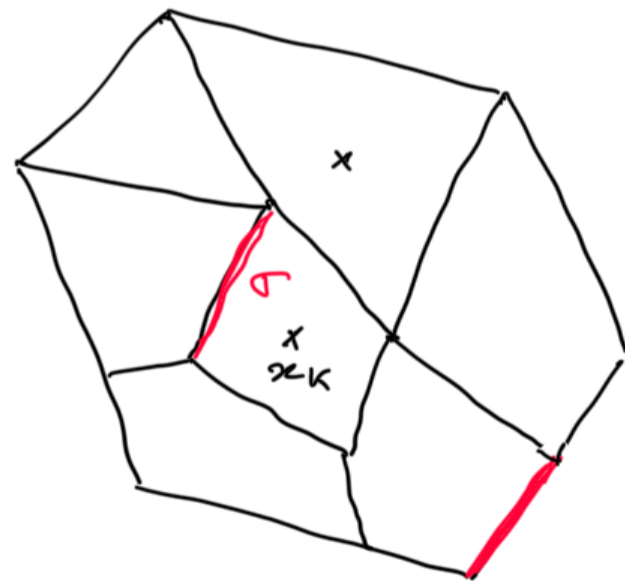
Discretisation du domaine Ω (maillage)

• on partitionne le domaine en mailles $K \in \mathcal{M}_h$

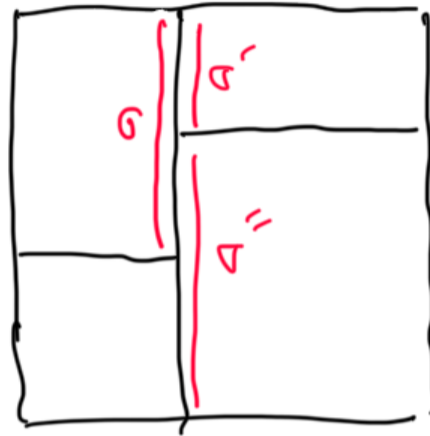
• on note $x_K \in K \quad \forall K \in \mathcal{M}_h$
"le centre de maille"

• on définit l'ensemble de faces $\sigma \in \mathcal{F}_h$ du maillage

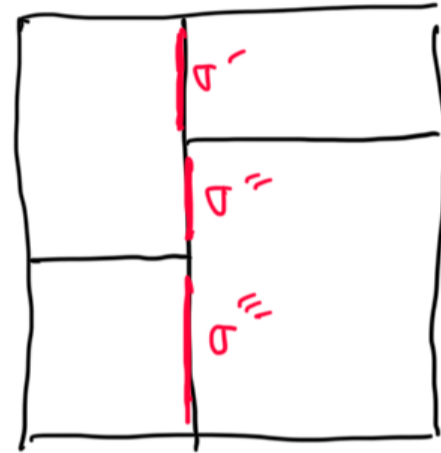
qui sont les intersections $\partial K \cap \partial L$ de mailles voisines adjacentes à σ ou bord être planes.



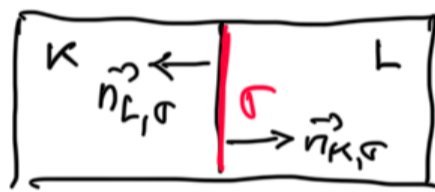
- on distingue les faces intérieures partagées par deux mailles. On note F_e^{int} l'ensemble des faces intérieures et $\sigma = K|L \in F_e^{int}$
- on note F_e^{ext} l'ensemble des faces de bord et $\sigma = K|$. on dit que $\sigma \in \partial K \cap \partial \Omega$.



Mouillage non conforme
Non compatible avec
la définition précédente



Mouillage conforme



$$\sigma = K|L \in F_e^{int}$$

$\vec{n}_{K,\sigma}$: normale unitaire à σ orientée
sortante de K

$\vec{n}_{L,\sigma}$: normale unitaire à σ orientée
sortante de L

$$\vec{n}_{K,\sigma} + \vec{n}_{L,\sigma} = 0$$



$\sigma \in F_e^{ext}$
 $\sigma = K|$.

$\vec{n}_{K,\sigma}$: normale unitaire à σ
orientée sortante de K
c'est à dire de Ω .



$\sigma = K| \in F_e^{ext}$

on définit le "centre de face" $x_\sigma \in \sigma$.

