

École doctorale n° 364 : Sciences fondamentales et appliquées

## Doctorat ParisTech

# THÈSE

pour obtenir le grade de docteur délivré par

**l'École nationale supérieure des mines de Paris**

**Spécialité « Mécanique Numérique »**

*par*

**Grégory PUAUX**

soutenance prévue le 8 décembre 2011

## **Simulation numérique des écoulements aux échelles microscopique et mésoscopique dans le procédé RTM**

Directeur de thèse : **Patrice LAURE**

Directeur de thèse : **Michel VINCENT**

Co-encadrement de la thèse : **Luisa SILVA**

### Jury

**M. Sylvain DRAPIER**, Professeur, LGC, ENSM Saint-Etienne

**M. Eric ARQUIS**, Professeur, I2M Bordeaux, Institut Polytechnique de Bordeaux

**M. Joël BREARD**, Professeur, LOMC, Université du Havre

**M. Patrice LAURE**, Directeur de recherche CNRS, Lab. J.A. Dieudonné, UNSA

**M. Michel Vincent**, Directeur de recherche CNRS, CEMEF, Mines Paristech

**Mme Luisa SILVA**, Chargée de recherche, CEMEF, Mines Paristech

Rapporteur

Rapporteur

Examinateur

Directeur de thèse

Directeur de thèse

Maître de thèse

**MINES ParisTech**

**Centre de Mise en Forme des Matériaux**

Rue Claude Daunesse, BP 207, 06904 Sophia-Antipolis Cedex, France



# Table des matières

<b>Nomenclature</b>	<b>v</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Généralités</b>	<b>7</b>
1.1 Les renforts tissés . . . . .	7
1.2 Le procédé RTM . . . . .	9
1.3 Modélisation des écoulements . . . . .	13
1.3.1 Les équations de Navier-Stokes . . . . .	13
1.3.2 Loi de Darcy . . . . .	13
1.3.2.1 Développement de l'équation . . . . .	13
1.3.2.2 Domaine de validité . . . . .	14
1.3.2.3 Les extensions de la loi de Darcy . . . . .	15
1.4 Définition d'un VER . . . . .	16
1.5 Technique d'homogénéisation . . . . .	17
1.5.1 Définition des moyennes . . . . .	18
1.5.2 Obtention des lois macroscopiques à partir des lois microscopiques .	19
1.6 Aspect multi-échelles des renforts fibreux . . . . .	21
1.7 Conclusion . . . . .	23
<b>2 Méthodes numériques et immersion de domaines</b>	<b>25</b>
2.1 Immersion de domaines . . . . .	25
2.1.1 La méthode d'immersion de domaines . . . . .	25
2.1.1.1 Méthode . . . . .	25
2.1.1.2 L'interface diffuse . . . . .	27
2.1.2 Adaptation de maillage aux interfaces . . . . .	28
2.1.3 Immersion des renforts . . . . .	31
2.1.3.1 Technique d'immersion de maillage . . . . .	31
2.1.3.2 Exemples d'application sur des tissus . . . . .	34
2.2 Résolution numérique des écoulements . . . . .	40
2.2.1 Formulation éléments finis classique des équations de Stokes . . . . .	40
2.2.2 Stabilisation de la pression . . . . .	43
2.2.2.1 Problématique . . . . .	43
2.2.2.2 Modification de la formulation stabilisée . . . . .	46
2.2.2.3 Validation de la stabilisation bulle modifiée . . . . .	47
2.2.3 Résolution numérique du couplage Stokes-Darcy . . . . .	50
2.3 Validation de la méthode d'immersion de domaines . . . . .	51

2.3.1	Écoulements de Poiseuille plan et de Poiseuille tube . . . . .	51
2.3.1.1	Solution analytique pour un écoulement de Poiseuille . . . . .	51
2.3.1.2	Le calcul d'erreur . . . . .	52
2.3.1.3	Résolution avec la méthode d'immersion de domaines . . . . .	52
2.3.1.4	Étude de sensibilité aux paramètres numériques . . . . .	53
2.3.1.5	Calculs éléments finis 3D . . . . .	55
2.3.2	Écoulement de Couette cylindrique . . . . .	61
2.3.2.1	Solution analytique pour un écoulement de Couette cylindrique . . . . .	61
2.3.2.2	Résolution éléments finis d'un écoulement de Couette cylindrique . . . . .	62
2.3.2.3	Résolution avec l'approche d'immersion de domaines . . . . .	63
2.4	Validation du couplage Stokes-Darcy . . . . .	66
2.4.1	Validation du solveur de Brinkman . . . . .	66
2.4.2	Validation du couplage Stokes-Brinkman . . . . .	68
2.4.2.1	Utilisation du solveur de Brinkman pour un écoulement de Poiseuille . . . . .	68
2.4.2.2	Couplage . . . . .	70
2.5	Conclusion . . . . .	71
<b>3</b>	<b>Perméabilité renforts fibreux</b>	<b>75</b>
3.1	Bibliographie . . . . .	75
3.1.1	Échelle microscopique . . . . .	75
3.1.1.1	Les modèles capillaires . . . . .	75
3.1.1.2	Les modèles de cellule . . . . .	77
3.1.1.3	Modèles de lubrification . . . . .	78
3.1.1.4	Le modèle mixte de Brusckke et Advani [BA93] . . . . .	81
3.1.2	Échelle mésoscopique . . . . .	81
3.1.3	Bibliographie sur le calcul numérique de la perméabilité . . . . .	85
3.1.3.1	Échelle microscopique . . . . .	85
3.1.3.2	Échelle mésoscopique . . . . .	86
3.1.3.3	Échelle macroscopique . . . . .	90
3.2	Le calcul numérique de la perméabilité . . . . .	92
3.3	Validation du calcul de perméabilité . . . . .	93
3.3.1	Perméabilité équivalente à un écoulement de Poiseuille . . . . .	93
3.3.1.1	Perméabilité analytique . . . . .	93
3.3.1.2	Les calculs numériques de la perméabilité en 2D . . . . .	95
3.3.1.3	Étude de sensibilité aux paramètres numériques . . . . .	95
3.3.1.4	Les calculs numériques de perméabilité en 3D . . . . .	97
3.4	Calcul de perméabilité pour un arrangement régulier de fibres . . . . .	98
3.4.1	Choix du VER . . . . .	99
3.4.2	Variation du taux de fibres . . . . .	100
3.4.2.1	Influence du facteur de forme . . . . .	103
3.4.3	Perméabilité multi-échelles d'un renfort . . . . .	104
3.5	Conclusion . . . . .	107

<b>4</b>	<b>Les phénomènes de capillarité</b>	<b>111</b>
4.1	Modélisation numérique de l'interface . . . . .	111
4.1.1	Introduction sur les méthodes multiphasiques numériques . . . . .	111
4.1.1.1	Les méthodes lagrangiennes et lagrangiennes-eulériennes . . . . .	112
4.1.1.2	Les méthodes eulériennes . . . . .	112
4.1.2	Transport de la Level Set . . . . .	115
4.2	La tension de surface . . . . .	117
4.2.1	Introduction à la tension superficielle . . . . .	117
4.2.2	Prise en compte numérique de la tension de surface . . . . .	120
4.2.2.1	La méthode Continuum Surface Force (CSF) . . . . .	120
4.2.2.2	La méthode Continuum Surface Stress (CSS) . . . . .	121
4.2.2.3	Le problème des courants parasites . . . . .	122
4.2.3	Les temps caractéristiques . . . . .	124
4.3	Prise en compte de la tension de surface dans notre formulation éléments finis . . . . .	126
4.3.1	La méthode CSF . . . . .	126
4.3.2	La méthode CSS . . . . .	128
4.4	Validation du solveur de Stokes avec plusieurs phases . . . . .	128
4.4.1	Solution analytique de l'écoulement de Poiseuille diphasique . . . . .	129
4.4.2	Les résultats numériques . . . . .	130
4.5	Validation de la prise en compte de la tension de surface . . . . .	133
4.5.1	La méthode CSF . . . . .	135
4.5.2	La méthode CSS . . . . .	139
4.6	Conclusion . . . . .	140
<b>5</b>	<b>Angle de contact et déplacement de la ligne triple</b>	<b>143</b>
5.1	Bibliographie . . . . .	143
5.1.1	Introduction au mouillage . . . . .	143
5.1.1.1	Le mouillage . . . . .	143
5.1.1.2	La dynamique du mouillage . . . . .	145
5.1.2	La prise en compte numérique de l'angle de contact . . . . .	149
5.1.2.1	L'angle statique . . . . .	150
5.1.2.2	L'angle dynamique et l'hystérésis . . . . .	150
5.1.3	Simulation numérique du déplacement de la ligne de contact . . . . .	151
5.2	Méthodes numériques implémentées . . . . .	152
5.2.1	Prise en compte de l'angle de contact statique dans Cimlib . . . . .	152
5.2.1.1	Le calcul de l'angle de contact . . . . .	152
5.2.1.2	Algorithme de calcul avec angle de contact imposé . . . . .	154
5.2.2	Implémentation de la condition de Navier . . . . .	156
5.3	Validations numériques . . . . .	158
5.3.1	Validation de la prise en compte de l'angle de contact statique . . . . .	158
5.3.1.1	Le cas 2D . . . . .	158
5.3.1.2	Le cas 3D . . . . .	160
5.3.2	Validation de la condition de Navier . . . . .	165
5.3.2.1	Cisaillement simple . . . . .	165

5.3.2.2	Écoulement de Couette cylindrique avec une condition de Navier . . . . .	167
5.4	Conclusion . . . . .	169
<b>Conclusion</b>		<b>171</b>
<b>A Formulation éléments finis et stabilisation de la méthode CSS</b>		<b>179</b>
A.1	Formulation éléments finis . . . . .	179
A.2	Stabilisation de la formulation . . . . .	180
<b>B Résultats de validation de la méthode CSF avec la loi de Laplace</b>		<b>183</b>
B.1	Norme $L2$ de l'erreur . . . . .	183
B.1.1	La vitesse . . . . .	183
B.1.2	La pression . . . . .	186
B.2	Norme $max$ de l'erreur . . . . .	187
B.2.1	La vitesse . . . . .	187
B.2.2	La pression . . . . .	187
<b>C Résultats de validation de la méthode CSS avec la loi de Laplace</b>		<b>191</b>
C.1	Norme $L2$ de l'erreur . . . . .	191
C.1.1	La vitesse . . . . .	191
C.1.2	La pression . . . . .	192
C.2	Norme $max$ de l'erreur . . . . .	195
<b>Bibliographie</b>		<b>199</b>

# Nomenclature

$\alpha$	Fonction distance
$\tilde{\alpha}$	Fonction distance modifiée pendant la ré-initialisation
$\beta$	Coefficient de glissement de Navier
$\gamma$	Coefficient de tension de surface
$\gamma_{lg}$	Coefficient de tension de surface entre le liquide et le gaz
$\gamma_{sg}$	Coefficient de tension de surface entre le solide et le gaz
$\gamma_{sl}$	Coefficient de tension de surface entre le solide et le liquide
$\bar{\delta}_1$	Distance moyenne entre les fibres
$\delta$	Demi-distance entre les fibres
$\delta_l$	Fonction Dirac lissée
$\delta_{hex}$	Distance entre les fibres pour un arrangement triangulaire
$\delta_{min}$	Distance minimale entre les fibres
$\epsilon(\vec{v})$	Tenseur des vitesses de déformation
$\varepsilon$	Inverse de la taille de maille de fond
$\zeta$	Coordonnée dans l'espace de référence
$\eta$	Viscosité dynamique
$\eta_f$	Viscosité du fluide
$\eta_s$	Viscosité solide
$\theta$	Angle de contact
$\theta_a$	Angle d'avancée
$\theta_r$	Angle de reculée
$\kappa$	Courbure d'une interface
$\xi$	Coordonnée dans l'espace de référence
$\rho$	Densité
$\varrho$	Inverse de la taille de maille dans la direction de l'anisotropie

$\sigma$	Tenseur des contraintes
$\tau$	Tortuosité
$\Phi$	Porosité
$\phi_b$	Fonction de forme pour la bulle (stabilisation du MINI-élément)
$\phi_i$	Fonction de forme du nœud $i$
$\phi_{STI}$	Fonction de forme de la bulle sur le sous-triangle $i$
$\Omega$	Domaine de calcul éléments finis
$\Omega$	Volume du VER
$\Omega_f$	Domaine fluide en éléments finis
$\Omega_f$	Volume de fluide dans le VER
$\Omega_s$	Domaine solide éléments finis
$\Omega_s$	Volume solide dans le VER
$\hat{\Omega}$	Élément de référence
$a$	Demi-grand axe pour des fibres elliptiques
$a$	Rayon des fibres
$A_p$	Coefficient de pénalisation
$A_{canal}$	Aire de la section d'écoulement dans un canal
$A_{meche}$	Aire de la section d'écoulement dans une mèche
$b$	Rayon du domaine cylindrique autour de la fibre dans les modèles de cellule
$C$	Distance réelle parcourue dans le milieu poreux par le fluide
$c$	Fonction couleur utilisée pour donner la fraction de phase
$d$	Diamètre des fibres
$d$	Distance à l'interface
$D_H$	Diamètre hydraulique équivalent
$d_p$	Diamètre des particules d'un milieu granulaire
$e$	Demi-épaisseur de variation d'une grandeur autour d'une interface (zone de mélange)
$e$	Demi-épaisseur du Dirac lissé
$e_h$	Erreur entre une fonction analytique et une solution calculée
$\vec{F}$	Forces volumiques
$\vec{f}_d$	Force de trainée
$f$	Facteur de friction de Fanning

$g$	Accélération de la pesanteur
$\mathcal{H}^1$	Espace de Sobolev
$H$	Dimension d'un écoulement
$h$	Taille de maille
$H_B$	Hauteur de l'écoulement de Brinkman
$H_g$	Hauteur de la goutte
$h_i$	Taille de maille dans la direction $i$
$H_{meche}$	Hauteur de la mèche
$\mathbb{I}$	Tenseur identité
$\mathbb{I}_f$	Fonction caractéristique du fluide
$\mathbb{I}_s$	Fonction caractéristique du squelette solide
$\mathbb{J}$	Jacobien de la transformation de l'élément de référence vers l'élément réel
$\mathcal{K}$	Élément d'un maillage éléments finis
$K$	Perméabilité (tenseur ou scalaire)
$k_0$	Facteur de forme
$K_s$	Perméabilité mésoscopique obtenue pour des mèches imperméables
$K_{\parallel}$	Perméabilité d'un écoulement parallèle à l'axe des fibres (perméabilité longitudinale)
$K_{\perp}$	Perméabilité d'un écoulement perpendiculaire à l'axe des fibres (perméabilité transverse)
$K_{D-W}$	Perméabilité longitudinale lorsque les fibres se touchent, basée sur la relation de Darcy-Weisbach
$K_{hex}$	Perméabilité pour un arrangement triangulaire de fibres
$K_{tri}$	Perméabilité pour un arrangement triangulaire de fibres
$\mathcal{L}^2$	Espace vectoriel des fonctions de carrés sommables
$L$	Distance linéaire
$L$	Longueur de l'écoulement
$\mathcal{M}$	Tenseur de métrique utilisée pour l'adaptation de maillage
$\vec{n}$	Vecteur normal
$N$	Nombre de nœud sur un élément
$\tilde{p}$	Champ de pression analytique
$p$	Pression
$p_h$	Pression discrète

$Q$	Debit
$q$	Fonction test pour la pression
$\mathcal{R}$	Matrice de rotation
$R$	Rayon de la goutte
$r'$	Rayon de courbure d'un interface
$r''$	Rayon de courbure d'un interface
$R_i$	Rayon du cylindre intérieur dans l'écoulement de Couette cylindrique
$R_o$	Rayon du cylindre extérieur dans l'écoulement de Couette cylindrique
$r_o$	Demi-axe, dans la direction perpendiculaire à l'écoulement, d'une fibre elliptique
$r_p$	Demi-axe, dans la direction de l'écoulement, d'une fibre elliptique
$R_{init}$	Rayon initial de la goutte
$S$	Terme source dans l'équation de continuité
$dS$	Élément de surface de la fibre dans le VER
$S$	Surface de la goutte
$s$	Facteur de forme d'une fibre
$S(\tilde{\alpha})$	Signe de la fonction distance
$S_0$	Surface spécifique
$S_e$	Paramètre d'étalement
$S_{init}$	Surface initiale de la goutte
$\mathbb{T}$	Tenseur de tension de surface pour la méthode CSS
$\tilde{t}$	Temps fictif utilisé pour la ré-initialisation
$\vec{t}$	Vecteur tangent
$\vec{u}$	Vitesse du squelette solide du milieu poreux
$U$	Vitesse de la ligne de contact
$\vec{v}$	Vecteur vitesse
$\vec{v}_D$	Vitesse de Darcy
$\vec{v}_h$	Vitesse discrète
$v_\tau$	Vitesse tangentielle à la surface solide.
$V_f$	Taux de fibres
$v_x$	Composante selon l'axe $x$ de la vitesse
$v_z$	Composante $z$ de la vitesse
$\vec{w}$	Fonctions tests pour la vitesse

$w_i$	Vitesse angulaire du cylindre intérieur dans l'écoulement de Couette cylindrique
$w_o$	Vitesse angulaire du cylindre extérieur dans l'écoulement de Couette cylindrique
$W_{meche}$	Largeur de la mèche
$\vec{x}$	Vecteur des coordonnées



# Introduction

Les objectifs de ces dernières années dans l'industrie tendent vers une meilleure maîtrise des coûts de production par l'utilisation de nouveaux matériaux, des cycles de fabrications plus courts, un niveau de performance et de sécurité plus élevés et un meilleur respect de l'environnement. Les cycles de fabrication plus courts sont obtenus par une maîtrise accrue, une optimisation des paramètres de fabrication et une meilleure maîtrise de la qualité des pièces produites. De meilleurs niveaux de performance peuvent également être obtenus grâce à la maîtrise de la qualité des pièces et à l'utilisation de matériaux innovants. Enfin, la gestion de l'impact environnemental est possible par l'allègement des structures qui induit une réduction de la consommation énergétique des appareils, ainsi que par une meilleure gestion des coûts matière liés à la fabrication des pièces utilisées pour l'assemblage de ces appareils. Il en est de même pour les industries des secteurs nautiques et éoliens.

Les matériaux composites répondent parfaitement à ces problématiques. Ils permettent bien évidemment d'obtenir des pièces dont les propriétés mécaniques et physiques sont intéressantes. Leurs méthodes de fabrication permettent, de plus, l'intégration de fonctionnalités nouvelles. Bien que les matériaux composites soient de plus en plus utilisés, et dans un nombre grandissant de secteurs industriels, c'est principalement dans l'aéronautique, le nautique et l'éolien que les évolutions sont notables par la nécessité d'utiliser des pièces de dimensions de plus en plus grandes et de géométries de plus en plus complexes. Cela provoque de profonds changements dans l'économie du matériau composite. Les sous-traitants ne peuvent plus se contenter de seulement fabriquer des pièces composites, mais doivent être à même de proposer de nouvelles solutions, de participer à la conception en amont des pièces composites et de transférer rapidement les technologies issues de la recherche à leurs lignes de production. De plus, concernant les enjeux environnementaux, les matériaux composites sont sujet à des recherches poussées, visant à remplacer certaines résines dangereuses et polluantes, par d'autres donnant au matériau final les mêmes propriétés, tout en conservant les lignes de production existantes. De même, la simplification des méthodes de fabrication et une meilleure maîtrise des paramètres procédés permettent des économies d'énergie et la réduction des rejets de matières polluantes.

La simulation numérique permet de réduire l'utilisation systématique de matériaux, de tester la faisabilité d'intégration de nouvelles fonctionnalités et d'optimiser les méthodes de fabrication. De plus, cela permet la prédiction de défauts et donc une meilleure qualité de fabrication, réduisant ainsi la quantité de rebuts, de matériaux et d'énergie gaspillée.

L'apport de la simulation numérique se fait à la fois dans la partie structurale, avec l'utilisation de méthodes numériques adaptées à la mécanique des fluides et dans la partie

mise en forme, par l'étude des déformations du réseau fibreux lors du drapage, par exemple.

## Contexte

Cette thèse est une composante du projet *LCM3M* (Liquid Composite Molding, Micro-Meso-Macro) *Procédés LCM nouveaux - Analyse multi-échelles*, projet financé par l'Agence Nationale pour la Recherche. Il regroupe des laboratoires et des industriels de compétences diverses, dans une problématique de compréhension des mécanismes multi-physiques intervenant dans la fabrication de matériaux composites par des procédés de type Liquid Composite Molding.

Les objectifs de ce projet sont d'avoir une meilleure compréhension des couplages hydro-mécaniques et thermo-physico-chimiques qui interviennent dans les procédés de type LCM et de proposer un modèle numérique multi-échelles et multi-physiques. Ce dernier étant développé afin d'optimiser les procédés de fabrication des pièces composites et de mieux maîtriser les phénomènes physiques intervenant dans la qualité de la pièce.

La mise en place de démonstrateurs à l'échelle du laboratoire permet de visualiser les écoulements dans le renfort fibreux et de visualiser les déformations de ce renfort lors de la mise en place du moule. Ces démonstrateurs permettent également la visualisation du phénomène de création de micro-vides et de macro-vides. Cela apporte une meilleure compréhension de ces phénomènes et permet de valider le modèle numérique final.

L'un des objectifs du projet est le développement de trois nouveaux procédés LCM permettant d'obtenir :

- des matériaux 3D non périodiques,
- des formes non développables,
- des formes axisymétriques et des matériaux ablatifs.

Les matériaux ablatifs sont des matériaux qui se décomposent sous l'effet d'une forte température. Utilisés dans les tuyères, leur décomposition permet d'évacuer la chaleur et donc de garder un bon maintien du renfort réfractaire en carbone ou en silice [DC02]. Les matériaux non développables sont des matériaux dont la forme ne peut être étendue pour former une surface plane sans qu'elle soit coupée. L'image la plus simple est une sphère, qui ne peut être étendue sans être découpée, alors qu'un cylindre peut l'être. Les matériaux 3D non périodiques sont de plus en plus courants, grâce à la fabrication de renforts sur mesure permettant, par exemple, de faire varier le nombre de couches de tissus le long de la pièce et ainsi de lui donner une épaisseur différente sur toute sa longueur.

Les différents partenaires industriels du projet sont les suivants : EADS France Innovation Works, SNECMA, ROXEL, HEXCEL et TENSYL. Ils ont principalement pour rôle de définir les axes industriels du projet et les problématiques scientifiques à résoudre, de contrôler l'industrialisation des outils développés et de fournir les matériaux utilisés pour les études.

Les partenaires académiques du projet sont les suivants : ONERA, PRISME, LAMCOS, LOMC et CEMEF (Armines). Ils ont pour rôle d'étudier les différents aspects des problématiques industrielles, telles que l'identification expérimentale du comportement mécanique des renforts complexes pour le PRISME, la simulation numérique du procédé

et de la mise en forme des renforts pour le LAMCOS et la modélisation des couplages thermo-hydro-mécanique des milieux fibreux pour le LOMC.

