Cours proba MAM3

Chapitre I : Dénombrement

Notations

Soit E un ensemble fini.

. le cardinal de E désigne le nombre d'éléments qui le composent.

On le note :

$$\text{Card}(E) \text{ ou } |E|$$

. $\mathcal{P}(E)$ désigne l'ensemble des parties de E

exemple : si $E = \{1, 2, 3\}$

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$$

Soient A et B deux parties de E.

. $A \cap B = \{x \in E \text{ tq } x \in A \text{ et } x \in B\}$: intersection de A et B

. $A \cup B = \{x \in E \text{ tq } x \in A \text{ ou } x \in B\}$: union de A et B

. $\bar{A} = \{x \in E \text{ tq } x \in E \text{ et } x \notin A\}$: complémentaire de A dans E

. $A - B = \{x \in E \text{ tq } x \in A \text{ et } x \notin B\}$: A privé de B

. $A \Delta B = \{x \in E \text{ tq } x \in A \text{ et } x \notin B \text{ ou } x \in B \text{ et } x \notin A\}$

: différence symétrique de A et B

Rq : $A \Delta B = (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})$

. $A \times B = \{(x, y) \text{ tq } x \in A \text{ et } y \in B\}$: espace produit

. soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note : factorielle n $n!$

on a $n! = 1 \times 2 \times \ldots \times n$

convention : $0! = 1$

Dénombrement

Espace produit :

Soit E un ensemble fini de cardinal n

Soit F un ensemble fini de cardinal p.

On a :

$$\mathrm{Card}(E \times F) = \mathrm{Card}(E) \times \mathrm{Card}(F)$$

Nombre d'application de E dans F :

Ce nb d'application est $(\mathrm{Card}\,F)^{(\mathrm{Card}\,E)} = p^n$

Parties d'un ensemble :

$$\mathrm{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$$

soit A, B deux parties de E

- $\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cap B)$
- $\mathrm{Card}(\bar{A}) = \mathrm{Card}(E) - \mathrm{Card}(A)$

Arrangements

Soit E un ensemble de cardinal n (n éléments distincts).

Soit p un entier tel que $1 \leqslant p \leqslant n$.

On appelle arrangement d'ordre p des éléments de E, un p-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ où les éléments x_i sont des éléments distincts de E.

le nombre d'arrangements d'ordre p de E est noté A_n^p avec :

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Rq : $A_n^0 = 1$ et $A_n^n = n!$

Permutations

On appelle permutation d'un ensemble E, de cardinal n, un arrangement d'ordre n de E.

Le nombre de permutations est $n!$

Cadre des répétitions :

Si l'on considère le mot FINI, la lettre I se répète et donc le nombre de permutations n'est pas $4!$, mais $\frac{4!}{2!}$ car les mots sont tous comptés deux fois dans $4!$

Plus généralement.

Soit E une famille de cardinal n mais avec seulement k éléments distincts $a_1, a_2, \dots, a_k$.

On note x_i le nombre de fois où l'élément a_i est répété dans la famille E.

On a donc $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$.

Le nombre de ~~répétitions~~ permutation est alors :

$$\frac{n!}{x_1! \, x_2! \dots x_k!}$$

Combinaisons

Soit E un ensemble à n éléments distincts.

On appelle combinaison d'ordre p de E toute partie à p éléments.

Le nombre de combinaison de E à p éléments est noté C_n^p ou $\binom{n}{p}$ et on a :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

Rq :

- $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!}$: coefficient binomiaux
- $C_n^p = C_n^{n-p}$
- $C_n^0 = 1 \qquad C_n^n = 1$

- $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$ triangle de Pascal

- $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, x^k \, y^{n-k}$ (pour $n \geq 0$)

formule de Newton

Cadre des répétition

Cette fois-ci, on considère les combinaisons de p éléments de E, avec des éléments non nécessairement distincts, mais toujours sans considération d'ordre dans les éléments.

Le nb d'éléments avec répétition d'ordre p est :

$$\Gamma_n^p = C_{n+p-1}^p = \frac{(n+p-1)!}{p!\,(n-1)!}$$