• $|K|$ = "volume" de la maille

• $|\sigma|$ = surface de la face

• $h = \max_{K \in \mathcal{M}_h} (\text{diam } K)$

$\left. \begin{array}{l} |\sigma| = 1 \quad d=1 \\ \text{longueur} \quad d=2 \\ \text{surface} \quad d=3 \end{array} \right\}$

Discrétisation de l'espace de solutions :

$$V_h = \{ v_h \in L^2(\Omega) \text{ t.q. } v_h(x) = v_K \in \mathbb{R} \quad \forall K \in \mathcal{M}_h \}$$

V_h n'est pas un sous-espace de $H_0^1(\Omega)$
on dit que la discrétisation est non conforme.

Discrétisation de (E)

* on écrit l'équation (E) sous forme conservative

$$-\Delta u = \operatorname{div}(-\nabla u) = f$$

* on intègre sur chaque cellule $K \in \mathcal{M}_h$

* on applique la formule de Stokes pour se ramener à une intégrale de bord

→ on fait apparaître le flux sur la face

→ on discrétise les flux.

$$\int_K \operatorname{div}(-\nabla u) dx = \int_K f dx$$

$$\int_{\partial K} -\nabla u \cdot n_K d\sigma(x) = \int_K f dx$$

$$\sum_{\sigma \in F_K} \left\{ \int_{\sigma} -\nabla u \cdot n_{K,\sigma} d\sigma(x) \right\} = \int_K f dx$$



F_K est l'ensemble des faces de K

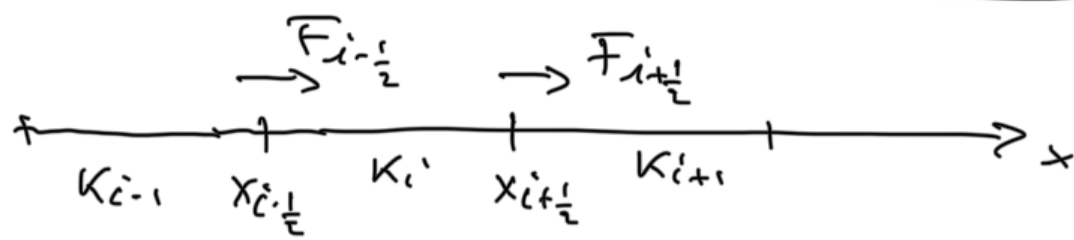
flux sur la face σ $F_{K,\sigma}(u)$ orienté sortant de K

on va noter $\frac{F_{K,\sigma}(u_h)}{F_{K,\sigma}(u)}$ le flux numérique qui discrétise

schéma VF :

$$(VF) \left\{ \begin{array}{l} \sum_{\sigma \in F_K} F_{K,\sigma}(u_h) = \int_K f dx \\ \forall K \in \mathcal{M}_h \end{array} \right.$$

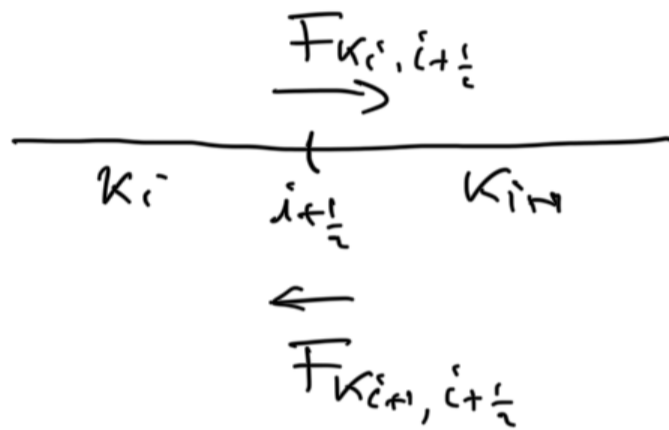
perallèle avec la dimension $d=1$



$$F_{i+1/2} - F_{i-1/2} = \int_{K_i} f dx$$

Ici on obtient:

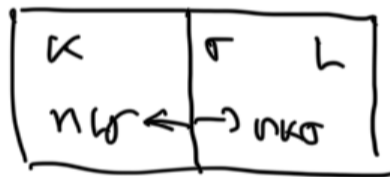
$$\underbrace{F_{K_i, i+1/2}}_{F_{i+1/2}} + \underbrace{F_{K_i, i-1/2}}_{-F_{i-1/2}} = \int_{K_i} f dx$$



ben sur on doit avoir $F_{K_i, i+1/2} + F_{K_{i+1}, i+1/2} = 0$
c'est la conservativité de flux