Le rôle du CEMEF est de mettre en place un Volume Élémentaire Représentatif (VER) numérique à l'échelle microscopique, en utilisant la méthode des éléments finis, afin d'étudier la perméabilité des renforts, ainsi qu'un VER à l'échelle mésoscopique, avec un couplage Stokes-Darcy. Les écoulements non saturés sont également modélisés à l'échelle microscopique.

## Problématiques traitées dans cette thèse

Devant l'allongement des pièces composites et l'augmentation de leur complexité géométrique, la maîtrise empirique des paramètres de fabrication pour contrôler les défauts matière deviennent insuffisants.

Le problème principal rencontré concerne l'apparition de micro-vides et de macro-vides dans la pièce finale. Il faut différencier ces phénomènes des problèmes d'apparition de zones sèches, c'est-à-dire de grandes parties du renfort qui ne sont pas imprégnées lors de l'injection. L'apparition de ces zones sèches est bien prédite par les outils actuels de simulation modélisant les écoulements à l'échelle macroscopique. L'ajout ou le déplacement d'évents sur le moule permet souvent de s'affranchir de ce problème et la simulation numérique permet de concevoir les moules de manière très efficace.

Ce que nous désignons micro-vide et macro-vide correspond à des bulles d'air respectivement à l'intérieur des mèches et entre les mèches. Ces bulles sont piégées lors de l'imprégnation et ne sont pas évacuées par l'écoulement du polymère. Ce ne sont pas des bulles de gaz résiduels de la réticulation. Ces porosités sont principalement dues à l'apparition de chemins préférentiels pour l'écoulement. La cause de ces chemins préférentiels empruntés par le fluide peut être la modification de la perméabilité du renfort à cause de la modification des taux de fibres lors de la compaction à la fermeture du moule ou à la modification du renfort lors de son placement dans le moule (déplacement relatif des mèches les unes par rapport aux autres par cisaillement, par exemple) ou encore à cause des mouvements relatifs des mèches lors de l'écoulement.

Afin de pouvoir prendre en compte ces modifications à petite échelle, il est nécessaire de connaître les modifications de la perméabilité qu'elles induisent. Ceci est indispensable pour pouvoir estimer, lors de simulations macroscopiques, le taux de présence de ces défauts. Ainsi, la connaissance des déformations et des déplacements relatifs des mèches, lors du drapage du renfort dans le moule, ainsi que l'estimation du taux de fibres permettraient de simuler les écoulements à petite échelle afin d'obtenir la perméabilité résultante des mèches. Cette dernière est utilisée à l'échelle mésoscopique pour simuler les écoulements à l'échelle des mèches. Cela nous permet d'obtenir la perméabilité d'un VER du renfort pour l'utiliser dans un code de simulation à l'échelle macroscopique.

Ce dernier point est l'un des sujets de cette thèse. Le calcul de la perméabilité à l'échelle microscopique est fait grâce à une méthode d'immersion de domaines. En effet, les simulations d'écoulements utilisent de manière très générale des codes éléments finis en formulation eulérienne ou de volumes finis. L'utilisation d'une méthode d'immersion de domaines permet de représenter les différents objets grâce à des fonctions permettant de repérer les interfaces entre les différents sous-domaines.

Le principal apport de cette thèse réside dans la mise en place des méthodes d'homogénéisation pour le calcul de la perméabilité sur un VER à l'échelle microscopique et à l'échelle mésoscopique. Les principaux résultats sont des validations de la méthode en utilisant des arrangements réguliers, mais totalement différents de la réalité, où les fibres sont distribuées généralement très aléatoirement dans une mèche. Les méthodes mises en place sont utilisables dans toutes les configurations de fibres et sont actuellement utilisées dans des simulations contenant des distributions aléatoires.

La mise en place de modèles numériques permettant de calculer les écoulements à l'échelle mésoscopique grâce à un couplage entre les équations de Stokes (écoulements entre les mèches) et la loi de Darcy (écoulements à l'intérieur des mèches) a été effectuée. Les premiers résultats prennent en compte une perméabilité scalaire, même si la perméabilité calculée sur les VER microscopiques est tensorielle.

Les problématiques de modification de la structure des mèches et des taux de fibres lors de la mise en place du renfort dans le moule sont traitées par le LAMCOS, un partenaire du projet.

L'apparition des micro-porosités semble se faire dans la zone de saturation partielle du renfort en cours d'imprégnation. Après leur formation, les écoulements dans la zone saturée peuvent les évacuer. Ce n'est cependant pas toujours le cas. Afin de comprendre l'apparition de ces micro-vides, il est nécessaire de pouvoir simuler numériquement les phénomènes auxquels les écoulements du fluide sont soumis lors de l'imprégnation à l'échelle microscopique. De plus, leur simulation permet de les prendre en compte lors de l'homogénéisation, par les effets qu'ils induisent sur les champs de vitesse et de pression.

Les travaux traités dans cette thèse se regroupent dans deux problématiques. Dans un premier temps, nous nous intéressons au calcul de la perméabilité d'un VER à l'échelle microscopique, c'est-à-dire contenant fluide et fibres. Nous présentons également les premiers travaux à l'échelle mésoscopique, c'est-à-dire pour des VER contenant fluide et mèches. Dans un second temps, nous nous intéressons au cas non saturé, c'est-à-dire lorsque nous prenons en compte la présence d'une troisième phase (gazeuse) et les phénomènes de tension de surface. Ces deux problématiques semblent disjointes mais se regroupent lorsque l'on considère les phénomènes physiques intervenant dans la formation des micro-porosités dans la zone partiellement saturée du renfort. Cependant, ces deux problématiques n'ont pas été regroupées durant cette thèse.

Tous les développements numériques qui ont eu lieu lors de cette thèse ont été faits dans la librairie CIMLIB. Cette librairie regroupe une grande partie des développements du laboratoire, mis en commun pour les autres études. Cette librairie est hautement parallèle et permet de facilement implémenter de nouvelles fonctionnalités. L'utilisation du langage objet C++ permet de segmenter les différentes entités d'un calcul éléments finis afin de pouvoir ajouter de nouvelles fonctionnalités sans compromettre les développements en amont. La librairie MPICH2 est utilisée pour le parallélisme et la librairie PETSC pour la résolution numérique des systèmes linéaires. Les maillages sont créés et adaptés grâce au mailleur topologique MTC, également développé au laboratoire et basé sur les simplexes (triangles et tétraèdres). La méthode éléments finis utilisée pour résoudre les écoulements est une méthode éléments finis mixtes linéaires en P1+/P1. Ainsi, que ce soit les développements pour le calcul de perméabilité et le couplage Stokes-Darcy ou les

développements pour la prise en compte de la tension de surface, tous deux utilisent et sont inclus dans la librairie CIMLIB. L'utilisation commune des développements de ces deux problématiques sera aisée pour les études futures.

Le manuscrit est décomposé de la manière suivante. Dans le chapitre 1, les renforts tissés et le procédé de Resin Transfer Molding (RTM) sont présentés. L'apparition de porosités dans la pièce composite finale est illustrée par des photographies tirées de la littérature. Des généralités théoriques sur les écoulements (Stokes et Darcy) sont développées, ainsi que la technique d'homogénéisation utilisée pour calculer la perméabilité. Enfin, l'aspect multi-échelles des renforts fibreux est rapidement abordé.

Dans le chapitre 2, les méthodes numériques utilisées sont expliquées. Nous commençons par détailler la méthode d'immersion de domaines utilisée pour représenter les différents milieux dans le domaine de calcul. Pour cela, nous présentons les techniques de *mélange* des grandeurs physiques de part et d'autre des interfaces diffuses, puis les techniques d'adaptation de maillage pour une meilleure discrétisation des interfaces et enfin la technique d'immersion de maillage qui permet de calculer les interfaces à partir d'un maillage. Cette dernière technique est illustrée sur un exemple de renfort. Nous expliquons la méthode éléments finis utilisée pour la prise en compte de ces différents domaines en présentant la formulation et la technique de stabilisation utilisée. Nous développons une modification de la méthode de stabilisation afin de contourner un problème de stabilisation spécifique à la technique d'immersion de domaines. Nous présentons ensuite le couplage Stokes-Darcy que nous avons effectué en implémentant un modèle numérique éléments finis de l'équation de Brinkman. Enfin, nous présentons des résultats de validation de la méthode d'immersion de domaines en 2D et en 3D sur des écoulements de Poiseuille et de Couette dont nous connaissons les solutions analytiques. Cela nous permet également de faire une étude de sensibilité aux paramètres numériques. Nous présentons finalement les résultats de validation du couplage Stokes-Darcy.

Dans le chapitre 3, nous détaillons des lois de la littérature concernant le calcul de la perméabilité à différentes échelles, puis nous présentons la méthode utilisée pour la calculer dans nos modèles numériques. Après une présentation de validation des calculs de perméabilité en utilisant des écoulements de Poiseuille et après avoir déterminé la taille du VER, nous comparons notre méthode avec des lois analytiques de la littérature à l'échelle microscopique en 2D et 3D, pour des écoulements parallèles et transverses à l'axe des fibres, en faisant varier le taux de fibres. Nous exposons une première étude rapide sur l'effet du facteur de forme des fibres sur la perméabilité, puis nous montrons les premiers résultats obtenus à l'échelle mésoscopique en comparant la perméabilité d'un renfort tissé dont les mèches sont imperméables avec celle obtenue pour des mèches perméables dont nous faisons varier la perméabilité.

Le chapitre 4 présente les phénomènes de capillarité pour deux phases non miscibles. Dans un premier temps, nous présentons une étude bibliographique sur les méthodes de modélisation des interfaces en mouvement, suivie d'une description de la méthode Level Set, que nous utilisons au laboratoire. Nous présentons ensuite la physique intervenant dans les phénomènes de tension de surface avant de présenter deux méthodes de prise en compte numérique de ces phénomènes que l'on trouve dans la littérature. Nous présentons une étude bibliographique sur les courants parasites apparaissant dans la modélisation eulérienne de la tension de surface, suivie du choix des temps caractéristiques associés

aux phénomènes capillaires. Nous détaillons l'utilisation que nous faisons de ces méthodes dans notre formulation éléments finis. Nous donnons, enfin, des résultats de validation, en commençant par une validation rapide de la résolution d'écoulements multi-phasiques avec notre formulation. Nous validons notre utilisation de la méthode *Continuum Surface Force* et montrons que la méthode *Continuum Surface Stress* que nous avons implémentée ne donne pas de résultats suffisamment précis.

Le chapitre 5 est consacré aux phénomènes capillaires pour deux phases fluides et une phase solide, c'est-à-dire pour les phénomènes de mouillage dont nous donnons une introduction physique. Nous présentons la problématique de l'angle de contact et le déplacement de la ligne de contact entre les trois phases. Nous faisons ensuite une étude bibliographique sur la prise en compte de l'angle de contact dans les simulations numériques et sur la modélisation des phénomènes de glissement de la ligne triple. Nous détaillons l'implémentation d'une méthode de prise en compte de l'angle de contact et l'implémentation de la condition aux limites de Navier sur une frontière et sur une interface représentée par une Level Set. Finalement, nous présentons des résultats de validation pour la méthode de prise en compte de l'angle de contact et pour l'imposition de la condition aux limites de Navier sur une frontière et en volume.

# Chapitre 1

## Généralités

Ce chapitre nous permet d'introduire des notions de bases, comme par exemple le principe du procédé Resin Transfer Molding (RTM) qui consiste à imprégner un renfort tissé placé dans un moule et les modèles physiques des écoulements. Dans un premier temps, nous présentons les renforts utilisés dans le procédé RTM avant d'introduire le procédé lui-même. Cela nous permet ensuite de mieux comprendre les phénomènes et les difficultés d'imprégnation. Nous introduisons les équations qui permettent de modéliser les écoulements entre et dans les mèches, puis les techniques d'homogénéisation qui permettent de passer de l'échelle microscopique à l'échelle mésoscopique ou macroscopique. Nous finissons par une présentation de différents modèles numériques développés dans la littérature pour étudier les écoulements dans les renforts tissés.

### 1.1 Les renforts tissés

Les fibres de verre, de carbone, ou de matériaux organiques sont assemblées sous forme de mèches. Ces mèches peuvent contenir plusieurs milliers à dizaines de milliers de fibres dont le diamètre est compris entre 10 et 20 nm en général. Le tissage de ces mèches nous donne le renfort qui est utilisé pour renforcer la matrice du matériau composite.

Différents types de renforts peuvent être utilisés, selon le coût et les propriétés mécaniques souhaitées pour l'application du matériau final. Nous ne parlerons pas des mats qui sont composés de fibres orientées aléatoirement, puisque nous nous intéressons aux tissus, donc aux fibres longues tissées. Le plus simple des renforts est l'UD (unidirectionnel) dans lequel les mèches sont assemblées de façon à être toutes parallèles. Ce renfort n'est cependant pas un tissé, puisque les mèches, placées côte à côte, sont assemblées et maintenues par un fil de couture. Quelques fois, plusieurs couches d'UD sont superposés, orientées différemment et cousues ensemble (ce sont des renforts *NCF* pour *non-crimp fabrics*).

Le tissage est une technique ancienne pour fabriquer des textiles. Des fils parallèles sont fixés sur le métier à tisser. Ce sont les  *fils de chaîne* . Ensuite, on insère les  *fils de trame*  entre les fils de chaîne perpendiculairement à ceux-ci. La manière dont les fils de chaîne et de trame s'entrecroisent est appelée l'armure [Car06].

Le textile le plus simple que l'on obtienne dans ce type de tissage est le taffetas, pour lequel les fils de trame passent alternativement au dessus puis en dessous de chaque fil

de chaîne. D'autres types d'armures plus ou moins complexes peuvent être créés, comme les sergés et les satins par exemple (figure 1.1). Les différentes armures vont donner aux tissus des propriétés mécaniques différentes. Les mèches qui présentent dans le tissu une ondulation due au passage successif au dessus et en dessous d'autres mèches auront, dans un premier temps, tendance à se déformer facilement, jusqu'à ce que les contacts entre fibres deviennent suffisamment importants pour rigidifier le tissu. De plus, on peut aussi avoir un réarrangement des fibres dans les mèches.

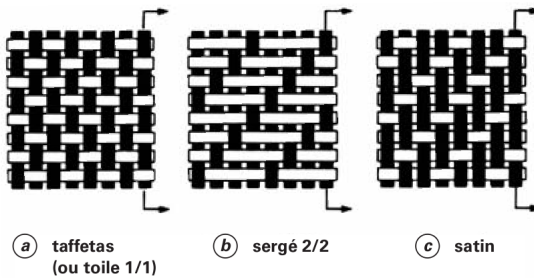


FIGURE 1.1 – Exemples d'armures de textiles 2D [Car06].

Il existe également des tissus 3D qui peuvent être des tissus multicouches avec ondulation des fils, ou interlocks (figure 1.2), ou encore du tissage orthogonal comme celui développé par la société 3Tex [Nem03] (figure 1.3). Dans ce dernier, les fils de chaîne et de trame sont droits et où la première et la dernière nappe de fil de chaîne sont utilisées dans la troisième direction.

Il est également possible de faire varier le nombre de couches et donc l'épaisseur de la préforme, afin de l'adapter à l'épaisseur de la pièce finale [DL09]. Ainsi, le matériau est continu dans l'épaisseur.

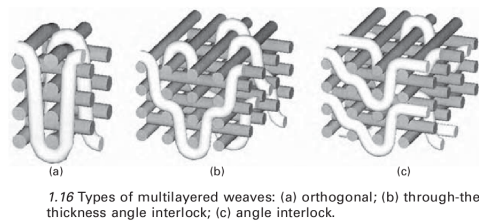


FIGURE 1.2 – Textiles 3D (Interlock) [Lon05].

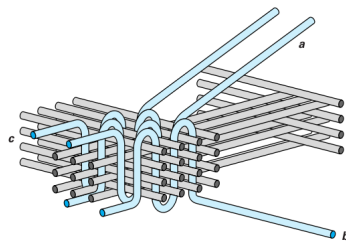


FIGURE 1.3 – Textiles 3D orthogonal de 3Tex [Nem03].

## 1.2 Le procédé RTM

Le procédé RTM fait partie de la famille des procédés LCM. Ils consistent en l'imprégnation d'un renfort tissé par un polymère. Après réticulation, nous obtenons une pièce composite dans laquelle la matrice est renforcée par les fibres du renfort. Les procédés de cette famille peuvent se diviser en deux groupes [MS10], celui pour lequel le polymère est injecté sous pression et celui pour lequel le polymère s'écoule sous vide. Dans le premier cas, nous retrouvons le procédé RTM dans lequel le renfort est placé dans un moule rigide. Dans le second cas, nous retrouvons les procédés d'infusion dans lesquels le renfort est placé dans un moule semi-rigide, c'est-à-dire que l'un des côtés du moule est rigide et que l'autre côté du moule est une bâche plastique souple qui vient se plaquer sur le renfort lors de la mise sous vide.

Le procédé RTM permet d'obtenir des pièces composites ayant, en sortie de moule, un état de surface et un aspect très proches de la pièce finale. Très peu d'opérations d'usinage sont nécessaires pour obtenir la pièce finale en sortie de moule [DL09]. De plus, il est possible d'ajouter des inserts dans la pièce et de maîtriser les taux de fibres. Enfin, les pièces obtenues peuvent être de grande résistance, pour un poids très faible. Le coût de l'outillage nécessaire est relativement faible en comparaison avec d'autres procédés [NT03].

Le procédé se déroule de la manière suivante (figure 1.4) :

- mise en place du tissu dans le moule. Cette étape se fait à la main. Le tissu est soit placé à l'intérieur du moule de façon à épouser la forme de la pièce finale (drapage), soit préformé puis placé tel quel dans le moule. Le drapage ou le préformage vont modifier localement le taux de fibres et l'orientation des mèches les unes par rapport aux autres par des effets de cisaillement, de compression et de déformation ;
- le moule est ensuite fermé et une compression est appliquée au renfort. Cela va encore une fois modifier le taux de fibres, par compression du renfort ;
- le polymère est injecté dans le moule ;
- le moule est chauffé afin de faire réticuler le polymère ;
- après refroidissement, la pièce est éjectée.

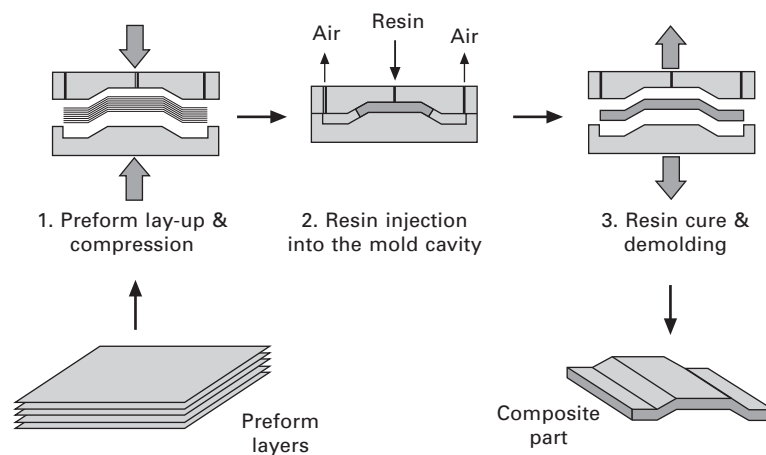
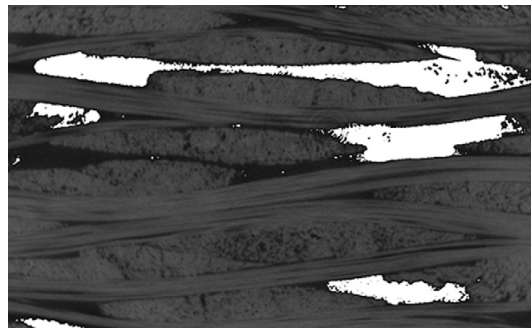


FIGURE 1.4 – Les trois étapes principales du procédé RTM [Lon05].

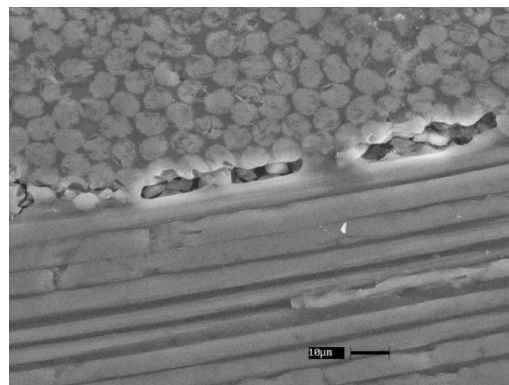
Lors du drapage ou lors du préformage du renfort, des phénomènes qui vont modifier les écoulements du polymère peuvent apparaître. Il peut se produire des ruptures de fibres lorsque les tensions sur les mèches sont trop fortes ou la formation de plis lorsque les angles de cisaillement sont trop importants. Ces modifications du renfort vont entraîner des variations plus ou moins grandes des taux de fibres et donc des variations des écoulements se produisant entre les mèches et dans les mèches. Ainsi, l'imprégnation va également être modifiée.

Le principal problème apparaissant dans l'utilisation du procédé RTM est la présence de zones sèches sur la pièce finale, c'est-à-dire de zones dans lesquelles le polymère ne s'est pas écoulé. Ce problème est très bien prédit par les outils de simulation actuels tel que PAM-RTM par exemple. Ces outils permettent d'optimiser la position des points d'injection et des événements afin d'éviter ces zones sèches.

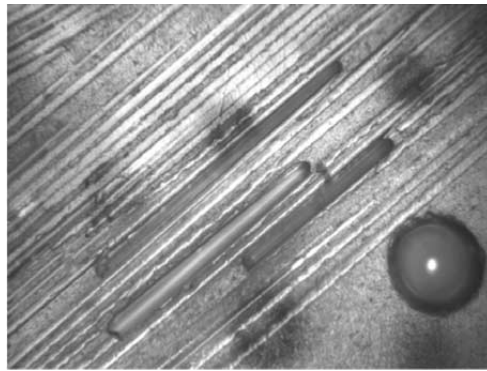
Un autre problème particulier, apparaissant pendant la phase d'injection du polymère, est la création de micro-porosités et de méso-porosités (figure 1.5, 1.6 et 1.7) dans la pièce finale. Ces micro-porosités apparaissent entre les mèches ou à l'intérieur des mèches, selon le régime d'écoulement dans lequel on se place. La présence de ces micro-porosités a une influence néfaste sur les qualités de tenue mécanique de la pièce composite finale [CESS06, CdACR01] (figures 1.8 et 1.9).



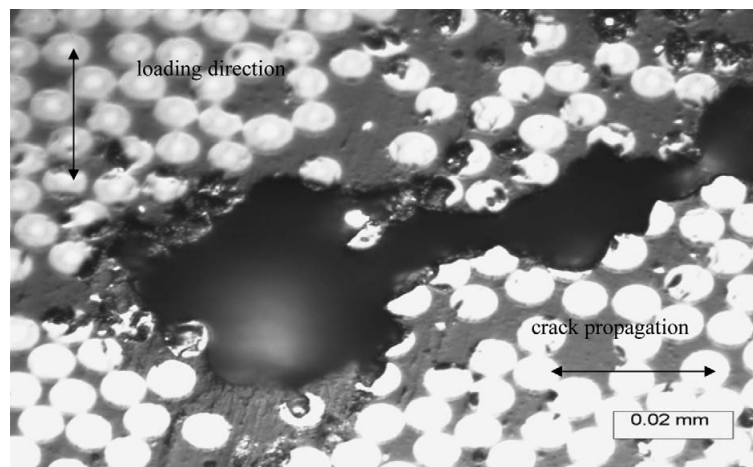
**FIGURE 1.5** – Section par microtomographie d'un renfort tissé avec la présence de méso-vides en blanc [SDB<sup>+</sup>07].



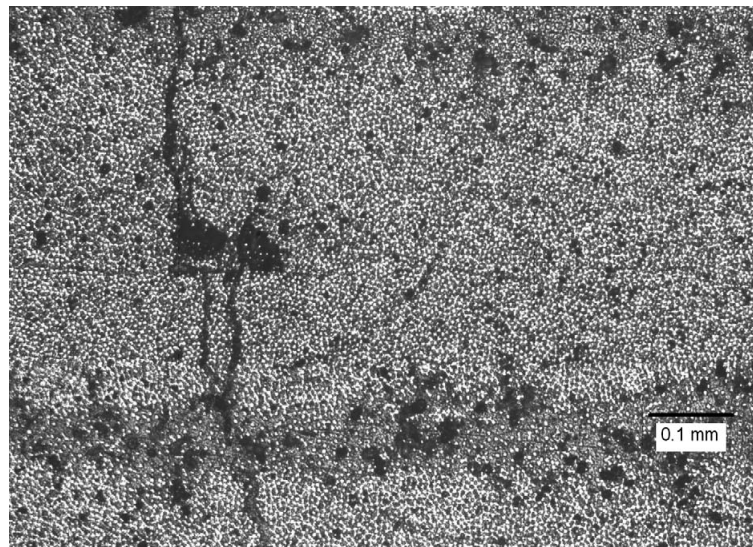
**FIGURE 1.6** – Micro-porosité au niveau du contact entre deux mèches d'orientation différentes [CdACR01].



**FIGURE 1.7** – *Micro-porosités, de forme allongée, visibles entre les fibres et méso-porosités, de forme plus sphérique, visibles en dehors des mèches [HAA05].*

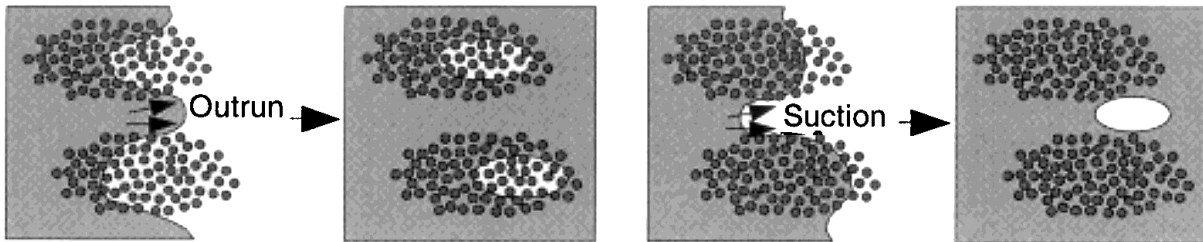


**FIGURE 1.8** – *Propagation de fissure due à la coalescence de micro-porosités. Les fibres sont en blanc et la matrice en gris clair [CESS06].*



**FIGURE 1.9** – *Fissure due à la fatigue s'initiant au niveau d'une porosité. Nous pouvons remarquer que les micro-porosités vont contrôler la propagation de la fissure. Les fibres sont en blanc, la matrice en gris clair et les vides en noir [CESS06].*

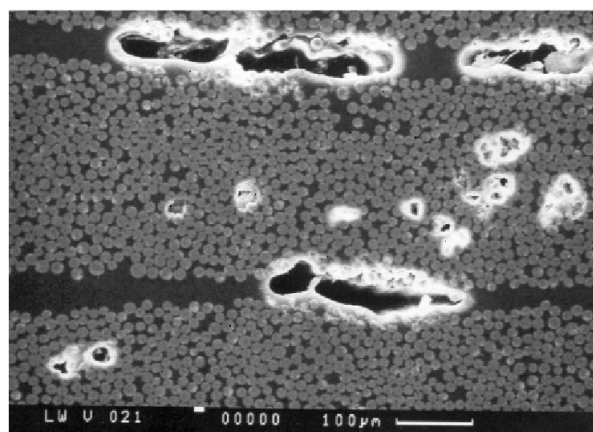
La présence de micro-porosités inter-mèches ou intra-mèche dépend principalement du régime d'écoulement que l'on retrouve lors de l'imprégnation (figure 1.10). Deux phénomènes sont en compétition. Le premier se produit lorsque le débit d'injection est relativement élevée. Dans ce cas, l'espace inter-mèches représente pour le fluide son chemin préférentiel. Il va totalement remplir cet espace inter-mèches avant de commencer à imprégner l'espace intra-mèche. Cela va favoriser la présence de micro-porosités intra-mèche.



**FIGURE 1.10** – Les deux types d'écoulement que l'on retrouve lors de l'imprégnation. En a) la pression d'injection est élevée. En b) elle est plus faible [CESS06].

Lorsque le débit d'injection est faible, les phénomènes capillaires deviennent importants. Ainsi, le fluide va avoir tendance à imprégner les mèches avant même de remplir l'espace inter-mèches. L'écoulement de l'intérieur des mèches vers l'extérieur va donc se produire en retard par rapport à l'imprégnation et provoquer la présence de bulles d'air entre les mèches qui formeront ces porosités.

Il faut toutefois bien se rendre compte que les deux phénomènes sont toujours présents et qu'il n'est pas facile de les contrôler. Souvent, les deux défauts se retrouvent dans la pièce finale (figure 1.11).



**FIGURE 1.11** – Section polie d'une pièce composite fabriquée par RTM. Les fibres sont en gris clair et la matrice en gris foncé. Les zones noires sont les vides. On remarque ici la présence à la fois de micro-porosités et de méso-porosités [FLJ03].

## 1.3 Modélisation des écoulements

L'imprégnation des renforts lors de l'injection est un problème d'hydrodynamique. Nous détaillons dans la suite les équations permettant de modéliser les écoulements.

### 1.3.1 Les équations de Navier-Stokes

L'application de la relation fondamentale de la dynamique [Bat67] permet d'écrire :

$$\rho \left[ \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \right] = \rho \vec{F} + \nabla \cdot \sigma \quad (1.1)$$

où  $\vec{v}$  est le vecteur vitesse du fluide,  $\sigma$  le tenseur des contraintes,  $\rho$  est la masse volumique et  $\vec{F}$  la somme des forces volumiques. L'introduction de la loi de comportement dans l'équation (1.1) permet de prendre en compte différents types de comportements de fluides. Dans le cas d'un fluide newtonien, la loi de comportement s'écrit :

$$\sigma = 2\eta\epsilon(\vec{v}) - p\mathbb{I} \quad (1.2)$$

où  $\eta$  est la viscosité dynamique (Pa·s),  $\epsilon(\vec{v}) = \frac{1}{2}(\nabla\vec{v} + {}^T\nabla\vec{v})$  est le tenseur des taux de déformation,  $p$  est la pression et  $\mathbb{I}$  est le tenseur identité. On obtient donc l'équation de Navier-Stokes pour la conservation de la quantité de mouvement :

$$\rho \left[ \frac{d\vec{v}}{dt} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right] = \rho \vec{F} + 2\eta \nabla \cdot \epsilon(\vec{v}) - \nabla p \quad (1.3)$$

Les vitesses d'écoulement étant très faibles dans le cas des procédés d'injection RTM, les termes d'inertie peuvent être négligés. De plus, nous allons négliger les forces volumiques. Nous pouvons ainsi écrire les équations de Stokes :

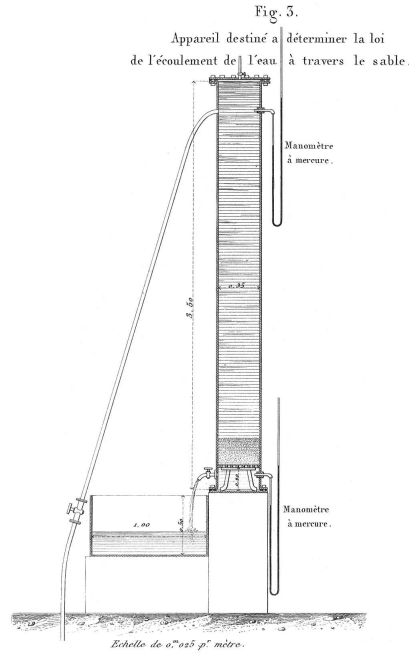
$$\begin{cases} 2\eta \nabla \cdot \epsilon(\vec{v}) - \nabla p = 0 \\ \nabla \cdot \vec{v} = 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

### 1.3.2 Loi de Darcy

La loi de Darcy a été développée empiriquement par Henry Philibert Gaspard Darcy et publiée en 1856 dans un ouvrage traitant des travaux concernant la distribution d'eau dans la ville de Dijon [Dar56]. Il est amusant de constater que dans cet ouvrage, Darcy a placé sa loi dans une note de fin d'ouvrage d'une quarantaine de pages traitant de la filtration et que le développement de sa loi ne prend qu'une seule page. Pour autant, Darcy aura amené une équation de base à la modélisation des écoulements dans les milieux poreux, toujours utilisée de nos jours.

#### 1.3.2.1 Développement de l'équation

Telles que présentées par Darcy dans son ouvrage [Dar56] en page 586, ses expériences ont consisté à faire s'écouler de l'eau à travers une colonne de sable. Son montage expérimental est présenté figure 1.12. Il a observé que le débit était relié linéairement à



**FIGURE 1.12** – *Le montage expérimental [Dar56] utilisé par Darcy pour déterminer sa loi.*

la différence de pression entre les orifices du tube de sable. De plus, le coefficient était dépendant du type de sable utilisé. De ces observations, il obtient la loi suivante :

$$q = k \frac{s}{e} (h + e) \quad (1.5)$$

avec  $e$  l'épaisseur de la couche de sable,  $s$  l'aire de sa section droite,  $k$  un coefficient dépendant de la perméabilité du sable (et de la viscosité du fluide) et  $q$  le volume d'eau. Cette loi empirique est unidimensionnelle.

Par la suite, la loi a été généralisée pour des écoulements tridimensionnels et pour des milieux poreux anisotropes :

$$\vec{v}_D = -\frac{K}{\eta} \nabla p \quad (1.6)$$

où  $\vec{v}_D$  est la vitesse de Darcy, c'est-à-dire la vitesse moyenne sur la section,  $K$  est le tenseur de perméabilité ( $\text{m}^2$ ) et  $\eta$  la viscosité dynamique ( $\text{Pa}\cdot\text{s}$ ). Pour des raisons de simplicité, nous écrirons, dans la suite,  $\vec{v}$  pour la vitesse de Darcy.

### 1.3.2.2 Domaine de validité

Il a très rapidement été observé par l'expérience que la relation linéaire entre la charge hydraulique et le débit n'était pas valide lorsque le débit augmente. De nombreux auteurs ont donc tenté de déterminer le domaine de validité de la loi de Darcy. Bear [Bea72], consacre une section de son ouvrage au domaine de validité de la loi de Darcy.

En faisant l'analogie entre un écoulement dans les pores d'un milieu poreux et l'écoulement dans un tube, il est possible de donner une limite en nombre de Reynolds. Dans le cas d'un écoulement dans un tube, le nombre de Reynolds est défini par :

$$\text{Re} = \frac{\rho v d}{\eta} \quad (1.7)$$

où  $v$  est la vitesse moyenne du fluide,  $d$  le diamètre du tube et  $\rho$  la masse volumique du fluide. Le nombre de Reynolds peut être calculé de la même manière dans le cas d'un milieu poreux, à la différence près que  $d$  est une dimension caractéristique de ce milieu poreux. C'est le choix de cette dimension caractéristique qui est délicat. Toujours par analogie aux écoulements dans les tubes, la grandeur  $d$  devrait être caractéristique du canal dans lequel s'écoule le fluide. Cependant, cette dimension n'est pas facile à obtenir pour les milieux poreux (sauf dans le cas d'une structure régulière parfaitement définie). Pour des raisons de commodité, de nombreux auteurs utilisent le diamètre des grains (dans le cas des milieux granulaires). D'autres préfèrent utiliser la perméabilité, en choisissant  $d = \sqrt{K/\Phi}$  ou  $d = \sqrt{K}$ , où  $K$  est la perméabilité et  $\Phi$  la porosité du milieu (voir les auteurs cités dans l'ouvrage de Bear [Bea72] section 5.3, page 125).

De manière générale, il est accepté que la loi de Darcy soit valide jusqu'à un nombre de Reynolds critique, basé sur la taille de grains, compris entre 1 et 10. Nous pouvons considérer, étant donné les viscosités des résines utilisées pour les procédés RTM et les vitesses d'injection, que le nombre de Reynolds sera toujours bien inférieur à l'unité.

### 1.3.2.3 Les extensions de la loi de Darcy

La loi de Darcy ne prend pas en compte certains phénomènes physiques. Ainsi, plusieurs extensions ont été développées dans la littérature.

Brinkman a développé une extension permettant de prendre en compte les effets visqueux qui apparaissent dans le cas d'écoulements confinés et les écoulements dans les milieux de porosité élevée. Il a donc ajouté une contribution de dissipation visqueuse à Darcy, sous la forme d'un Laplacien de la vitesse :

$$\nabla p = -\frac{\eta}{K}\vec{v} + \eta'\Delta\vec{v} \quad (1.8)$$

où  $\eta'$  est une viscosité modifiée. Cette loi permet notamment d'introduire la condition aux limites de non-glissement aux parois grâce à l'introduction du laplacien dans l'équation.

Forchheimer a ajouté la contribution des termes d'inertie dans l'équation de Darcy. En effet, une déviation à la loi de Darcy est observée dans la zone de transition entre les écoulements laminaires et turbulents. Cette déviation est prise en compte en ajoutant un terme du second ordre en vitesse dans l'équation de Darcy :

$$\nabla p = A\vec{v} + B\vec{v}^2 \quad (1.9)$$

Le premier terme est similaire au terme de Darcy. Le second est le terme non linéaire. Il y a plusieurs méthodes pour déterminer les coefficients  $A$  et  $B$  de cette équation. Par exemple, Ergun [Erg52] a donné les relations suivantes :

$$\begin{aligned} A &= 150 \frac{(1-\Phi^2)}{\Phi^3} \frac{\eta}{d_p^2} \\ B &= 1.75 \frac{(1-\Phi)}{\Phi^3} \frac{\rho}{d_p} \end{aligned} \quad (1.10)$$

où  $d_p$  est le diamètre des particules solides et  $\Phi$  la porosité. Il faut préciser que ces lois ont été au départ déterminées pour la physique des sols et ne sont donc pas forcément adaptées à des écoulements dans les milieux anisotropes comme les milieux fibreux.

Certains auteurs ont développé des modèles incluant ces deux corrections. Nithiarasu et al. [NSS02] ont formulé un modèle généralisé pour l'écoulement dans les milieux poreux quels qu'en soit la porosité et le nombre de Reynolds :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{v} = 0 \\ \frac{\rho}{\Phi} \left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{\Phi} \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \right] = -\nabla p + \frac{\eta}{\Phi} \Delta \vec{v} + \rho \vec{g} - \frac{\eta \vec{v}}{K} - \frac{1.75}{\sqrt{150}} \frac{\rho}{\sqrt{K}} \frac{|\vec{v}|}{\Phi^{3/2}} \vec{v} \end{cases} \quad (1.11)$$

D'après les auteurs, ce système d'équations permettrait de résoudre facilement des problèmes diphasiques fluide/solide, comme par exemple des problèmes de solidification, simplement grâce à la porosité. En effet, pour  $\Phi \rightarrow 0$ , on est dans une zone solide et pour  $\Phi \rightarrow 1$  on est dans une zone de fluide pur.

## 1.4 Définition d'un VER

Un milieu poreux, défini par la géométrie de ses pores, peut être modélisé par un milieu continu équivalent. Les équations régissant l'écoulement des fluides doivent donc être modifiées afin de tenir compte de la présence d'un milieu continu solide à l'intérieur du continu fluide. Il sera donc nécessaire de définir des grandeurs *macroscopiques* à partir des grandeurs *microscopiques*. La méthode développée par Whitaker [Whi99] et Liu et Masliyah [LM99] est une méthode de moyenne des grandeurs microscopiques. Les équations de Navier-Stokes sont moyennées pour modéliser les écoulements en milieux poreux, sur un Volume Élémentaire Représentatif (VER). La difficulté réside dans le choix de ce VER, qui doit être suffisamment grand pour représenter correctement la distribution de la porosité et, en même temps, doit être suffisamment petit pour ne pas effacer les variations à grande échelle (FIG. 1.13). La distribution des zones de fluide dans le milieu poreux peut être exprimée mathématiquement [BB86] par une fonction caractéristique  $\mathbb{I}_f$ , exprimée ci-dessous :

$$\mathbb{I}_f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \text{zone fluide} \\ 0 & \text{si } x \in \text{zone solide} \end{cases} \quad (1.12)$$

La porosité, définie mathématiquement par la moyenne sur un VER de la fonction caractéristique, est donnée par :

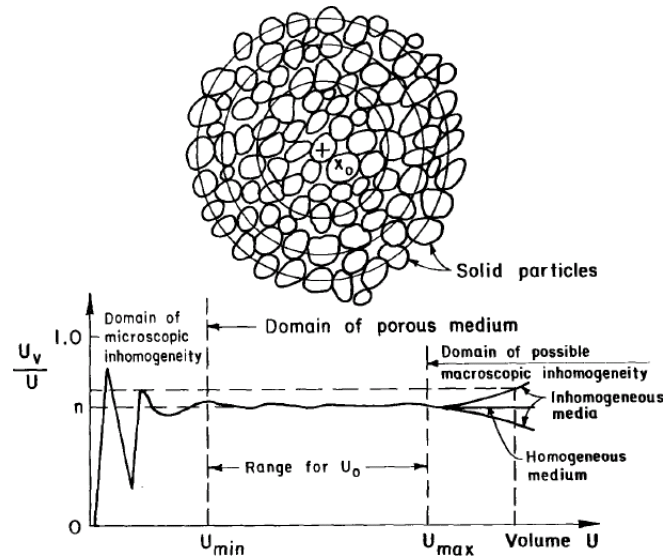
$$\Phi(x_0, \Omega) = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \mathbb{I}_f(x) \, d\Omega \quad (1.13)$$

où  $V$  est le volume du VER centré en  $x_0$ . On peut maintenant théoriquement définir un VER  $V_0$  en posant :

$$\left. \frac{\partial \Phi(x_0, \Omega)}{\partial \Omega} \right|_{\Omega=\Omega_0} = 0 \quad (1.14)$$

$$\left. \frac{\partial \overline{\tilde{\phi}(x)\tilde{\phi}(x+h)}_{x_0, \Omega}}{\partial \Omega} \right|_{\Omega=\Omega_0} = 0 \quad (1.15)$$

où  $\tilde{\phi}(x)$  est la déviation de  $\mathbb{I}_f(x)$  par rapport à sa valeur moyenne  $\Phi(x)$  et  $h$  est une petite variation de la position. Cela signifie qu'un volume est un VER lorsque l'écart type et la variance de la porosité sont indépendants de la taille du VER.



**FIGURE 1.13** – Variation de porosité au voisinage d'un point en fonction de la taille du volume de prise de moyenne [BB86].  $U$  représente le volume  $\Omega$  du VER et  $\frac{U_v}{U}$  la porosité  $\Phi$ . Le graphique montre que lorsque le volume de prise de moyenne est trop petit, on est trop proche de l'échelle des pores, ce qui implique de fortes variations de la porosité, tandis que lorsqu'il devient trop grand, on peut ressentir les effets d'hétérogénéités à grandes échelle, le VER se situant dans une zone de faible variation de la porosité.

Une notion à définir est la tortuosité. Elle traduit le fait qu'entre deux points, le fluide ne suit pas le chemin le plus court mais est contraint par la géométrie des pores. La tortuosité est donc définie par :

$$\tau = \frac{C}{L} \quad (1.16)$$

où  $C$  est la distance réelle parcourue par le fluide et  $L$  la distance linéaire entre les extrémités du chemin parcouru.

## 1.5 Technique d'homogénéisation

Les fluides, s'écoulant à l'intérieur d'un milieu poreux, suivent des écoulements complexes qui dépendent de la structure du squelette solide. Il est évidemment impossible, excepté pour des structures particulières du solide, de donner des solutions analytiques de ces écoulements. Ainsi, pour prédire les écoulements dans les milieux poreux, deux solutions sont possibles. La première nécessite la connaissance parfaite de la géométrie du squelette solide et consiste à résoudre les équations de Navier-Stokes. La seconde consiste à *homogénéiser* ces équations sur un volume caractéristique du milieu poreux. Cette homogénéisation donne des lois permettant de modéliser ces écoulements, en utilisant des paramètres caractéristiques du milieu poreux sur le volume d'homogénéisation. Ces paramètres sont des grandeurs moyennes, ou des grandeurs modélisant des phénomènes dont l'échelle caractéristique est bien plus petite que l'échelle de l'écoulement homogénéisé.

Les équations de Navier-Stokes sont appelées *équations microscopiques* car elles modélisent l'écoulement d'un fluide à l'intérieur des pores, qui sont très souvent de dimensions caractéristiques très faibles. Ainsi, lorsque nous voulons connaître l'écoulement d'un

fluide à l'intérieur d'une structure solide, nous devons résoudre ces équations. L'équation de Darcy est appelée *équation macroscopique* car elle modélise l'écoulement d'un fluide homogène et équivalent à un fluide s'écoulant dans un squelette solide. Elle résulte de la prise de moyenne des équations microscopiques sur un volume d'homogénéisation, donc à une échelle plus grande que l'échelle caractéristique de l'écoulement dans les pores.

Le coefficient de perméabilité présent dans l'équation de Darcy va modéliser les pertes de charge dues aux interactions à petite échelle des parois du squelette solide avec le fluide. Les écoulements à l'échelle supérieure, modélisés par les équations macroscopiques, peuvent donc être vus comme des écoulements moyens à l'intérieur du volume élémentaire représentatif qui lui est associé.

Les techniques d'homogénéisation permettent d'obtenir ces lois macroscopiques (Darcy, Brinkman) à partir des lois microscopiques (équations de Navier-Stokes).

### 1.5.1 Définition des moyennes

L'utilisation d'un VER, pour moyenner les grandeurs microscopiques afin d'obtenir des lois d'écoulement macroscopiques à partir des lois microscopiques est donnée par Whitaker [Whi99]. La prise de moyenne est également donnée par Liu et Masliyah [LM99], Pillai [Pil02] et Tucker et Dessenberger [TID92]. Pour commencer, il est nécessaire de définir les différentes moyennes qui seront utilisées.