Rq: le flux continu vérifie

$$\bar{F}_{K\sigma}(u) + \bar{F}_{L\sigma}(u) = 0 \quad \forall \sigma = K|L \in \mathcal{F}_h^{int}$$



$$\begin{aligned} & \int_{\sigma} -\nabla u \cdot n_{K\sigma} d\sigma + \int_{\sigma} -\nabla u \cdot n_{L\sigma} d\sigma \\ &= \int_{\sigma} -\nabla u \cdot \underbrace{(n_{K\sigma} + n_{L\sigma})}_0 d\sigma = 0 \end{aligned}$$

Propriétés des flux numériques $F_{K\sigma}(u_h)$

- ① flux linéaires par rapport à u_h et à u_σ , $\sigma \in \mathcal{F}_h^{ext}$
- ② Conservativité de flux : $F_{K\sigma}(u_h) + F_{L\sigma}(u_h) = 0$
 $\forall \sigma = K|L \in \mathcal{F}_h^{int}$
- ③ Consistance des flux :

Interpolant I_h : $C^0(\bar{\Omega}) \rightarrow V_h$

$$u \mapsto (I_h u)_K = u(x_K)$$

Erreur de consistance des flux:

$$\forall \kappa \in M_h$$

$$R_{\kappa\sigma}(u) = \int_{\sigma} -\nabla u \cdot \nu_{\kappa\sigma} d\sigma - F_{\kappa\sigma}(I_h u)$$

on dit que le flux est consistant

$$|R_{\kappa\sigma}(u)| \leq C(u) |\sigma| h \quad \forall u \in C^2(\bar{\Omega})$$

(4) Coercivité des flux (global à tous les flux $F_{\kappa\sigma}(u_h)$, $\kappa \in M_h$, $\sigma \in F_h$)

on définit :

$$a_h(u_h, v_h) = \sum_{\kappa \in M_h} \sum_{\sigma \in F_h} F_{\kappa\sigma}(u_h) \nu_{\kappa}$$

le schéma est dit coercif si il existe une norme $\|\cdot\|_{1,h}$ sur V_h (norme H_0^1 discrète)

et deux constantes α et C_p t.q

(coercivité de a_h) $a_h(u_h, u_h) \geq \alpha \|u_h\|_{1,h}^2 \quad \forall u_h, v_h \in V_h$

Inégalité de Poincaré $\|v_h\|_{L^2} \leq C_p \|v_h\|_{1,h} \quad \forall v_h \in V_h$

avec α et C_p ne dépendent pas de h sur un famille de maillages.

proposition : si les flux satisfont les propriétés 1 à 4, alors (VF) admet une solution unique. Elle vérifie l'estimation a priori

$$\|u_h\|_{1,h} \leq \frac{C_p}{\alpha} \|f\|_{L^2}$$

et l'estimation d'erreur à l'ordre 1

$$\|I_h u - u_h\|_{1,h} \leq \frac{1}{\alpha} C(u) h$$

si $u \in C^2(\bar{\Omega})$

preuve de l'estimation a priori :

$$\underbrace{\sum_{K \in \mathcal{M}_h} \sum_{\sigma \in F_K} F_{K\sigma}(u_h)}_{a_h(u_h, u_h)} u_K = \sum_{K \in \mathcal{M}_h} \left(\int_K f \right) u_K$$

(4) coercivité \Rightarrow

$$\alpha \|u_h\|_{1,h}^2 \leq a_h(u_h, u_h) = \sum_{K \in \mathcal{M}_h} \left(\int_K f u_K \right) = \int_{\Omega} f u_h dx$$

\Rightarrow C.S

$$\alpha \|u_h\|_{1,h} \leq \|f\|_{L^2} \|u_h\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} C_P \|u_h\|_{1,h}$$