La moyenne spatiale d'une quantité  $B$  définie dans tout le volume est donnée par :

$$\langle B \rangle = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} B d\Omega \quad (1.17)$$

La moyenne de phase pour une quantité  $B_f$  définie dans la phase fluide  $f$  est donnée par :

$$\langle B_f \rangle = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega_f} B_f d\Omega_f \quad (1.18)$$

où  $\Omega_f$  est le volume de fluide dans le VER. C'est une moyenne sur le volume total. La moyenne de phase intrinsèque, c'est-à-dire la moyenne sur le volume fluide d'une quantité définie dans la phase fluide, s'écrit :

$$\langle B_f \rangle^f = \frac{1}{\Omega_f} \int_{\Omega_f} B_f d\Omega_f \quad (1.19)$$

La moyenne de phase du gradient ( $B_f$  scalaire) s'écrit :

$$\langle \nabla B_f \rangle = \nabla \langle B_f \rangle + \frac{1}{\Omega} \int_{\partial\Omega_f} B_f \vec{n} dS \quad (1.20)$$

où  $dS$  est l'élément de surface du solide dans le volume  $\Omega$  et  $\vec{n}$  est la normale à cette interface dirigée du fluide vers le solide. La moyenne de phase de la divergence ( $\vec{B}_f$  vecteur) est donnée par :

$$\langle \nabla \cdot \vec{B}_f \rangle = \nabla \cdot \langle \vec{B}_f \rangle + \frac{1}{\Omega} \int_{\partial\Omega_f} \vec{n} \cdot \vec{B}_f dS \quad (1.21)$$

Enfin, la moyenne de phase d'une dérivation temporelle s'écrit :

$$\left\langle \frac{\partial B_f}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial t} \langle B_f \rangle - \frac{1}{\Omega} \int_{\partial\Omega_f} B_f \vec{u} \cdot \vec{n} dS \quad (1.22)$$

où  $\vec{u}$  est la vitesse de la surface des pores  $\partial V_f$ . En général, une condition de contact collant est imposée, ce qui implique  $\vec{u} = \vec{0}$ . Cependant, dans le cas de milieux poreux multi-échelles (FIG. 1.14), cette vitesse peut être non nulle.

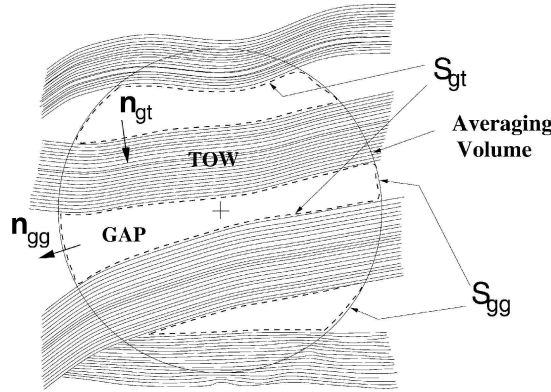


FIGURE 1.14 – VER pour un milieu poreux à double échelles [Pil02].

## 1.5.2 Obtention des lois macroscopiques à partir des lois microscopiques

Le principe est de moyenniser les équations microscopiques afin d'obtenir des relations macroscopiques. Whitaker [Whi99], Pillai [Pil02] ainsi que Tucker et Dessenberger [TID92] détaillent la prise de moyenne de ces équations.

Les hypothèses utilisées dans la suite sont les suivantes :

- le squelette solide est statique et non déformable ;
- le fluide est newtonien ;
- sa masse volumique est constante ;
- le milieu est saturé.

Les grandeurs physiques, telles que la densité et la vitesse, sont définies dans la phase fluide. En effet, les équations de Navier-Stokes, qui sont moyennées pour obtenir les équations macroscopiques, modélisent les écoulements du fluide. Ainsi, la vitesse et la densité qui interviennent dans ces équations sont celles du fluide. Plus haut dans le texte, les grandeurs définies dans la phase fluide sont indicées  $f$ . Pour alléger les notations et rester cohérents avec les notations utilisées dans le reste du manuscrit, nous n'indiquons pas  $\vec{v}$  et  $\rho$  qui sont bien définies dans le fluide seulement.

### Équation de continuité

L'équation de continuité microscopique s'écrit, de manière générale :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (1.23)$$

Nous prenons la moyenne de phase de cette équation :

$$\left\langle \frac{\partial \rho}{\partial t} \right\rangle + \langle \nabla \cdot (\rho \vec{v}) \rangle = 0 \quad (1.24)$$

En appliquant (1.22) au premier terme et (1.21) au second terme, nous obtenons :

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \rho \rangle + \nabla \cdot \langle \rho \vec{v} \rangle - \frac{1}{\Omega} \int_{\partial\Omega_f} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dS + \frac{1}{\Omega} \int_{\partial\Omega_f} \rho \vec{n} \cdot \vec{v} dS = 0 \quad (1.25)$$

avec  $\vec{u}$  la vitesse du solide. En considérant un squelette non déformable, nous avons  $\vec{u} = \vec{0}$ . De plus, nous considérons une condition de contact collant, ce qui donne  $\vec{v} = \vec{u}$ . Nous obtenons finalement :

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \rho \rangle + \nabla \cdot \langle \rho \vec{v} \rangle = 0 \quad (1.26)$$

Nous remarquons ici que l'équation de continuité microscopique et l'équation macroscopique sont proches, les grandeurs utilisées étant simplement moyennées dans le second cas. Pour un fluide incompressible, l'équation devient :

$$\nabla \cdot \langle \vec{v} \rangle = 0 \quad (1.27)$$

Nous pouvons également remarquer que pour des milieux poreux à double échelles, c'est-à-dire lorsque le squelette solide est lui-même un milieu poreux dont les pores sont à une échelle inférieure aux pores du milieu qu'on étudie, la vitesse du fluide à la surface du squelette solide n'est plus nulle et le quatrième terme du membre de gauche de l'équation (1.25) n'est pas annulé. Ce terme est pris en compte comme un terme *source* permettant de modéliser l'absorption de fluide par la petite échelle de porosité [Pil02] en écrivant :

$$\nabla \cdot \langle \vec{v} \rangle = -\mathcal{S} \quad (1.28)$$

avec  $\mathcal{S} = \frac{1}{\Omega} \int_{\partial\Omega_f} \rho \vec{n} \cdot \vec{v} dS$ .

### Equation de conservation de la quantité de mouvement

La même méthode est appliquée pour l'équation de conservation de la quantité de mouvement. Nous négligeons les effets des forces volumiques. De plus, étant donné les vitesses que l'on rencontre dans les procédés RTM, nous pouvons considérer les termes d'inertie négligeables et résoudre finalement l'équation suivante :

$$\nabla \cdot \sigma = 0 \quad (1.29)$$

La prise de moyenne nous donne :

$$\nabla \cdot \langle \sigma \rangle + \frac{1}{\Omega} \int_{\partial\Omega_f} \sigma \cdot \vec{n} dS = 0 \quad (1.30)$$

Toujours en restant général pour la loi de comportement du fluide, nous pouvons écrire la contrainte en la décomposant en la somme de sa composante sphérique et de sa composante déviatorique  $\sigma = s - p\mathbb{I}$ , où  $\mathbb{I}$  est le tenseur identité. Nous obtenons finalement :

$$\nabla \cdot \langle s \rangle - \nabla \langle p \rangle + \frac{1}{\Omega} \int_{\partial\Omega_f} \sigma \cdot \vec{n} dS = 0 \quad (1.31)$$

Étant donné que la pression mesurée expérimentalement est la pression du fluide, nous utilisons la moyenne définie sur le volume fluide seulement, en employant la relation suivante :

$$\langle p \rangle = \Phi \langle p \rangle^f \quad (1.32)$$

où  $\Phi$  est la porosité. Nous pouvons ainsi écrire :

$$\nabla \cdot \langle s \rangle - \Phi \nabla \langle p \rangle^f - \vec{f}_d = 0 \quad (1.33)$$

avec  $\vec{f}_d$  un terme de force que l'on peut assimiler à une force de traînée. Elle a l'expression suivante :

$$\vec{f}_d = \langle p \rangle^f \nabla \Phi + \frac{1}{\Omega} \int_{\partial\Omega_f} \sigma \cdot \vec{n} dS \quad (1.34)$$

Le terme de gradient de la porosité, provenant de l'introduction de l'équation (1.32) dans l'équation (1.31) est bien évidemment nul dans le cas d'un solide indéformable. Cependant, lorsque le squelette solide se déforme, ce terme doit être pris en compte.

Nous considérons un fluide newtonien incompressible, ainsi nous pouvons écrire :

$$\nabla \cdot \langle s \rangle = \eta \Delta \langle \vec{v} \rangle \quad (1.35)$$

L'équation macroscopique devient :

$$\eta \Delta \langle \vec{v} \rangle - \Phi \nabla \langle p \rangle^f - \vec{f}_d = 0 \quad (1.36)$$

Il s'agit maintenant de donner une expression pour  $\vec{f}_d$  qui prend uniquement en compte les grandeurs moyennées et les paramètres matériaux. Les auteurs de [TID92] en utilisant des hypothèses sur la nature de  $\vec{f}_d$  et l'indéformabilité du squelette, suivi d'une analyse dimensionnelle, obtiennent l'expression suivante :

$$\vec{f}_d = \frac{\Phi \eta}{K} \langle \vec{v} \rangle \quad (1.37)$$

Ainsi, l'équation macroscopique devient finalement l'équation de Brinkman :

$$-\Phi \nabla \langle p \rangle^f + \eta \Delta \langle \vec{v} \rangle - \frac{\Phi \eta}{K} \langle \vec{v} \rangle = 0 \quad (1.38)$$

En faisant l'hypothèse que l'effet de la viscosité sur l'écoulement est négligeable face à la résistance imposée par le squelette lui-même, nous obtenons l'équation de Darcy :

$$\langle \vec{v} \rangle = -\frac{1}{\eta} K \cdot \nabla \langle p \rangle^f \quad (1.39)$$

## 1.6 Aspect multi-échelles des renforts fibreux

La particularité des renforts considérés dans ce travail est la présence de plusieurs échelles de porosité (figure 1.15). Ainsi, lorsque nous nous plaçons à l'échelle mésoscopique, il est nécessaire de prendre en compte des écoulements à l'échelle microscopique. L'écoulement dans les mèches est modélisé par la loi de Darcy. En revanche, entre les

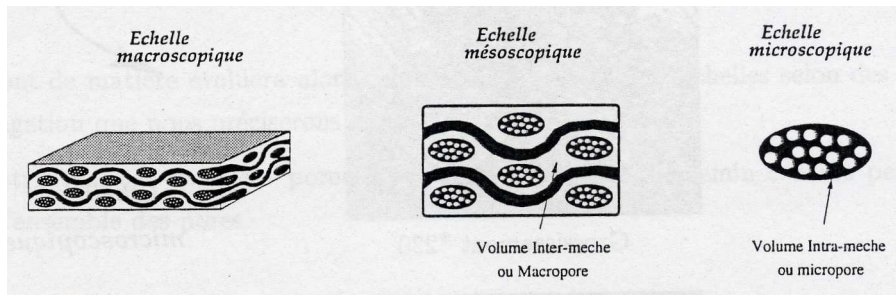


FIGURE 1.15 – Les différentes échelles associées à la description des renforts tissés [Bré97].

mèches, il est modélisé par les équations de Stokes. Nous avons donc un domaine contenant à la fois un milieu poreux et une zone fluide.

Ce problème est étudié déjà depuis longtemps puisque Beavers et Joseph [BJ67] étudient les écoulements de Stokes au dessus d'un block poreux (figure 1.16) et parlent déjà dans leur introduction d'une *extensive analytical literature*. Ils montrent l'existence d'une vitesse de glissement à la surface du milieu poreux et proposent une condition aux limites de la forme suivante :

$$\frac{du}{dy} = \frac{C_{BJ}}{\sqrt{K}}(v_{xB} - v_D) \quad (1.40)$$

sur l'interface entre le fluide et le milieu poreux, en  $y = 0$  et où  $v_D$  est la vitesse de Darcy,  $v_{xB}$  est la vitesse de glissement à la surface du milieu poreux,  $K$  la perméabilité et  $C_{BJ}$  est un paramètre empirique, dépendant du milieu poreux.

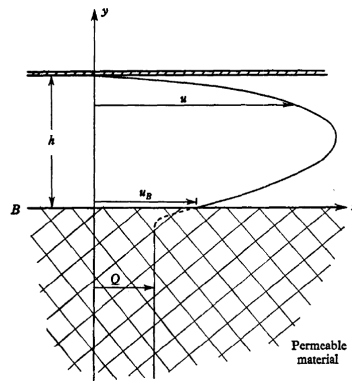


FIGURE 1.16 – Profil de vitesse d'un écoulement horizontal dans un canal composé d'une paroi imperméable en  $y = h$  et d'une paroi perméable en  $y = 0$  [BJ67].

Par la suite, Saffman [Saf71] a justifié mathématiquement cette condition aux limite et a montré que le terme de vitesse de Darcy pouvait être négligé. Il a donc donné la condition connue sous le nom de condition de Beaver-Joseph-Saffman :

$$-\vec{n} \cdot \sigma \cdot \vec{t} = \frac{C_{BJ}}{\sqrt{K}} v_B \cdot \vec{t} \quad (1.41)$$

où  $\vec{n}$  est la normale sortante au domaine de Stokes,  $\vec{t}$  est le vecteur tangent à l'interface et  $v_B$  est la vitesse de glissement à l'interface. Certaines études numériques concernant le couplage des équations de Stokes et de Darcy prennent en compte cette condition aux limites, tandis que d'autres ne la considèrent pas.

De nombreux auteurs ont couplé les équations de Stokes pour la zone fluide et l'équation de Darcy pour la zone poreuse. Correa et Loula [CL09], les auteurs proposent un couplage entre une formulation éléments finis de Stokes et une formulation mixte de Darcy utilisant des éléments de Taylor-Hood.

Les auteurs de [UNGD08] couplent une formulation éléments finis mixte de Stokes avec une formulation  $P1$  ou  $P2$  de l'équation de Darcy prise sous la forme d'une équation de Poisson.

Les auteurs de [PBMD11] expriment la formulation faible de chacune des équations en y intégrant la condition de Beaver-Joseph-Saffman. Une intégrale de surface pour la prise en compte des conditions aux limites étant commune à chacune des formulation, ils ont pu injecter l'équation de Darcy directement dans la formulation de Stokes, ce qui a permis le couplage. Dans le principe, cela revient finalement à écrire la formulation faible de l'équation de Brinkman. L'interface entre les deux domaine est représenté par l'utilisation d'une Level Set.

Les auteurs de [GOS11] font également un couplage Stokes-Darcy en comparant plusieurs types d'éléments pour obtenir une formulation stable. Cette fois encore, la formulation résolue reviens finalement une formulation faible de l'équation de Brinkman. Masud [Mas07] fait le même type d'étude en résolvant clairement cette fois l'équation de Brinkman, qu'il écrit sous sa formulation forte, en l'appelant toutefois l'équation de Stokes-Darcy.

Les auteurs de [TP09] proposent également une formulation éléments finis des équations de Brinkman. Ils proposent cependant une équations de Brinkman modifiée pour prendre en compte un saut de contrainte à l'interface fluide-poreux.

## 1.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté le procédé ainsi que les renforts que l'on place dans le moule. Nous avons introduit les défauts que l'on retrouve dans le matériau composite final et apparaissant au cours de l'imprégnation.

Nous avons donné les équations qui régissent les écoulements ainsi que la technique d'homogénéisation que nous utilisons pour modéliser les milieux poreux.

Enfin, nous faisons une rapide introduction à l'aspect multi-échelles des renforts fibreux utilisés pour le procédé RTM.



# Chapitre 2

## Méthodes numériques et immersion de domaines

### 2.1 Immersion de domaines

#### 2.1.1 La méthode d'immersion de domaines

La méthode d'immersion de domaines consiste à résoudre une équation sur tout le domaine de calcul, quel que soit le type de phase qu'elle contient. Dans notre cas, nous avons un écoulement de fluide entre des fibres solides. Les équations de Stokes sont résolues dans le domaine de calcul complet, que la phase soit fluide ou solide. Les différentes phases se différencient uniquement par leurs propriétés physiques. Les champs correspondants, comme la viscosité dans le cas de Stokes, varient dans le domaine de calcul en fonction de la distance à l'interface entre les phases. Nous utilisons la fonction distance signée, qui donne la distance par rapport à l'interface. C'est cette même fonction qui, lorsqu'elle est convectée, permet de modéliser des écoulements de fluides non miscibles avec la méthode Level Set.

Dans la suite, nous présentons plus en détail la méthode d'immersion de domaines utilisée pour résoudre des équations dans le cas de problèmes multiphasiques. Nous présentons ensuite la méthode de représentation des interfaces. Nous détaillons les techniques d'adaptation de maillage près des interfaces pour finir par la méthode d'immersion de maillage, qui nous permet de représenter des objets complexes dans un domaine de calcul global.

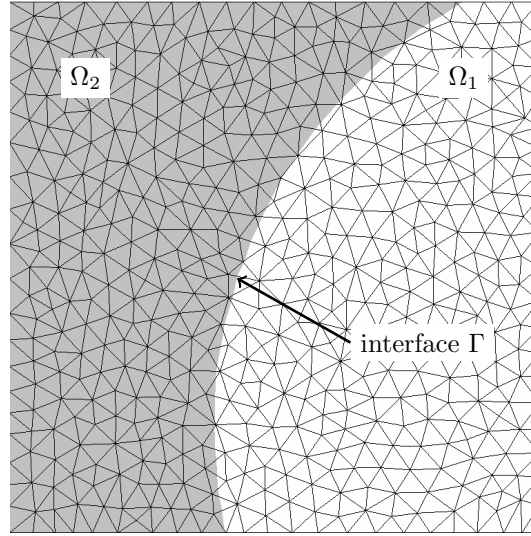
##### 2.1.1.1 Méthode

Nous détaillons ici la méthode de résolution en immersion de domaines des équations de Stokes, basée sur une méthode d'immersion de domaines. Nous nous plaçons dans le cas d'une phase liquide contenant une phase solide. L'interface entre les phases est représentée implicitement par une fonction distance signée. Cette fonction nous permet d'obtenir un champ de viscosité dépendant de la position, ce qui nous permet de résoudre les équations sur tout le domaine de calcul.

Si nous considérons un domaine de calcul  $\Omega$  et une interface  $\Gamma$  (figure 2.1) définis par :

$$\Omega = \Omega_f \cup \Omega_s \quad \text{et} \quad \Gamma = \Omega_f \cap \Omega_s \quad (2.1)$$

la distance  $\alpha$  est définie par :



**FIGURE 2.1** – Deux phases sur un maillage unique. L’interface  $\Gamma$ , qui sépare les deux phases, traverse les éléments et est représentée par une fonction distance  $\alpha$

$$\alpha(\vec{x}) = \pm d(\vec{x}, \Gamma) \quad (2.2)$$

où  $d(x, \Gamma)$  est la distance entre l’interface et le point de coordonnées  $\vec{x}$ , définie par [SE02] :

$$\|d(\vec{x}, \Gamma)\| = \min_{\vec{x}_\Gamma \in \Gamma} \|\vec{x} - \vec{x}_\Gamma\| \quad (2.3)$$

Le signe de la distance est automatiquement donné lorsque l’objet est issu d’une fonction analytique. L’interface discrète peut ensuite être déterminée à partir de la fonction distance  $\alpha$  par :

$$\Gamma_h = \{\vec{x}, \alpha(x) = 0\} \quad (2.4)$$

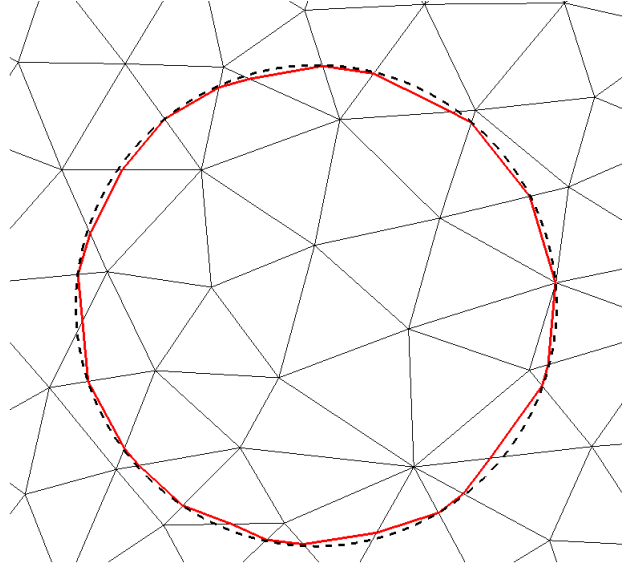
Il faut remarquer que  $\Gamma_h \neq \Gamma$  car la reconstruction de l’interface dépend de la discrétisation choisie et donc de la taille de maille au voisinage de l’interface (figure 2.2). De plus, la formulation éléments finis étant linéaire, le champ distance  $\alpha$  est également choisie linéaire.

La fonction distance est utile pour définir les différentes phases présentes dans le domaine de calcul, notamment pour calculer la distribution de la viscosité. Les équations résolues dans la méthode d’immersion de domaines sont les mêmes que pour la méthode classique, à la différence près que les grandeurs physiques ne sont pas constantes. Ainsi, pour les équations de Stokes (2.14), nous écrivons la forme faible :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} p \nabla \cdot \vec{w} \, d\Omega - \int_{\Omega} 2\eta(\alpha) \epsilon(\vec{v}) : \epsilon(\vec{w}) \, d\Omega = 0 \\ \int_{\Omega} q \nabla \cdot \vec{v} \, d\Omega = 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

où  $\eta(\alpha)$  est un champ de viscosité dépendant de la distance à l’interface de la manière suivante :

$$\eta(\alpha) = \eta_f \mathbb{I}_f + \eta_s (1 - \mathbb{I}_f) \quad (2.5)$$



**FIGURE 2.2** – *Comparaison entre  $\Gamma_h$ , en trait plein rouge et  $\Gamma$ , en pointillé noirs. L'effet de la discrétisation sur la reconstruction de l'interface est nettement visible.*

où  $\vec{w}$  et  $q$  sont les fonctions test pour la vitesse et la pression et  $\mathbb{I}_f$  est la fonction caractéristique de fluide, ou encore, une fonction de Heaviside valant 1 dans le fluide et 0 dans le solide. Le solide est traité comme étant un fluide de viscosité  $\eta_s$  très grand devant la viscosité du fluide  $\eta_f$ , ce qui revient à imposer un comportement de corps rigide au fluide. Beaume [Bea08] montre l'équivalence avec une méthode de pénalisation du type lagrangien augmenté, ce dernier permettant d'imposer le comportement de corps rigide lorsque le solide est en mouvement.

### 2.1.1.2 L'interface diffuse

Comme expliquée précédemment, la viscosité varie, grâce à l'équation (2.5), en fonction de la position dans le domaine. Plusieurs lois de mélange peuvent être utilisées. Certaines sont définies aux éléments, d'autres aux nœuds. La variation de viscosité n'est pas régulière. En effet, sur un même élément traversé par l'interface, certains nœuds sont fluides et d'autres solides.

Afin d'adoucir ces variations, le Heaviside peut être lissé linéairement sur une épaisseur  $2e$  autour de l'interface. Son expression est la suivante :

$$\mathbb{I}_f = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha > e \\ \frac{\alpha}{e} & \text{si } \|\alpha\| < e \\ 0 & \text{si } \alpha < -e \end{cases} \quad (2.6)$$

Il est également possible de lisser uniquement dans l'une des deux phases. Pour cela, nous écrivons :

$$\mathbb{I}_f = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha > e \\ \frac{\alpha}{e} & \text{si } 0 < \alpha < e \\ 0 & \text{si } \alpha < 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

Dans le cas de ces mélanges, l'épaisseur  $e$  doit être suffisamment fine pour limiter les erreurs dues au fait que l'interface est définie en volume, mais suffisamment large pour que la courbure de l'interface soit bien représentée, c'est-à-dire qu'une rugosité artificielle due au maillage n'apparaisse pas. Il est donc nécessaire de définir une épaisseur de mélange qui soit de plusieurs tailles de maille. L'intérêt d'utiliser des techniques d'adaptation de maillage apparaît pour mieux s'approcher d'une solution à interface exacte en gardant une zone de transition douce la plus fine possible.

Dans le cas d'un mélange  $P0$  (défini aux éléments), la fonction de Heaviside est discontinue et vaut :

$$\mathbb{I}_f = \frac{|\Omega_1 \cap \mathcal{K}|}{|\mathcal{K}|} \quad (2.8)$$

où  $\Omega_1$  représente le domaine occupé par l'une des deux phases et  $|\mathcal{K}|$  est le volume de l'élément  $\mathcal{K}$ . Dans ce cas, l'équation de mélange (2.5) peut se réécrire sous la forme :

$$\eta = \frac{\eta_f |\Omega_f \cap \mathcal{K}| + \eta_s |\Omega_s \cap \mathcal{K}|}{|\mathcal{K}|} \quad (2.9)$$

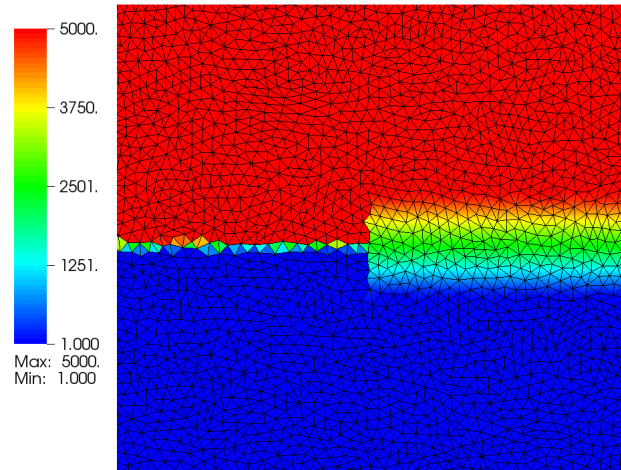
La figure 2.3 montre un exemple de deux lois de mélange. La première est la loi de mélange discontinu ( $P0$ ) pour laquelle la variation ne se fait que dans les éléments traversés par l'interface. La seconde loi de mélange illustrée est la loi continue linéaire, de part et d'autre de l'interface. La figure 2.4 montre les lois de mélange le long d'une coupe verticale de la figure 2.3. On voit bien le caractère discontinu de la première loi puisque la valeur intermédiaire du champ mélangé correspondant à l'élément traversé par l'interface.

### 2.1.2 Adaptation de maillage aux interfaces

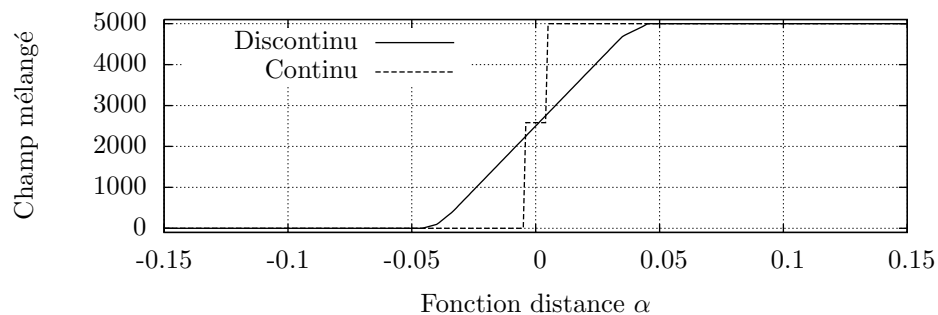
Il semble évident que l'interface diffuse doit être la plus fine possible afin de s'approcher de la solution exacte. Or, il est nécessaire de conserver un certain nombre d'éléments dans l'épaisseur de cette interface si on veut que la variation soit suffisamment douce. De plus, nous pouvons avoir besoin d'une interface reconstruite la plus proche possible de l'interface réelle (pour calculer une courbure par exemple). Ces deux situations sont des exemples pour lesquels une adaptation de maillage au niveau de l'interface est nécessaire.

Une manière simple d'adapter le maillage est de déterminer une taille de maille près de l'interface et d'adapter le maillage de manière isotrope. Nous montrons dans la suite que ce n'est pas forcément la méthode la plus efficace. En effet, le nombre de nœuds augmente rapidement avec cette méthode. De plus, les résultats obtenus ne sont pas forcément aussi précis qu'en utilisant la technique de maillage anisotrope expliquée ci-dessous.

Cette seconde méthode consiste à adapter le maillage de manière anisotrope, c'est-à-dire que les éléments ont une forme allongée dans une direction particulière donnée par l'interface. Cela permet de raffiner le maillage lorsque l'on a besoin d'une précision importante, sans raffiner inutilement lorsque ce n'est pas nécessaire. Nous présentons rapidement dans la suite cette technique de remaillage anisotrope, qui est expliquée de manière détaillée dans la thèse de Gruau [Gru04] et qui est utilisée avec un estimateur d'erreur [MZD<sup>+</sup>08, ZM10, Cou11].



**FIGURE 2.3** – La loi de mélange discontinue  $P_0$  (à gauche) et loi de mélange continue  $P_1$  (à droite) d'un champ de valeur 1 dans le domaine inférieur et 5000 dans le domaine supérieur. La loi de mélange  $P_0$  permet d'avoir une variation du champ uniquement dans les éléments traversés par l'interface. La taille de maille moyenne est de 0.1 et l'épaisseur de la loi de mélange linéaire est de 1.5.



**FIGURE 2.4** – Coupe verticale de la figure 2.3. Nous retrouvons bien la valeur intermédiaire du champ mélangé pour la loi discontinue qui correspond à celle dans l'élément traversé par l'interface. Les deux variations de pente pour la loi continue sont dues au maillage.

L'anisotropie du maillage est définie par un tenseur de métrique. Cette métrique est une matrice symétrique définie positive. La norme associée à l'espace mesuré par cette métrique s'écrit comme suit :

$$\|x\|_{\mathcal{M}} = \sqrt{{}^T x \mathcal{M} x} \quad (2.10)$$

La manière la plus simple d'interpréter cette métrique se comprend en l'écrivant sous forme diagonalisée :

$$\mathcal{M} = \mathcal{R} \begin{pmatrix} \frac{1}{h_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{h_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{h_3^2} \end{pmatrix} {}^T \mathcal{R} \quad (2.11)$$

où  $\mathcal{R}$  est la matrice de rotation composée des vecteurs propres de  $\mathcal{M}$  et  $\frac{1}{h_i^2}$ , avec  $i = 1 \dots 3$ , la valeur propre  $i$  de  $\mathcal{M}$ . Ainsi, la métrique  $\mathcal{M}$  nous donne un nouvel espace dont le repère de base a subi une rotation  $\mathcal{R}$  par rapport au repère de l'espace réel et dont les  $i$  vecteurs de base ont une norme  $\frac{1}{h_i^2}$ . Par exemple, la métrique définie en 2D par :

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 400 \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

donne une taille de maille  $h = 0.1$  dans la direction  $x$  et  $h = 0.05$  dans la direction  $y$ , puisque ses vecteurs propres correspondent aux vecteurs de base du repère cartésien.

Nous choisissons d'adapter le maillage de façon anisotrope pour avoir une zone de mélange des propriétés suffisamment fine afin de s'approcher de la solution exacte. Dans le solveur choisi pour résoudre l'écoulement, l'interface est seulement connue à travers la variation de viscosité. Nous cherchons donc à représenter au mieux cette zone de variation, qui se fait dans la direction normale à l'interface. Pour cela, nous choisissons de diminuer la taille de maille dans la direction normale à l'interface et de la garder constante dans la direction tangente.

Il est bien évident que le maillage n'est pas anisotrope sur la totalité du domaine de calcul. Nous le limitons à une certaine zone autour de l'interface. Nous gardons une taille de maille isotrope sur le reste du domaine, que nous appelons taille de maille de fond. Afin d'obtenir ce maillage, la métrique est définie de la manière suivante [ZSC<sup>+</sup>07] :

$$\mathcal{M} = \begin{cases} \varepsilon^2 \mathbb{I} & \text{si } |\alpha| > e \\ (\varrho^2 - \varepsilon^2) \frac{\nabla \alpha \otimes {}^T \nabla \alpha}{|\nabla \alpha|^2} + \varepsilon^2 \mathbb{I} & \text{si } |\alpha| < e \end{cases} \quad (2.13)$$

où  $\varepsilon$  est l'inverse de la taille de maille de fond  $\varepsilon = \frac{1}{h_\varepsilon}$ ,  $\varrho$  est l'inverse de la taille de maille dans la direction perpendiculaire à l'interface  $\varrho = \frac{1}{h_\varrho}$  et  $\mathbb{I}$  est le tenseur identité. La direction normale à l'interface est donnée par  $\nabla \alpha$ . Lorsqu'on est loin de l'interface, la métrique donne un maillage isotrope. Lorsqu'on est en dessous de l'épaisseur  $e$ , le maillage devient anisotrope. Dans la direction de  $\nabla \alpha$ , la taille de maille est calculée en utilisant  $\varrho$  et dans la direction de  ${}^t \nabla \alpha$  elle est calculée avec  $\varepsilon$  et est donc égale à la taille de maille de fond. Il n'est pas nécessaire que cette dernière soit constante. Sa valeur peut varier dans le domaine de calcul et il est possible de définir une taille de maille de fond différente selon que l'on est dans le fluide ou dans le solide et en dehors de la zone d'interface où le maillage est anisotrope.

### 2.1.3 Immersion des renforts

Pour l'application qui nous concerne, lorsque nous nous plaçons à l'échelle mésoscopique, nous souhaitons calculer les écoulements autour et dans les mèches du renfort. Nous disposons pour cela des maillages du renfort, déformé ou non. D'un autre côté, nous utilisons l'approche d'immersion de domaines pour résoudre nos équations d'écoulements. Il nous est donc nécessaire d'avoir dans notre maillage global l'interface entre les mèches et le fluide. Nous utilisons les maillages des mèches pour obtenir cette interface en utilisant une technique d'immersion de maillage.

#### 2.1.3.1 Technique d'immersion de maillage

La technique d'immersion de maillage consiste à placer le maillage d'un objet à l'intérieur d'un maillage global. Un maillage de la frontière suffit pour le calcul de la fonction distance. Le principe est de calculer, pour chaque nœud du maillage global, sa distance à chaque élément de surface de la frontière du maillage immergé (un triangle en 3D et un segment en 2D) en déterminant le minimum. La méthode est décrite par Valette et al. [VBD<sup>+</sup>07] et l'algorithme est donné par Schneider et Eberly [SE02].

Dans le cas où l'objet n'est pas issu d'une fonction analytique (un cube ou une sphère, par exemple), il faut une technique particulière pour déterminer si le nœud du maillage global est à l'intérieur ou à l'extérieur de l'objet immergé car cela détermine le signe de la fonction distance [BDC09]. Le principe est d'utiliser le fait que l'élément de surface est orienté et ainsi, la normale à l'élément de frontière est orientée, ce qui nous permet de donner un signe à la fonction distance.

La méthode est optimisée grâce à un arbre hiérarchique [DBSC07, BDC09]. Cette méthode hiérarchique consiste à découper le maillage global en boîtes sur lesquelles sont calculées les distances. La distance de l'objet immergé au nœud  $N_i$  est calculée uniquement pour les éléments de la frontière de l'objet immergé qui sont dans la boîte à laquelle appartient  $N_i$ . Après calcul de la distance, on vérifie la distance aux boîtes voisines. Si l'une des distances est plus petite que la distance minimale à l'objet immergé, on refait l'opération de calcul de distance sur les éléments de la frontière qui se trouvent dans la boîte voisine et on prend le minimum entre la distance calculée précédemment et la distance minimale dans cette boîte. Cette méthode permet de limiter le temps nécessaire au calcul de la distance puisqu'en chaque nœud seule la distance aux éléments de la frontière de l'objet immergé les plus proches est calculée.

Bien évidemment, lorsque nous avons obtenu le champ distance à la frontière de l'objet immergé, nous pouvons reconstruire l'interface correspondante. Le maillage de l'objet immergé ne nous sert donc que pour ce calcul de distance et n'est pas utilisé pour des calculs directs sur l'objet dans nos applications. Le maillage global sur lequel nous reconstruisons l'interface n'est cependant pas forcément adapté à la géométrie de l'objet immergé. Nous présentons ici la méthode que nous utilisons pour adapter le maillage autour de ces interfaces, en précisant certaines difficultés qui apparaissent dans le cas particulier des renforts immergés.

Comme nous l'avons expliqué précédemment, une adaptation de maillage anisotrope permet de représenter correctement les interfaces sans augmenter le coût de calcul de manière aussi importante qu'avec l'utilisation un maillage isotrope.

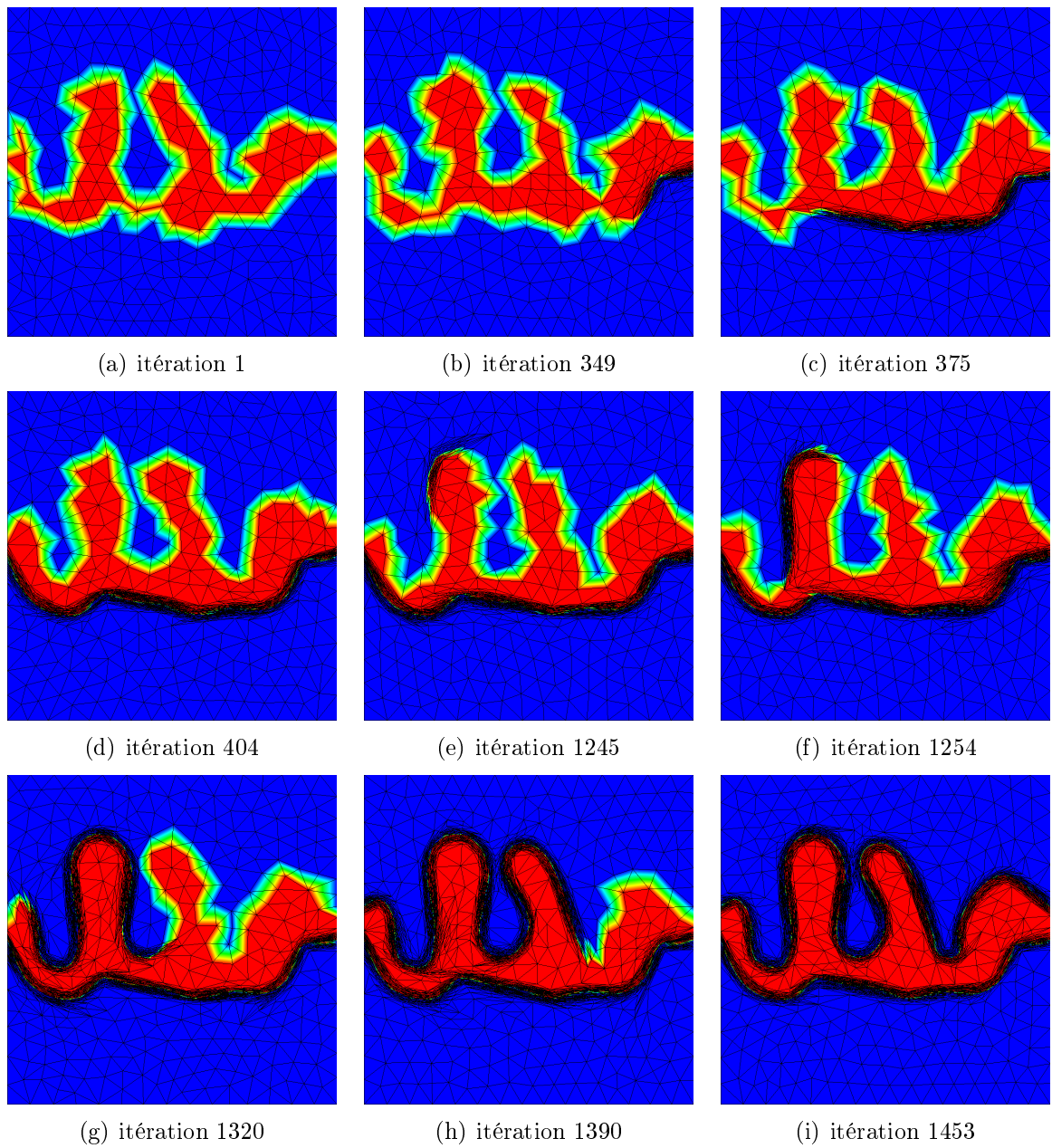
Après une première immersion de maillage, nous avons une fonction distance qui peut être représentée de façon trop grossière sur le maillage de fond. Nous calculons la normale et définissons une anisotropie sur une certaine épaisseur. Après adaptation de maillage, il est nécessaire de mettre à jour la fonction distance. Nous calculons donc de nouveau la distance du maillage immergé par rapport au maillage adapté. Nous obtenons finalement une fonction distance plus précise.

Plusieurs itérations sont nécessaires pour obtenir un maillage correct. En effet, à chaque adaptation, le nouveau maillage anisotrope est adapté à l'interface reconstruite sur l'ancien maillage et qui était donc moins précise que la fonction distance recalculée sur le nouveau maillage. Dans ce cas, il est possible que le maillage adapté ne soit pas optimal par rapport à la nouvelle fonction distance. De plus, un maillage anisotrope nécessite la définition d'une épaisseur sur laquelle se trouve l'anisotropie. Plus cette épaisseur est fine et plus le nombre de nœuds sera faible. Cependant, si une épaisseur trop fine par rapport à un maillage de fond est utilisée (c'est typiquement le cas lorsque l'épaisseur est plus faible que la taille de maille de fond), le mailleur éprouve des difficultés à adapter le maillage puisque en certaines zones autour de l'interface il n'y a pas de nœuds sur lesquels appliquer l'anisotropie. Ce phénomène est illustré figure 2.5 où, pendant 348 itérations, le mailleur n'arrive pas à adapter le maillage. A l'itération 348, des nœuds se trouvent placés à l'intérieur de la zone à adapter anisotropiquement. L'anisotropie apparaît donc à l'itération de remaillage suivante. De là, l'anisotropie se propagera à chaque itération le long de l'interface. L'obtention d'un maillage adapté correct est ainsi plus rapide, puisqu'en 55 itérations, la frontière inférieure est finalement correctement maillée. Cependant, le maillage n'est toujours pas adapté à la frontière supérieure du maillage immergé. Il faut attendre, de la même manière que précédemment, que suffisamment de nœuds se côtoient dans la zone où la métrique est anisotrope. Cela se produit à l'itération 1244, ce qui nous donne, à l'itération 1245, une zone anisotrope sur la frontière supérieure. Il faut cependant plus d'itérations pour obtenir une frontière correctement maillée, principalement à cause des courbures plus élevées que celles de la frontière inférieure.

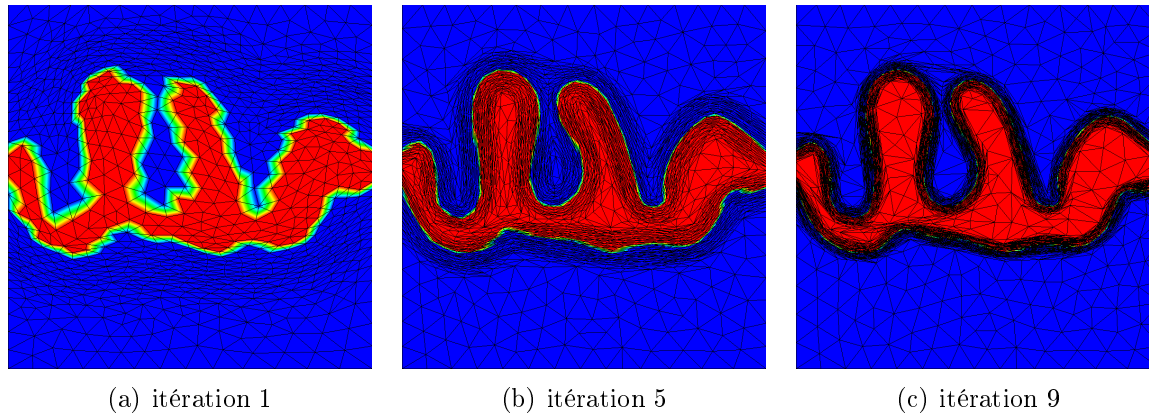
Pour synthétiser, l'algorithme correspondant à cette méthode de remaillage est le suivant :

1. définition de la métrique  $\mathcal{M}(\varrho, \varepsilon, e)$  ;
2. immersion du maillage de l'objet à capturer et calcul de la distance ;
3. adaptation de maillage et transport de la fonction distance sur le nouveau maillage ;
4. si le maillage n'est pas bon, retourner en 2.

Pour résoudre ce problème qui impose un nombre d'itérations de remaillage très important, la méthode la plus simple est de prendre une épaisseur relativement importante pour la zone anisotrope. Le maillage est ainsi raffiné sur une zone plus grande que nécessaire, ce qui augmente la probabilité qu'à la nouvelle immersion, l'interface soit bien reconstruite. Une fois obtenue une interface convenable, nous pouvons diminuer l'épaisseur de la zone anisotrope, afin de ne pas raffiner inutilement des zones loin de l'interface. Dans ce cas, il n'est pas nécessaire d'immerger le maillage à chaque nouvelle itération, mais seulement lorsque l'épaisseur idéale est obtenue. Cela permet de limiter les erreurs apparaissant lors du transport de la fonction distance de l'ancien au nouveau maillage et qui se cumulent à chaque itération (figure 2.6). L'utilisation de cette méthode nous permet d'obtenir un maillage similaire à celui de la première méthode au bout de seulement 9 itérations. Un



**FIGURE 2.5** – *Immersion d'un maillage 2D et remaillage anisotrope de sa frontière par la première méthode. Le champ de taille de maille final est utilisé dès la première étape de remaillage.*



**FIGURE 2.6** – Immersion d’un maillage 2D et remaillage anisotrope de sa frontière par la méthode douce. Les paramètres de calcul du champ de taille de maille varient au cours des différentes itérations.

contrôle plus poussé du maillage, qui demande une mise en place plus longue, permet cependant un gain de temps de calcul très important.