\nearrow Poincaré discret

$$\Rightarrow \boxed{\|u_h\|_{1,h} \leq \frac{C_P}{\alpha} \|f\|_{L^2}}$$

Exemple de construction de flux : flux TPFA
 "Two-Point Flux Approximation"



$$\sigma = \kappa_{1L} \in F_{\sigma}^{int}$$

$$F_{K\sigma}(u_h) = \frac{u_K - u_L}{|x_K - x_L|} |\sigma|$$



$$F_{K\sigma}(u_h) = \frac{u_K - u_{\sigma}}{|x_K - x_{\sigma}|} |\sigma|$$

$$\forall \sigma = \kappa_{1\sigma} \in F_{\sigma}^{ext}$$

Vérifions les 4 propriétés :

① linéarité par rapport à u_K et u_{σ} : ok

② Conservativité

$$F_{K\sigma}(u_h) + F_{L\sigma}(u_h) = |\sigma| \frac{u_K - u_L}{|x_K x_L|} + |\sigma| \frac{u_L - u_K}{|x_L x_K|} = 0$$

④ Coercivité ($u_\sigma = 0 \quad \forall \sigma \in F_h^{\text{ext}}$, pb homogène)

$$\begin{aligned} a_h(u_h, v_h) &= \sum_{K \in \mathcal{M}_h} \sum_{\sigma \in F_K} F_{K\sigma}(u_h) v_K \\ &= \sum_{\substack{\sigma = KL \\ \in F_h^{\text{int}}}} F_{K\sigma}(u_h) v_K + F_{L\sigma}(u_h) v_L \\ &\quad + \sum_{\substack{\sigma = Kl. \\ \in F_h^{\text{ext}}}} F_{K\sigma}(u_h) v_K \end{aligned}$$

Conservativité

$$F_{K\sigma}(u_h) + F_{L\sigma}(u_h) = 0 = \sum_{\substack{\sigma = KL \\ \in F_h^{\text{int}}}} F_{K\sigma}(u_h) (v_K - v_L) + \sum_{\substack{\sigma = Kl. \\ \in F_h^{\text{ext}}}} F_{K\sigma}(u_h) (v_K - 0)$$

$$\Rightarrow a_h(u_h, v_h) = \sum_{\substack{\sigma = KL \\ \in F_h^{\text{int}}}} |\sigma| \frac{(u_K - u_L)(v_K - v_L)}{|x_K x_L|} + \sum_{\substack{\sigma = Kl. \\ \in F_h^{\text{ext}}}} |\sigma| \frac{(u_K - 0)(v_K - 0)}{|x_K x_\sigma|}$$

$\Rightarrow a_h(u_h, v_h)$ est symétrique, positive définie

Le schéma TPFA définit la norme H_0^1 discrète

$$\|u_h\|_{1,h} = \left(\sum_{\sigma = KL} |\sigma| \frac{(u_K - u_L)^2}{|x_K x_L|} + \sum_{\sigma = Kl.} |\sigma| \frac{(u_K - 0)^2}{|x_K x_\sigma|} \right)^{1/2}$$

et on peut montrer l'inégalité de Poincaré discrète pour cette norme.

Donc par définition $\alpha = 1$.

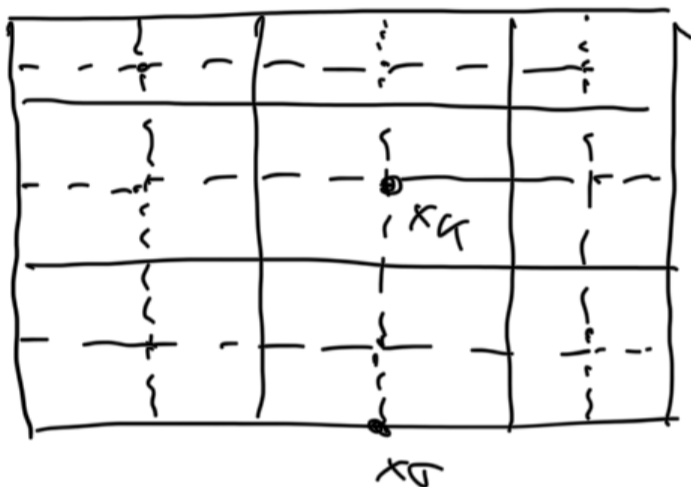
(3)

Consistance : elle suppose que le maillage est orthogonal

$$\left\{ \begin{array}{l} x_k x_L \perp \sigma \quad \forall \sigma = K|L \in \mathcal{F}^{int} \\ x_k x_\sigma \perp \sigma \quad \forall \sigma = K| \in \mathcal{F}_h^{ext} \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_k x_L // n_{K\sigma} \\ x_k x_\sigma // n_{K\sigma} \end{array} \right.$$