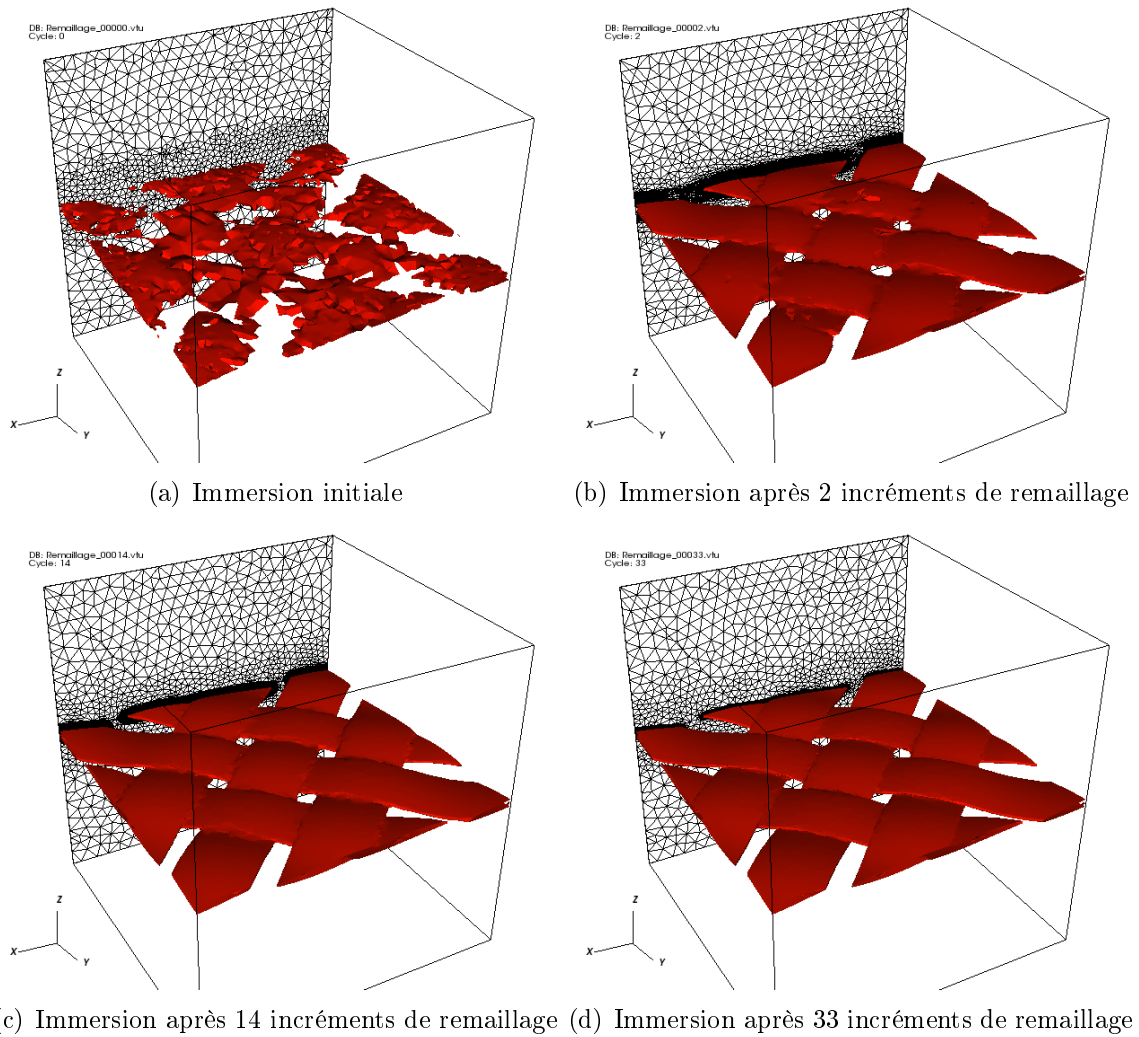
L’algorithme correspondant à cette dernière méthode est le suivant :

1. définition de la métrique  $\mathcal{M}_0(\varrho, \varepsilon, e_0)$  ;
2. immersion du maillage de l’objet à capturer et calcul de la distance ;
3. adaptation de maillage et transport de la distance sur le nouveau maillage ;
4. si le maillage n’est pas bon par rapport à la métrique  $\mathcal{M}_i$ , retourner en 2 ;
5. si le maillage n’est pas bon par rapport au maillage final voulu, diminuer  $e_i$  et mettre à jour la métrique  $\mathcal{M}_i$ , puis retourner en 2.

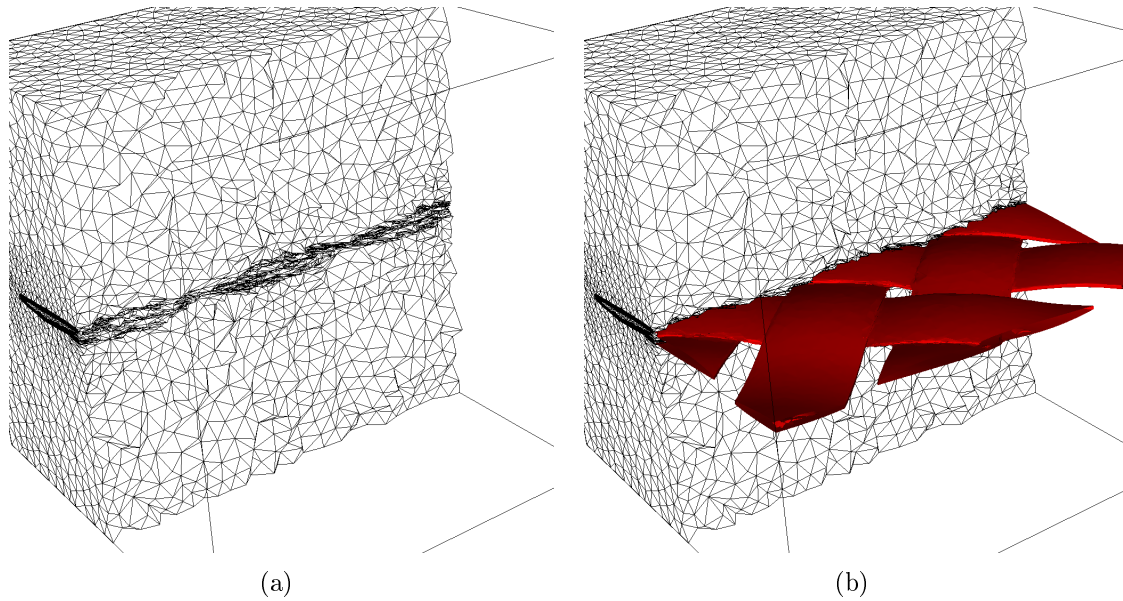
Comme expliqué plus haut, il n’est pas nécessaire d’immerger le maillage à chaque incrément car le calcul de la distance, malgré l’utilisation d’un arbre hiérarchique, peut être une opération gourmande en puissance de calcul lorsque les maillages à immerger comportent un nombre important de nœuds. On peut ainsi, à l’opération 5 de l’algorithme précédent, retourner en 4. Il faut toutefois systématiquement immerger à nouveau le maillage et calculer la distance à la fin de la méthode pour continuer le calcul sur une fonction distance la plus précise possible par rapport au maillage obtenu.

### 2.1.3.2 Exemples d’application sur des tissus

Nous présentons ici quelques résultats d’immersion de maillage pour des renforts tissés. Nous montrons un premier exemple en utilisant un taffetas avec un enchevêtrement des mèches qui est idéal, ce qui n’est bien évidemment pas le cas dans la réalité. Ce maillage nous a été fourni par le LAMCOS. Pour l’exemple, nous utilisons le maillage d’un cube comme maillage de fond, dans lequel le maillage de chaque mèche composant le taffetas est immergé. Les figures 2.7(a) à 2.7(d) montrent l’isovaleur zéro de la Level Set nous donnant l’interface entre les mèches et le milieu extérieur. La première immersion ne donne pas de bons résultats, le maillage n’étant pas adapté à l’interface entre les mèches et le fluide extérieur. Aux itérations suivantes, le maillage se raffine pour permettre finalement une bonne représentation de l’interface. La figure 2.8 montre un écorché du maillage dans un



**FIGURE 2.7** – Immersion d'un motif de taffetas dans un maillage de fond arbitraire. Nous remarquons l'épaisseur de la zone de maillage adaptée qui diminue au cours des itérations. Nous représentons l'isovaleur zéro de la fonction distance au renfort.

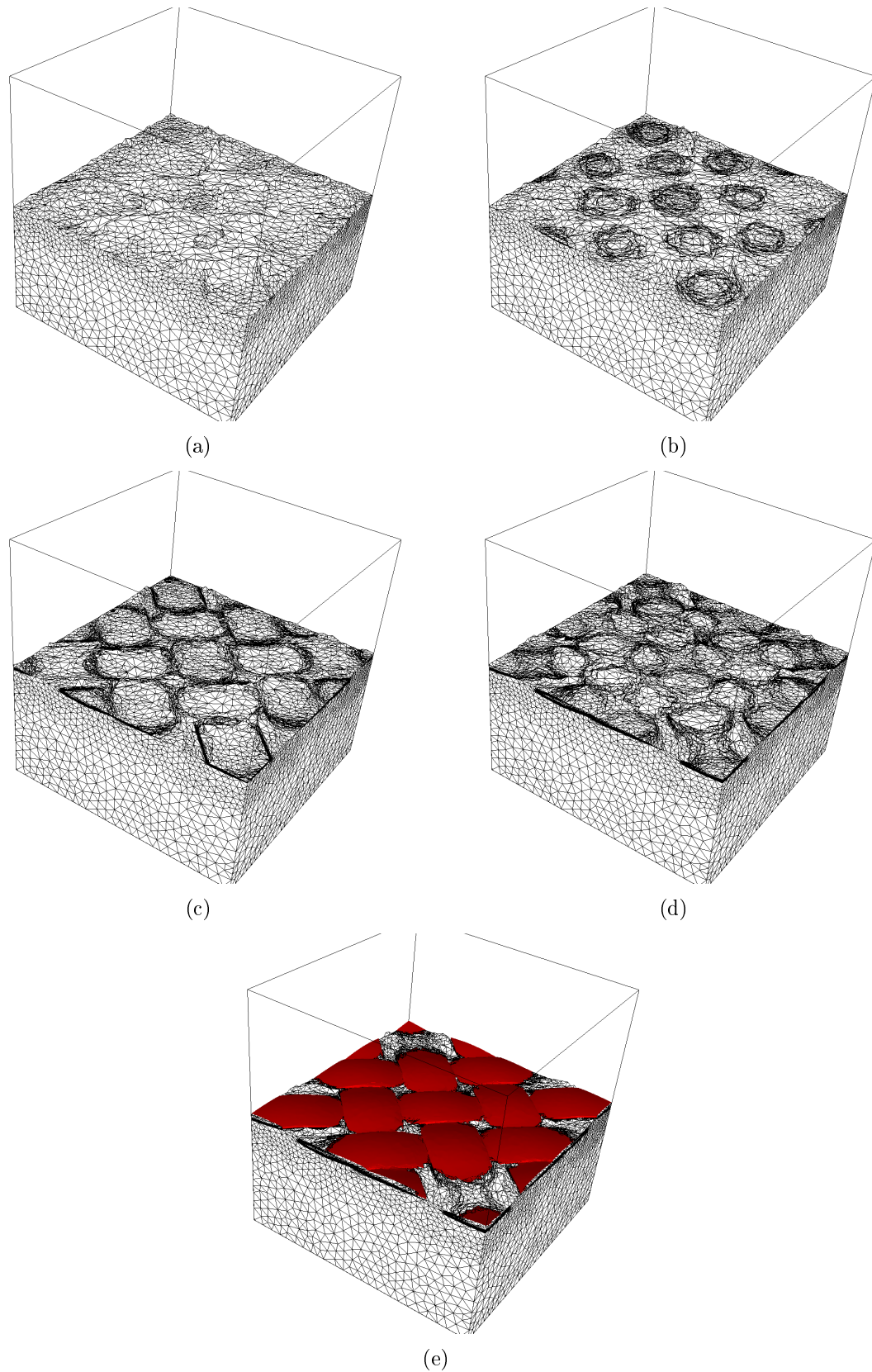


**FIGURE 2.8** – Écorché du maillage dans le plan orthogonal au tissu. a) les zones fines sont celles où se trouve l'interface entre les mèches et le milieu extérieur. b) l'iso-surface zéro de la fonction distance est représentée en rouge.

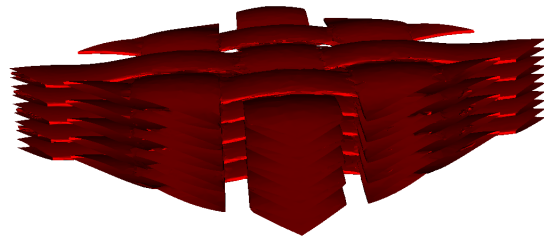
plan orthogonal au tissu. Cela permet de bien visualiser les zones adaptées. Les figures 2.9(a) à 2.9(e) montrent un écorché du maillage dans des plans du tissu. Les frontières du maillage de chaque mèche peuvent se deviner par les zones plus raffinées du maillage. Les figures 2.11(a) à 2.11(d) montrent la frontière du maillage dans lequel on immerge cinq couches de tissu, comme illustré figure 2.10.

Les mèches du renfort sont en contact étroit, surtout après déformation. Nous avons donc des zones où l'interface a des changements de direction francs (figure 2.12). Ces zones sont difficiles à représenter correctement, étant donné que si un angle droit se trouve à l'intérieur d'un élément, il disparaîtra à cause de l'interpolation linéaire de la fonction distance (figure 2.13). De plus, au niveau de ces contacts, la normale, qui est nécessaire pour le calcul de la métrique donné en (2.13), est mal calculée, puisqu'elle est le gradient de la fonction distance. Cela provoque des difficultés à calculer une métrique correcte. Pour remédier à ce problème, plutôt que de calculer une métrique par rapport à la distance à l'assemblage de mèche, nous utilisons une méthode développée au laboratoire pour d'autres applications [BLC11, BRCL09].

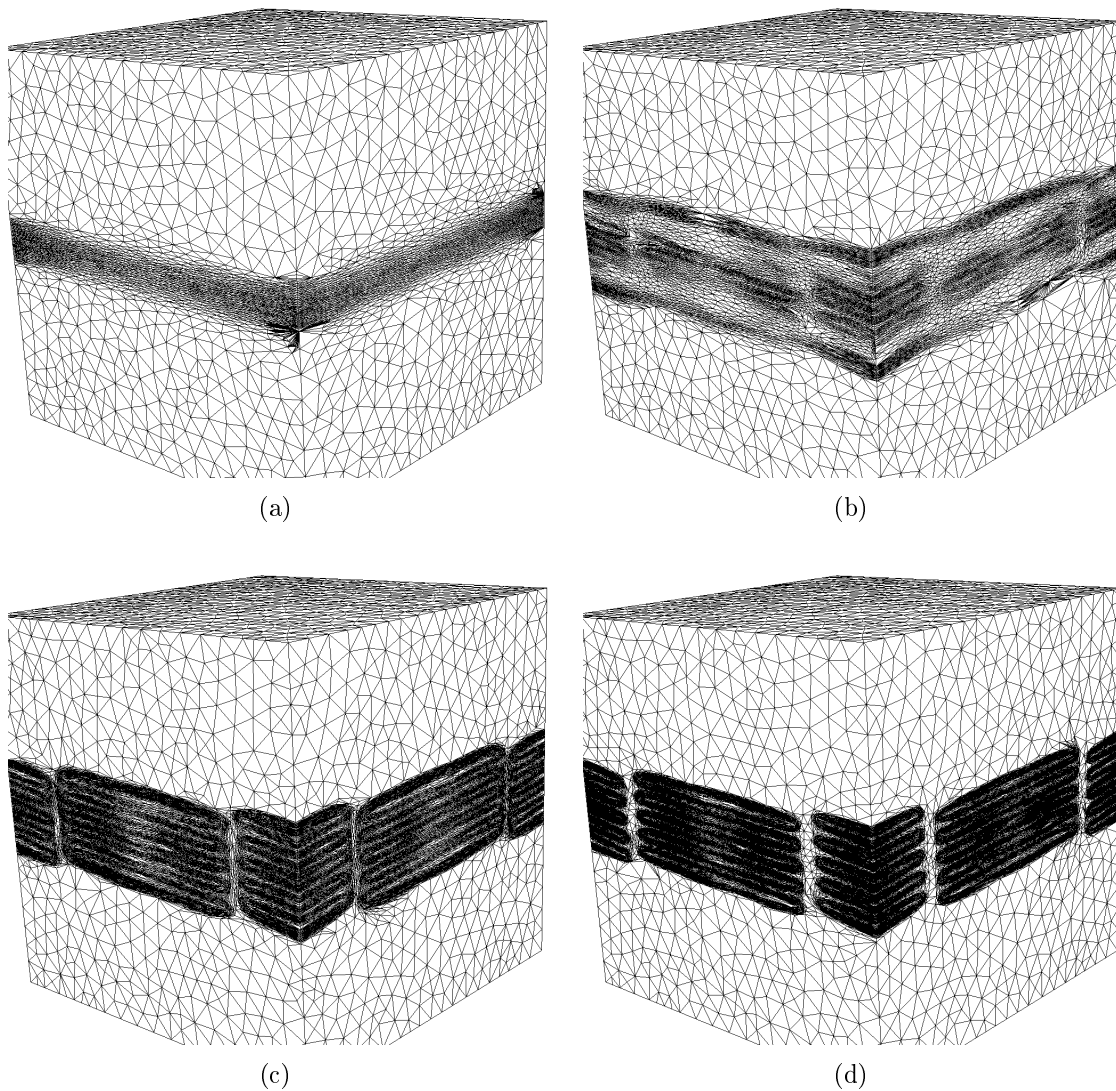
Cette méthode calcule une métrique en fonction de la distance à chaque mèche. Dans les zones où deux mèches sont proches, la méthode va choisir, en fonction des normales, d'utiliser un maillage soit isotrope, soit anisotrope dans une direction, soit anisotrope dans deux directions. Cela permet de mieux représenter les contacts au niveau des interfaces. Un exemple est illustré sur un sergé (G896) (figure 2.14) avec un zoom sur une zone de contact (figure 2.15) qui permet de voir l'amélioration obtenue en utilisant cette méthode.



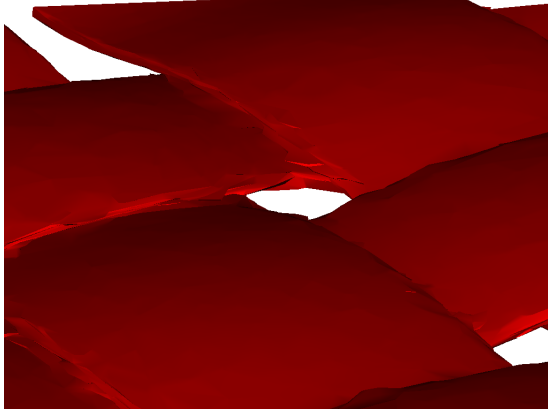
**FIGURE 2.9** – Écorché du maillage dans des plans verticaux successifs du tissu. Chaque sous-figure s'élève d'un incrément de hauteur par rapport à la précédente. La coupe est centrée sur la zone où se trouve le tissu. En (e), nous représentons, sur le maillage donné en (d), l'interface des fibres.



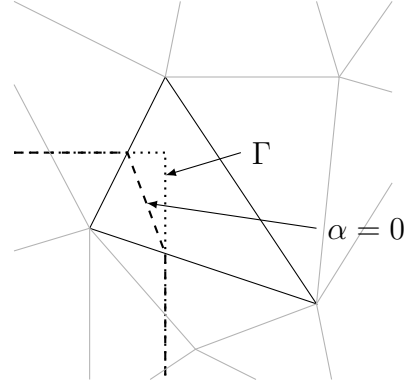
**FIGURE 2.10** – L'iso-surface de valeur zéro de la fonction distance correspondant à l'empilement de cinq couches du même tissu (un taffetas).



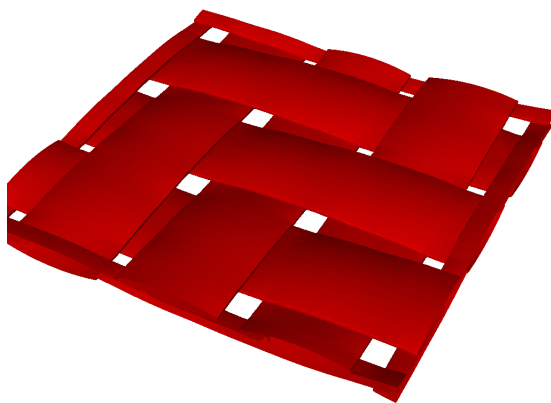
**FIGURE 2.11** – Maillage dans lequel cinq couches de tissu sont immergées. En a), le maillage initial. Une zone de maillage fin anisotrope a été utilisée pour initier le remaillage. Nous trouvons l'itération 2 en b), l'itération 10 en c) et l'itération 20 en d).



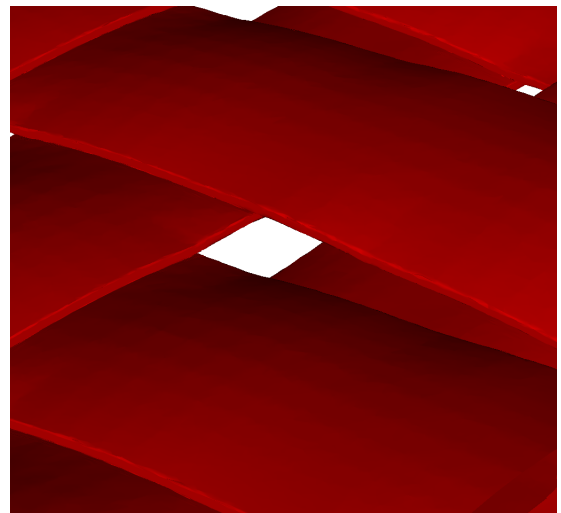
**FIGURE 2.12** – Zone de contact entre deux mèches. L'interface est mal définie à cause d'une difficulté de calcul de la normale à l'interface.



**FIGURE 2.13** – Les structures plus petites que la taille d'un élément disparaissent. En pointillés, l'interface réelle  $\Gamma$ . En tirets, l'interface représentée par l'isovaleur  $\alpha = 0$  de la fonction distance.



**FIGURE 2.14** – Interface d'un sergé G986 immergé avec  $\epsilon = 0.1$ ,  $\rho = 0.01$  et  $e = 0.1$ . Le domaine à une longueur et une largeur égales à 10 et sa hauteur est égale à 0.66.



**FIGURE 2.15** – Zoom sur l'interface d'un sergé G986 immergé. Les zones de contact sont bien définies et les angles droits sont respectés.

## 2.2 Résolution numérique des écoulements

### 2.2.1 Formulation éléments finis classique des équations de Stokes

Nous développons la formulation éléments finis des équations de Stokes. La forme faible s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} p \nabla \cdot \vec{w} \, d\Omega - \int_{\Omega} 2\eta \epsilon(\vec{v}) : \epsilon(\vec{w}) \, d\Omega = 0 \\ \int_{\Omega} q \nabla \cdot \vec{v} \, d\Omega = 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

avec  $(\vec{v}, p) \in (\mathcal{H}_0^1(\Omega))^d \times \mathcal{L}^2(\Omega)$  et  $\epsilon(\vec{v}) = \frac{1}{2} (\nabla \vec{v} + {}^T \nabla \vec{v})$ . La fonction test  $q$  pour la pression est définie dans  $\mathcal{L}^2(\Omega)$ , l'espace de Lebesgue des fonctions de carrés sommables sur  $\Omega$  et les fonctions test  $\vec{w}$  pour la vitesse sont définies sur  $\mathcal{H}_0^1(\Omega)$  qui est un sous-espace de l'espace de Sobolev  $(\mathcal{H}^1(\Omega))^d$  ( $d$  étant la dimension de l'espace). Sur  $\mathcal{H}_0^1(\Omega)$ , la fonction s'annule sur les frontières où la condition aux limites de Dirichlet est appliquée. Les espaces énoncés s'écrivent sous les formes suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^2(\Omega) &= \left\{ q, \int_{\Omega} q^2 \, d\Omega < \infty \right\} \\ \mathcal{H}^1(\Omega) &= \{ q \in \mathcal{L}^2(\Omega), \nabla q \in \mathcal{L}^2(\Omega) \} \\ \mathcal{H}_0^1(\Omega) &= \{ q \in \mathcal{H}^1(\Omega), q = 0 \text{ sur } \partial\Omega \} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Afin de résoudre le problème, il est nécessaire d'approcher les espaces continus par des espaces discrets  $\mathcal{V}_h$  et  $\mathcal{P}_h$ . Le problème sera résolu sur un domaine discrétisé, décomposé en simplexes, c'est-à-dire en triangles si le calcul est en 2D ou en tétraèdres si le calcul est en 3D. La formulation faible discrète du problème (2.14) s'écrit alors :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} p_h \nabla \cdot \vec{w}_h \, d\Omega - \int_{\Omega} 2\eta \epsilon(\vec{v}_h) : \epsilon(\vec{w}_h) \, d\Omega = 0 \\ \int_{\Omega} q_h \nabla \cdot \vec{v}_h \, d\Omega = 0 \end{cases} \quad (2.16)$$

avec  $(\vec{v}_h, p_h) \in (\mathcal{V}_h \times \mathcal{P}_h)$

Nous utilisons une méthode d'éléments finis  $P_1$ , c'est-à-dire que la vitesse et la pression sont des fonctions linéaires continues par morceau (ou encore continues sur les éléments). Il est bien connu que l'approximation  $P_1/P_1$  pour les éléments finis mixtes conduit à une formulation instable car la condition de Brezzi-Babuska n'est pas respectée pour le problème de Stokes. Pour rendre la formulation stable, nous utilisons le MINI-élément [ABF84] (figure 2.16) pour lequel l'espace des fonctions pour la vitesse est enrichi avec une fonction bulle :

$$\mathcal{V}_h = V_h \oplus V_b \quad (2.17)$$

Cette fonction bulle est une fonction valant 1 au barycentre de l'élément et 0 sur les bords. Pour respecter ces conditions, la fonction bulle doit être de degré élevé. Par exemple, en 2D, elle doit être cubique. Cependant, dans le cas d'éléments linéaires, comme nous les utilisons ici, il n'est pas intéressant d'utiliser une bulle cubique. En effet, il est nécessaire

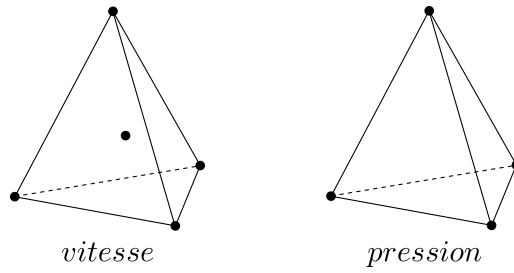


FIGURE 2.16 – MINI-élément  $P_1^+ - P_1$ .

d'utiliser une intégration numérique plus précise, ce qui engendre un coût de calcul plus important, simplement pour calculer un terme de stabilisation.

Le choix a été fait d'interpoler la fonction bulle par une fonction linéaire par morceau. Dans l'exemple d'une bulle en 2D, elle sera approximée par une fonction linéaire sur chacun des trois sous-triangles du triangle considéré (figure 2.17). En numérotant les sous-

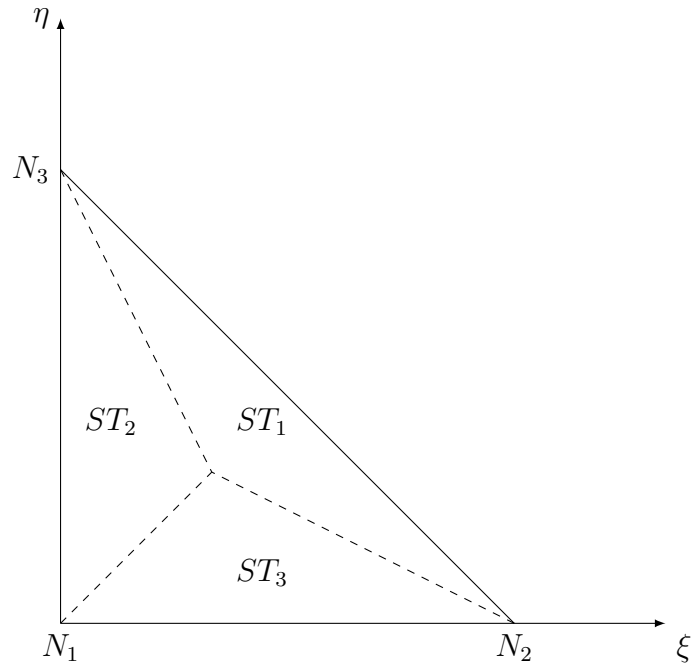


FIGURE 2.17 – Représentation des sous-triangles d'un triangle de référence.

triangles de telle manière que leur numéro corresponde à celui du nœud opposé, comme c'est le cas figure 2.17, nous pouvons exprimer la fonction de forme sur un sous-triangle en utilisant les fonctions de forme du triangle de la manière suivante :

$$\phi_{ST_i} = N\phi_i \quad (2.18)$$

où  $N$  est le nombre de nœuds de l'élément,  $\phi_{ST_i}$  la fonction de forme de la bulle sur le sous-triangle  $i$  et  $\phi_i$  la fonction de forme du triangle  $i$ . Ainsi, pour le cas 2D, nous aurons :

$$\begin{cases} \phi_b = 3(1 - \xi - \zeta) & \text{sur } ST_1 \\ \phi_b = 3\xi & \text{sur } ST_2 \\ \phi_b = 3\zeta & \text{sur } ST_3 \end{cases} \quad (2.19)$$

Perchat, dans sa thèse [Per00] justifie le choix de cette approximation pour la fonction bulle.

La forme discrète (2.16) de l'équation (2.14) dans l'espace défini en (2.17), s'écrit donc :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} 2\eta\epsilon(\tilde{v}_h) : \epsilon(\tilde{w}_h) \, d\Omega - \int_{\Omega} p_h \nabla \cdot \tilde{w}_h \, d\Omega = 0 \\ - \int_{\Omega} q_h \nabla \cdot \tilde{v}_h \, d\Omega = 0 \end{cases} \quad (2.20)$$

avec  $\tilde{v}_h \in \mathcal{V}_h$ . Ainsi, nous pouvons écrire  $\tilde{v}_h = \vec{v}_h + \vec{v}_h^b$  avec  $\vec{v}_h^b$  la vitesse de bulle et  $\vec{v}_h$  la vitesse linéaire. Nous pouvons écrire  $\tilde{w}_h = \vec{w}_h + \vec{w}_h^b$  pour la fonction test associée à la vitesse. En remplaçant l'expression de  $\tilde{v}_h$  et  $\tilde{w}_h$  dans l'équation précédente et en utilisant les propriétés d'orthogonalité de l'espace de bulle, nous pouvons écrire :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} 2\eta\epsilon(\vec{v}_h) : \epsilon(\vec{w}_h) \, d\Omega - \int_{\Omega} p_h \nabla \cdot \vec{w}_h \, d\Omega = 0 \\ \int_{\Omega} 2\eta\epsilon(\vec{v}_h^b) : \epsilon(\vec{w}_h^b) \, d\Omega - \int_{\Omega} p_h \nabla \cdot \vec{w}_h^b \, d\Omega = 0 \\ - \int_{\Omega} q_h \nabla \cdot \vec{v}_h \, d\Omega - \int_{\Omega} q_h \nabla \cdot \vec{v}_h^b \, d\Omega = 0 \end{cases} \quad (2.21)$$

Sous forme matricielle, nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} A_{vv} & 0 & A_{vp}^T \\ 0 & A_{bb} & A_{bp}^T \\ A_{vp} & A_{bp} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{v}_h \\ \vec{v}_h^b \\ p_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

Les degrés de liberté associés à la bulle peuvent être éliminés par une méthode de condensation statique. Pour cela, nous allons exprimer le terme en  $\vec{v}_h^b$  en utilisant la deuxième ligne du système matriciel. Du fait que la fonction bulle s'annule sur les frontières de l'élément, nous pouvons écrire les relations suivantes pour chaque élément :

$$A_{bb}\vec{v}_h^b = f - A_{bp}^T p_h \Rightarrow \vec{v}_h^b = -A_{bb}^{-1} A_{bp}^T p_h \quad (2.23)$$

et le remplacer dans la troisième :

$$A_{vp}\vec{v}_h + A_{bp}\vec{v}_h^b = 0 \Rightarrow A_{vp}\vec{v}_h - A_{bp}A_{bb}^{-1}A_{bp}^T p_h = 0 \quad (2.24)$$

De manière plus détaillée, nous pouvons écrire (2.21) sur l'élément  $\mathcal{K}$  :

$$\forall \mathcal{K} \in \Omega_h \quad \int_{\mathcal{K}} 2\eta\epsilon(v_{h\mathcal{K}}^b \phi_b) : \epsilon(\phi_b) \, d\Omega = - \int_{\mathcal{K}} \nabla p_{h\mathcal{K}} \phi_b \, d\Omega \quad (2.25)$$

où la vitesse de bulle sur l'élément  $\mathcal{K}$  s'écrit  $v_{h\mathcal{K}}^b|_{\mathcal{K}} = v_{h\mathcal{K}}^b \phi_b$ . En sortant la vitesse de l'intégrale et en exploitant le fait que la fonction test est choisie arbitrairement [MK06], nous obtenons :

$$v_{h\mathcal{K}}^b \left( \int_{\mathcal{K}} \eta(\nabla \phi_{b\mathcal{K}} \cdot \nabla \phi_{b\mathcal{K}}) \, d\Omega \, \mathbb{I} + \int_{\mathcal{K}} \eta(\nabla \phi_{b\mathcal{K}} \otimes \nabla \phi_{b\mathcal{K}}) \, d\Omega \right) = - \int_{\mathcal{K}} \nabla p_{\mathcal{K}} \phi_{b\mathcal{K}} \, d\Omega \quad (2.26)$$

En substituant  $v_h^b$  dans la dernière ligne du système (2.21) nous obtenons :

$$\int_{\Omega} q_h \nabla \cdot v_h \, d\Omega + \sum_{\mathcal{K}} \int_{\mathcal{K}} \tau_{\mathcal{K}} \nabla q_h \cdot \nabla p_h \, d\Omega = 0 \quad (2.27)$$

avec

$$\tau_{\mathcal{K}} = \phi_{b_{\mathcal{K}}} \int_{\mathcal{K}} \phi_{b_{\mathcal{K}}} \, d\Omega \left( \int_{\mathcal{K}} \eta (\nabla \phi_{b_{\mathcal{K}}} \cdot \nabla \phi_{b_{\mathcal{K}}}) \, d\Omega \, \mathbb{I} + \int_{\mathcal{K}} \eta (\nabla \phi_{b_{\mathcal{K}}} \otimes \nabla \phi_{b_{\mathcal{K}}}) \, d\Omega \right)^{-1} \quad (2.28)$$

en supposant que  $\nabla p_h$  est constant sur chaque élément.

De cette manière, la formulation stabilisée classique [Per00, NS98] est obtenue pour un facteur de stabilisation scalaire  $\tau_{\mathcal{K}} = \beta^2 h_{\mathcal{K}}^2$  avec  $h_{\mathcal{K}}$  la taille de maille de l'élément  $\mathcal{K}$  et la matrice de stabilisation  $C = -\beta^2 C_h$  avec

$$C_h(p_h, q_h) = \sum_{\mathcal{K}} h_{\mathcal{K}}^2 \int_{\mathcal{K}} \nabla p_h \cdot \nabla q_h \, d\Omega. \quad (2.29)$$

Pour cette formulation, le choix du facteur  $\beta$  est très important et la valeur optimale habituellement choisie est  $\beta \sim 1/10$  [NS98]. Avec notre formulation (2.28),  $\tau_{\mathcal{K}}$  est un tenseur évalué sur chaque élément pour lequel la forme de l'élément est naturellement prise en compte. En pratique, il a été observé que les oscillations sur la pression deviennent négligeables lorsque la matrice  $\tau_{\mathcal{K}}$  est divisée par  $V_{\mathcal{K}}^2$  où  $V_{\mathcal{K}}$  est le volume de l'élément  $\mathcal{K}$ .

Après condensation, le système obtenu est le suivant :

$$\begin{pmatrix} A_{vv} & A_{vp}^T \\ A_{vp} & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_h \\ p_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

avec

$$C = -A_{bp} A_{bb}^{-1} A_{bp}^T \quad (2.31)$$

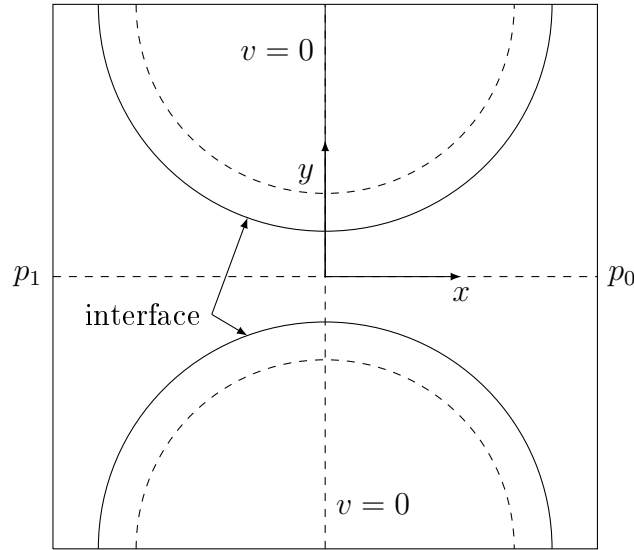
Nous avons ainsi obtenu un système stabilisé, avec une formulation linéaire, sans l'utilisation d'éléments de degrés supérieurs, ce qui est un atout considérable pour des calculs en trois dimensions sur des géométries complexes dont les maillages peuvent devenir extrêmement lourds.

## 2.2.2 Stabilisation de la pression

Dans cette partie, nous développons une étude sur la stabilisation de la méthode éléments finis utilisée au laboratoire lorsqu'elle est appliquée à un problème fluide/solide avec une approche d'immersion de domaines. En effet, des difficultés, dont nous parlons dans la suite de ce chapitre, apparaissent et perturbent les résultats obtenus.

### 2.2.2.1 Problématique

Des oscillations de pression sont observées lorsque le calcul contient à la fois des zones fluides et solides. Dans l'exemple schématisé figure 2.18, une différence de pression est imposée sur les frontières d'entrée et de sortie. La composante  $y$  de la vitesse est nulle sur les faces d'entrée et de sortie pour imposer un écoulement selon  $x$  et, sur les autres



**FIGURE 2.18** – Représentation schématique de la géométrie et des conditions aux limites d'un cas d'écoulement entre deux fibres, pour un arrangement régulier.

faces frontières, pour respecter des conditions de symétrie. La vitesse est imposée nulle sur une zone intérieure aux fibres. Grâce à la forte viscosité qui leur est donnée, la condition d'indéformabilité est propagée jusqu'à la surface des fibres.

Dans ce cas, nous observons un écoulement tel que celui illustré par le champ de vitesse de la figure 2.19 pour un maillage isotrope et de la figure 2.20 pour un maillage anisotrope. Ce champ de vitesse est tout a fait acceptable pour ces simulations. En revanche, nous observons de fortes oscillations du champ de pression (figures 2.21 et 2.22). Ce champ est important pour nos applications, puisque la perméabilité est directement dépendante de son gradient. Ainsi, de fortes oscillations peuvent être extrêmement problématiques pour le calcul de la perméabilité. Elles apparaissent à cause d'un problème de stabilisation dans la formulation, que nous détaillons dans la suite. De plus, les oscillations sont davantage présentes dans la zone solide (figure 2.23). L'affichage du champ de pression en élévation nous permet de bien repérer les oscillations qui ne seraient pas forcément autant visibles en 2D, avec une échelle de couleurs. La couleur affichée sur la surface représentant la pression nous permet de bien repérer les zones fluides et solides. Nous voyons que la zone fluide présente un champ de pression bien lisse. En revanche, en plus des oscillations au niveau de la zone de mélange du champ de viscosité, nous remarquons de petites oscillations de la pression dans la zone solide. Cela indique bien que la stabilisation n'est pas parfaite dans la zone solide où la viscosité est bien plus importante que dans le fluide.

La cause du problème est directement liée à la méthode utilisée pour la stabilisation de la formulation éléments finis. En effet, l'utilisation du mini-élément nous amène à résoudre le système donné en (2.21), que nous répétons ci-dessous :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} 2\eta\epsilon(\vec{v}_h) : \epsilon(\vec{w}_h) \, d\Omega - \int_{\Omega} p_h \nabla \cdot \vec{w}_h \, d\Omega = 0 \\ \int_{\Omega} 2\eta\epsilon(\vec{v}_h^b) : \epsilon(\vec{w}_h^b) \, d\Omega - \int_{\Omega} p_h \nabla \cdot \vec{w}_h^b \, d\Omega = 0 \\ - \int_{\Omega} q_h \nabla \cdot \vec{v}_h \, d\Omega - \int_{\Omega} q_h \nabla \cdot \vec{v}_h^b \, d\Omega = 0 \end{cases} \quad (2.21)$$

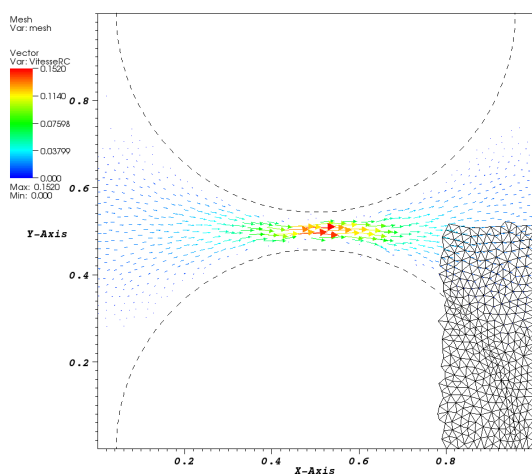


FIGURE 2.19 – Champ de vitesse pour un écoulement entre deux fibres, pour un maillage isotrope.

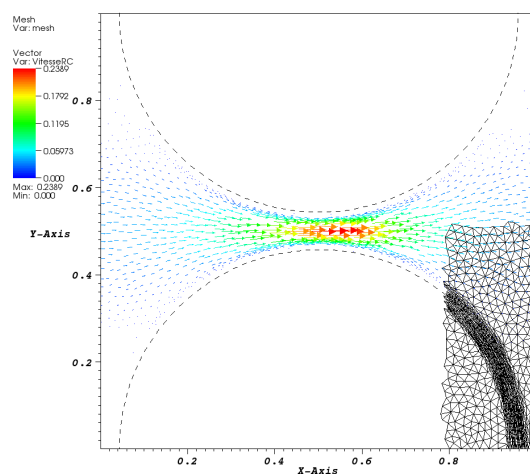


FIGURE 2.20 – Champ de vitesse pour un écoulement entre deux fibres, pour un maillage anisotrope.

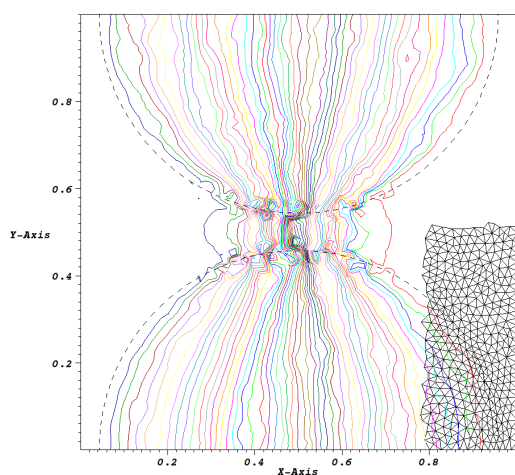


FIGURE 2.21 – Isovaleurs du champ de pression, pour un maillage isotrope.

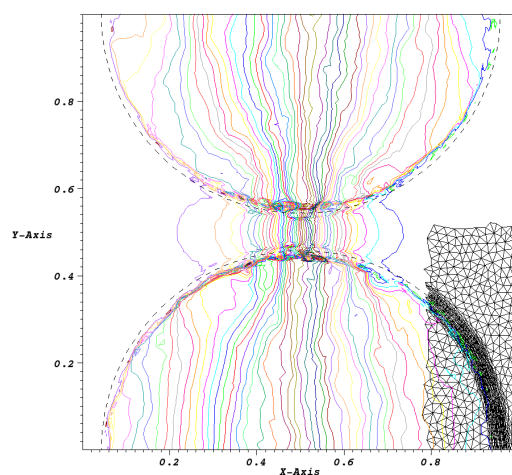
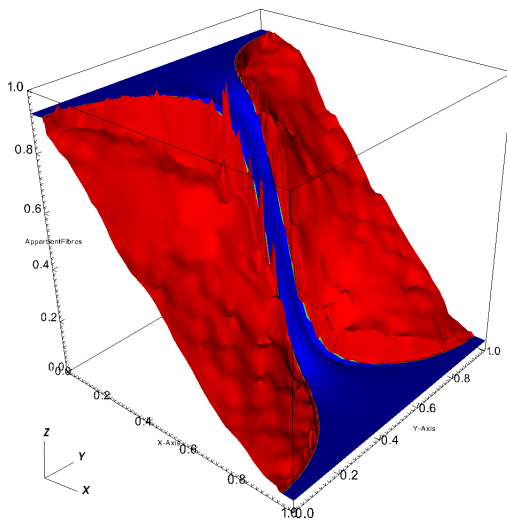


FIGURE 2.22 – Isovaleurs du champ de pression, pour un maillage anisotrope.



**FIGURE 2.23** – Pression, ramenée à l'intervalle  $[0, 1]$ , donnée en axe  $z$ . La zone bleue correspond à la zone fluide, la zone rouge à la zone solide.

Dans l'espace des fonctions bulle, nous retrouvons un terme qui fait intervenir la viscosité, la sous-matrice  $C$ , permettant de stabiliser le système. Nous la retrouvons dans l'expression matricielle de ce système condensé (2.30) :

$$\begin{pmatrix} A_{vv} & A_{vp}^T \\ A_{vp} & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{v}_h \\ p_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

Cette sous-matrice  $C$  est directement dépendante de  $\eta^{-1}$ . Ainsi, lorsque la viscosité augmente, le terme de stabilisation diminue. Pour de grandes valeurs de la viscosité comme celles que nous imposons dans le solide, le terme de stabilisation tend vers zéro. On se retrouve ainsi avec une formulation non stabilisée, proche d'une formulation  $P_1 - P_1$ , dans la zone solide.