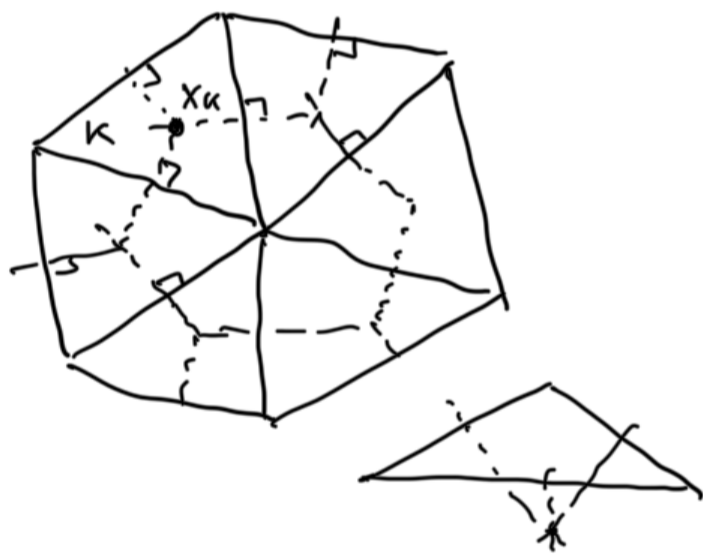
→ brs contraignant sur le maillage
exemples qui marchent :



Maillages cartésiens
en dimension 1, 2, 3

x_k = centre de gravité
de mailles

x_σ = centre de gravité
de la face



Maillages triangulaires 2D

x_k : intersection des
médiatrices

! Il faut des angles aigus

Maillages Voronoï : 2D, 3D



à partir d'un
nuage de points

Maille = ensemble
des points le plus
proche d'un point
donné que de
tous les autres

Exercice :

$$(E) \begin{cases} \partial_t u(x,t) + \text{Div}(-\nabla u(x,t)) = f(x,t) & \text{sur } \Omega \times (0,T) \\ u(x,t) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0,T) \\ u(x,0) = u^0(x) & \text{sur } \Omega \end{cases}$$

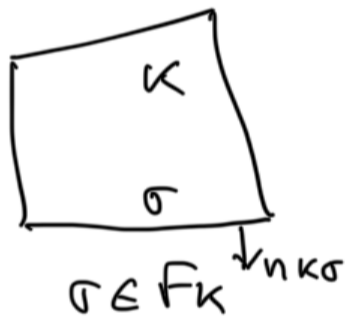
① Ecrire la semi-discretisation VF en espace de (E) (continu en temps)

② Rajouter l'intégration en temps avec le schéma d'Euler implicite.

①

$$\int_K \partial_t u \, dx + \int_K \text{Div}(-\nabla u) \, dx = \int_K f(x,t) \, dx$$

$$\frac{d}{dt} \int_K u(x,t) \, dx + \underbrace{\int_{\partial K} -\nabla u \cdot n_K \, d\sigma}_{\text{flux continu}} = \int_K f(x,t) \, dx$$



$$\sum_{\sigma \in F_K} \left[\int_{\sigma} -\nabla u \cdot n_{K\sigma} \, d\sigma \right]$$

flux continu
discrétisé par \$F_{K\sigma}(u_h(t))\$

\$\int_K u(x,t) \, dx\$ est discrétisé par \$|K| u_K(t)\$

$$\begin{cases} |K| \frac{d}{dt} u_K(t) + \sum_{\sigma \in F_K} F_{K\sigma}(u_h(t)) = \int_K f(x,t) & \forall K \in M_h \\ u_K(0) = \frac{1}{|K|} \int_K u^0(x) \, dx & \forall K \in M_h \end{cases}$$

flux TPFA :

$$F_{K\sigma}(u_h) = \begin{cases} \frac{u_K - u_L}{|x_K x_L|} |\sigma| & \text{si } \sigma = K|L \in F_h^{\text{int}} \\ \frac{u_K - 0}{|x_K x_{\sigma}|} |\sigma| & \text{si } \sigma = K| \in F_h^{\text{ext}} \end{cases}$$