### 2.2.2.2 Modification de la formulation stabilisée

Comme expliquée dans la littérature [Per00, NS98], une manière classique d'obtenir une stabilisation globale pour une formulation éléments finis, est d'utiliser le coefficient  $C_h$  suivant :

$$C_h(p, q) = \sum_i h_i^2 \int_{\Omega_i} \nabla p_h \nabla q_h \, d\Omega_i \quad (2.32)$$

avec  $h_i$  la taille de l'élément  $\Omega_i$  et de résoudre :

$$\begin{pmatrix} A_{vv} & A_{vp}^T \\ A_{vp} & -\beta^2 C_h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{v}_h \\ p_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

Nous pouvons faire un lien entre le coefficient  $C$  obtenu en condensant la bulle et le coefficient de stabilisation classique  $-\beta C_h$ . La principale différence est que, dans le cas de l'utilisation du MINI-élément, le paramètre  $\beta$  est obtenu de manière naturelle par la formulation et est directement fonction de la forme de l'élément. Dans certaines formulations

stabilisées [NS98], ce coefficient  $\beta$  et la taille de maille  $h_i$  sont définis comme des constantes dans tout le domaine de calcul. Ces méthodes permettent ainsi une sur-stabilisation locale lorsque les paramètres sont trop grands pour la taille de maille locale. Cela nous amène à modifier le terme de stabilisation obtenu afin de retrouver une stabilisation dans le domaine solide.

Nous avons choisi, pour corriger le problème, de différencier viscosité pour les termes en vitesse linéaire et viscosité pour les termes de bulle. Le terme de viscosité intervenant dans le terme en  $\epsilon(\vec{v}_h^b) : \epsilon(\vec{w}_h^b)$  du système (2.21) peut ainsi être choisi différent de celui intervenant dans le terme en  $\epsilon(\vec{v}_h) : \epsilon(\vec{w}_h)$ . La formulation faible discrète de l'équation de Stokes s'écrit donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} 2\eta\epsilon(\vec{v}_h) : \epsilon(\vec{w}_h) \, d\Omega - \int_{\Omega} p_h \nabla \cdot \vec{w}_h \, d\Omega = 0 \\ \int_{\Omega} 2\eta_b\epsilon(\vec{v}_h^b) : \epsilon(\vec{w}_h^b) \, d\Omega - \int_{\Omega} p_h \nabla \cdot \vec{w}_h^b \, d\Omega = 0 \\ - \int_{\Omega} q_h \nabla \cdot \vec{v}_h \, d\Omega - \int_{\Omega} q_h \nabla \cdot \vec{v}_h^b \, d\Omega = 0 \end{array} \right. \quad (2.34)$$

Cela nous permet de choisir une viscosité pour la vitesse "bulle" du système d'équations précédent qui est différente de la viscosité du fluide et donc de localement augmenter le coefficient de stabilisation.

### 2.2.2.3 Validation de la stabilisation bulle modifiée

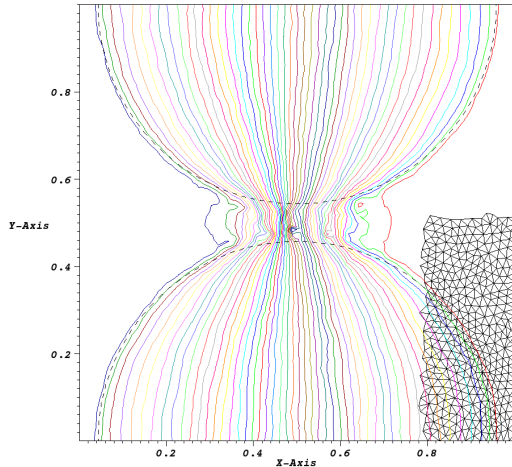
Les premières modifications ont consisté à donner à la viscosité de bulle la valeur de la viscosité du fluide partout dans le domaine. Ainsi, même dans la zone solide, la viscosité de bulle a la valeur de celle du fluide et donc le terme de stabilisation garde une valeur suffisamment importante pour stabiliser la formulation. Lorsqu'on applique ceci au cas donné en exemple en 2.2.2.1 (page 43), figures 2.19 à 2.22, nous obtenons un champ de pression beaucoup plus lisse, comme nous pouvons le voir figures 2.24 à 2.26.

Ces résultats montrent que la technique de modification de la viscosité de bulle est efficace. Elle nous permet de limiter les oscillations de pression et donc d'avoir des gradients de pression beaucoup moins grands localement, ce qui est très important dans le calcul de la perméabilité. Plusieurs choix peuvent cependant être faits pour cette viscosité. Nous comparons la solution donnée ci-dessus avec un autre choix de viscosité.

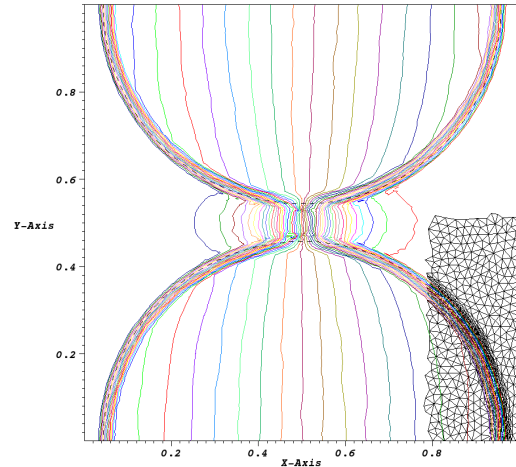
Afin d'étudier l'effet du choix de la viscosité de bulle sur le gradient de pression calculé, nous nous plaçons dans le cas de l'écoulement de Poiseuille entre deux plaques solides (figure 2.29, page 53). Nous montrons ici que notre stabilisation modifiée donne de bons résultats pour la méthode d'immersion de domaines (figure 2.27).

La seconde modification consiste à ajouter une sur-stabilisation au niveau de la zone de variation de la viscosité, tout en conservant une viscosité de bulle constante ailleurs :

$$\eta_b = \begin{cases} \eta_f & \text{if } \alpha < -e \\ 10^{-3}\eta_f & \text{if } -e < \alpha < e \\ \eta_f & \text{if } \alpha > e \end{cases} \quad (2.35)$$



**FIGURE 2.24** – Isovaleurs du champ de pression, pour un maillage isotrope, avec  $\eta_b = \eta_f$  dans tout le domaine de calcul.



**FIGURE 2.25** – Isovaleurs du champ de pression, pour un maillage anisotrope, avec  $\eta_b = \eta_f$  dans tout le domaine de calcul.

La zone de mélange pour la viscosité de bulle est décentrée vers l'intérieur du solide, par rapport à la zone de mélange de la viscosité. Cette méthode est possible car le solide est à vitesse nulle. Si ce n'est pas le cas, la sur-stabilisation peut fausser le résultat.

Les calculs ont été fait pour les trois types de stabilisation, en utilisant un maillage anisotrope, avec les paramètres suivants :  $1/\epsilon = 0.02$  ,  $1/\rho = 0.005$ ,  $e = 0.15$ ,  $L = 1$  et  $H = 0.25$ .

La figure 2.27 donne le champ de pression normalisé pour les trois méthodes. Il est évident que la troisième méthode diminue les oscillations de pression au voisinage de l'interface fluide-solide. De plus, comme indiqué dans le tableau 2.1, la précision des calculs est meilleure dans ce cas. Il faut cependant préciser que d'un point de vue pratique, étant donné que la dernière technique de stabilisation a été testée assez tard dans le déroulement de la thèse, tous les autres calculs de la thèse sont faits en utilisant la seconde méthode, c'est-à-dire l'utilisation de la viscosité du fluide dans tout le domaine.

**TABLE 2.1** – Influence de la viscosité de bulle sur la norme  $L^2$  de l'erreur sur la pression.  $\tilde{K} = 0.020833333$  et  $\Delta\tilde{p} = 100$

$\eta_b$	$\eta$	$\eta_f$	$\eta_b$ (2.35)	Solide non immergé
$\ e_h(u)\ $	0.0525193	0.0523286	0.0512535	0.0012711
$\ e_h(\nabla p)\ $	314.135	158.599	32.7383	19.415
$\ e_h(p)\ $	1.5817	1.24925	0.304321	0.16379
$ K - \tilde{K} $	0.008066533 (38.7%)	0.006404133 (30.7%)	0.001616533 (7.8%)	0.000105333 (0.5%)

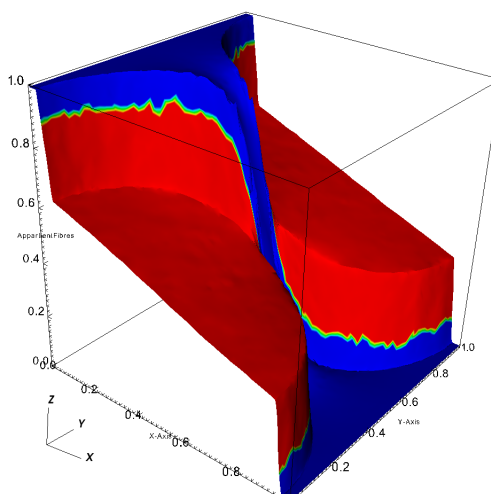


FIGURE 2.26 – Pression, ramenée à l'intervalle  $[0, 1]$ , donnée en axe  $z$ , avec  $\eta_b = \eta_f$  dans tout le domaine de calcul. La zone bleue correspond à la zone fluide, la zone rouge à la zone solide.

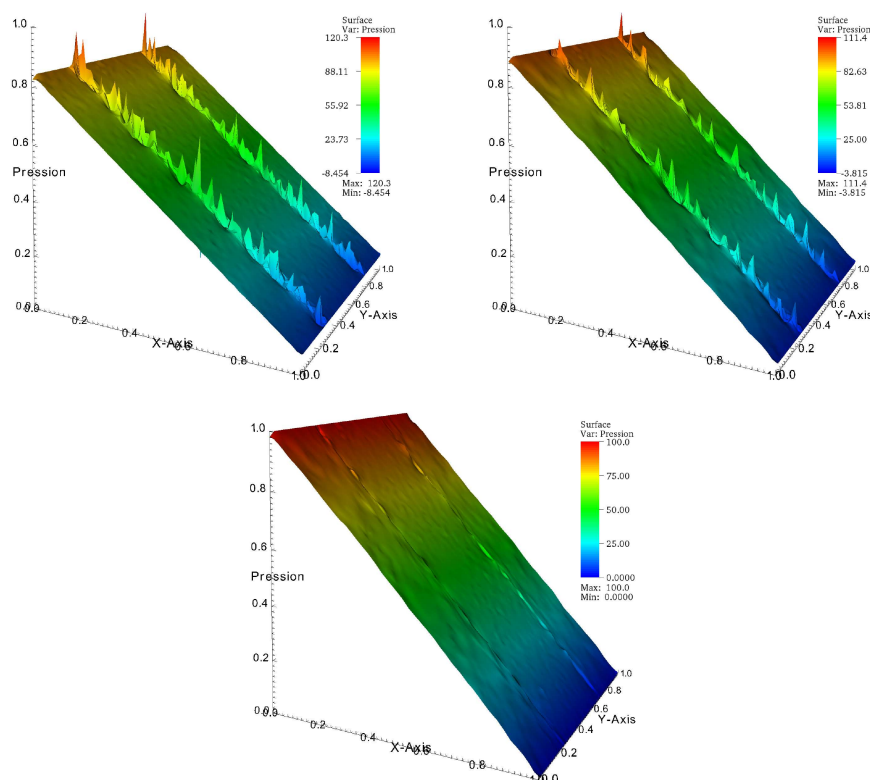


FIGURE 2.27 – Champ de pression pour un maillage anisotrope. L'axe  $z$  donne la valeur du champ de pression normalisé en utilisant  $z_{\min}$  et  $z_{\max}$ . En haut à gauche, nous donnons le champ de pression pour la méthode classique de stabilisation. En haut à droite, une stabilisation en utilisant une viscosité de bulle constante  $\eta_b = \eta_{\text{fluide}}$ . En bas, la viscosité de bulle est définie par la relation (2.35).

### 2.2.3 Résolution numérique du couplage Stokes-Darcy

Étant données les similitudes entre l'équation de Brinkman et l'équation de Stokes, nous allons modifier la forme faible (2.14) en ajoutant la perméabilité et le terme de Darcy, tout en restant sur les mêmes espaces que ceux utilisés dans l'équation de Stokes (voir 2.2.1 p. 40). Ainsi, nous pouvons écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \left[ \frac{\eta}{K} \vec{v}_h \vec{w}_h + 2\Phi\eta\epsilon(\vec{v}_h) : \epsilon(\vec{w}_h) \right] d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\eta}{K} \vec{v}_h^b \vec{w}_h d\Omega - \int_{\Omega} p_h \nabla \cdot \vec{w}_h d\Omega = 0 \\ \int_{\Omega} \frac{\eta}{K} \vec{v}_h \vec{w}_h^b d\Omega + \int_{\Omega} \left[ \frac{\eta}{K} \vec{v}_h^b \vec{w}_h^b + 2\Phi\eta\epsilon(\vec{v}_h^b) : \epsilon(\vec{w}_h^b) \right] d\Omega - \int_{\Omega} p_h \nabla \cdot \vec{w}_h^b d\Omega = 0 \\ - \int_{\Omega} q_h \nabla \cdot \vec{v}_h d\Omega - \int_{\Omega} q_h \nabla \cdot \vec{v}_h^b d\Omega = 0 \end{array} \right. \quad (2.36)$$

Sous forme matricielle, nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} A_{vv} & A_{vb}^T & A_{vp}^T \\ A_{vb} & A_{bb} & A_{bp}^T \\ A_{vp} & A_{bp} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{v}_h \\ \vec{v}_h^b \\ p_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.37)$$

Cette fois, l'élimination des termes de bulle par condensation est plus complexe que pour l'équation de Stokes. Comme pour Stokes, nous sortons  $b_h$  de la seconde ligne du terme matriciel. Cela nous donne l'expression suivante :

$$\vec{v}_h^b = -A_{bb}^{-1} A_{vb}^T \vec{v}_h - A_{bb}^{-1} A_{bp}^T p_h \quad (2.38)$$

Nous devons cette fois remplacer  $\vec{v}_h^b$  dans la première et la troisième équation du système (2.37) :

$$\begin{aligned} (A_{vv} - A_{vb}^T A_{bb}^{-1} A_{vb}) \vec{v}_h + (A_{vp}^T - A_{vb}^T A_{bb}^{-1} A_{bp}^T) p_h &= 0 \\ (A_{vp} - A_{bp} A_{bb}^{-1} A_{vb}) \vec{v}_h - A_{bp} A_{bb}^{-1} A_{bp}^T p_h &= 0 \end{aligned} \quad (2.39)$$

La forme matricielle condensée des équations de Brinkman et de continuité stabilisées est la suivante :

$$\begin{pmatrix} \tilde{A}_{vv} & \tilde{A}_{vp}^T \\ \tilde{A}_{vp} & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{v}_h \\ p_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

où  $C$  est le même que pour le système de Stokes et est donné par la relation suivante :

$$C = -A_{bp} A_{bb}^{-1} A_{bp}^T \quad (2.41)$$

et où les termes de stabilisation interviennent cette fois dans tous les autres termes de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{vv} &= A_{vv} - A_{vb}^T A_{bb}^{-1} A_{vb} \\ \tilde{A}_{vp} &= A_{vp} - A_{bp} A_{bb}^{-1} A_{vb} \end{aligned} \quad (2.42)$$

Comme pour le cas des domaines immergés, ce terme de viscosité est proportionnel à l'inverse de la viscosité. Ainsi, plus la viscosité augmente, moins le schéma sera stable. Il faut aussi remarquer que le terme est dépendant de la perméabilité  $K$ . Ainsi, les mêmes problèmes de stabilisation que ceux observés en 2.2.2 vont apparaître pour des perméabilités trop faibles. Dans un premier temps, en cas de problème de stabilisation, nous modifions le terme de viscosité de bulle.

## 2.3 Validation de la méthode d'immersion de domaines

Afin de valider la méthode d'immersion de domaines, nous allons nous placer dans le cas d'un écoulement de Poiseuille pour lequel la solution analytique peut être calculée facilement. Un écoulement de Poiseuille entre deux plaques infinies nous permet de valider la méthode en 2D et 3D, et un Poiseuille dans un tube nous permet de la valider en 3D.

### 2.3.1 Écoulements de Poiseuille plan et de Poiseuille tube

#### 2.3.1.1 Solution analytique pour un écoulement de Poiseuille

L'écoulement de Poiseuille étudié est représenté figure 2.28. Pour le cas 2D, le champ de vitesse s'écrit sous la forme suivante :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x(y) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

L'équation de Stokes s'écrit :

$$\eta \Delta \vec{v} - \nabla p = 0 \quad (2.44)$$

En introduisant le champ de vitesse défini précédemment, nous obtenons :

$$\eta \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (2.45)$$

En posant les conditions aux limites suivantes :

$$\left. \frac{\partial v_x}{\partial y} \right|_0 = 0 \text{ et } v_x(y = \pm H) = 0 \quad (2.46)$$

nous obtenons le champ de vitesse suivant :

$$v_x(y) = \frac{\Delta p}{2\eta L} (y^2 - H^2) \quad (2.47)$$

où  $\Delta p = p(L) - p(0)$ .

Pour l'écoulement de Poiseuille 3D entre deux plans parallèles, étant donné que nous ne considérons pas de dépendance en  $z$ , le champ de vitesse a la même expression que pour le Poiseuille 2D.

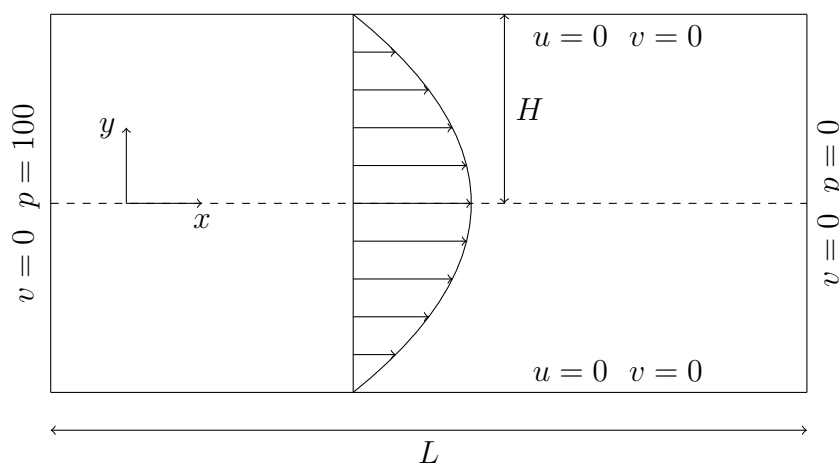


FIGURE 2.28 – Schéma d'un écoulement de Poiseuille entre deux plans

Pour l'écoulement de Poiseuille dans un tube, il faut se placer dans un repère cylindrique  $(r, \theta, x)$ . Nous considérons que l'axe du tube est orienté dans la direction  $x$ . Pour des raisons de symétries, il n'y a pas de composantes selon  $r$  et  $\theta$  de la vitesse. La composante  $x$  de la vitesse s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_x}{\partial r} \right) = \frac{\Delta p}{\eta L} \quad (2.48)$$

Cela donne une vitesse de la forme :

$$v_x = \frac{\Delta p}{2\eta L} r^2 + \frac{A}{r} + B \quad (2.49)$$

Nous posons les conditions aux limites suivantes :

$$v_x(r = H) = 0 \quad \text{et} \quad \left. \frac{\partial v_x}{\partial r} \right|_{r=0} = 0 \quad (2.50)$$

où  $H$  est cette fois le rayon du tube. Ainsi, le champ de vitesse s'écrit finalement :

$$v_x = \frac{\Delta p}{4\eta L} (r^2 - H^2) \quad (2.51)$$

### 2.3.1.2 Le calcul d'erreur

Dans la suite, nous faisons des calculs d'erreurs, afin de tester la validité de nos méthodes. Dans le cas de l'écoulement de Poiseuille, la solution analytique est connue. Nous pouvons donc définir l'erreur  $e_h(v)$  comme la différence dans  $\Omega_h$  entre la solution analytique  $\tilde{v}$  et la solution calculée  $v_h$ ,  $e_h(v) = v_h - \tilde{v}$ . Nous définissons, de la même manière,  $e_h(p)$  pour la pression. Nous pouvons calculer la norme  $L^2$  de l'erreur sur le domaine discret  $\Omega_h$  :

$$\|e_h(v)\|_{L^2(\Omega_h)} = \sqrt{\frac{1}{\Omega_h} \int_{\Omega_h} e_h(v)^2 \, d\Omega} \quad (2.52)$$

$$\|e_h(p)\|_{L^2(\Omega_h)} = \sqrt{\frac{1}{\Omega_h} \int_{\Omega_h} e_h(p)^2 \, d\Omega} \quad (2.53)$$

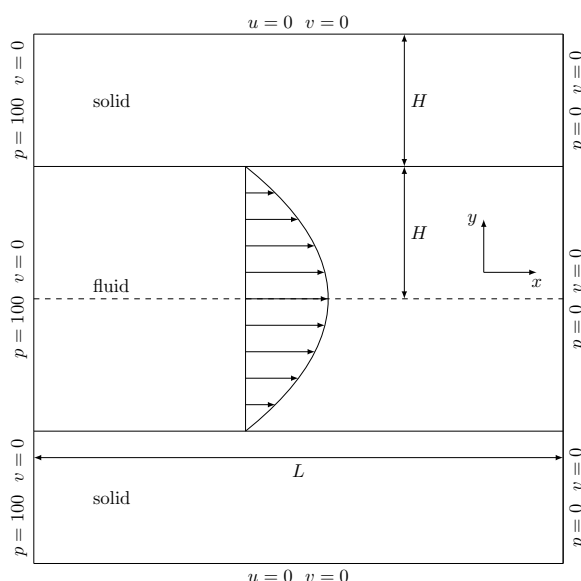
De la même manière, l'erreur sur le gradient de pression est définie par :

$$\|e_h(\nabla p)\|_{L^2(\Omega_{f,h})} = \sqrt{\frac{1}{\Omega_{f,h}} \int_{\Omega_h} \mathbb{I}_f (\nabla p_h - \nabla \tilde{p})^2 \, d\Omega} \quad (2.54)$$

Nous avons calculé l'erreur sur le gradient de pression pour la partie fluide seulement, seule partie qui nous intéresse. Il faut noter que dans le cas non-immergé  $\mathbb{I}_f \equiv 1$ .

### 2.3.1.3 Résolution avec la méthode d'immersion de domaines

Le domaine de calcul est représenté schématiquement sur la figure 2.29. Les interfaces fluide-solide sont placées en  $y = \pm H$ . Le solide a une épaisseur de  $H$ , le domaine a donc une hauteur de  $4H$ . La condition aux limites de vitesse nulle n'est pas appliquée au solide



**FIGURE 2.29** – Schéma d'un écoulement de Poiseuille avec la méthode d'immersion de domaines.

complet, mais seulement aux frontières en  $y = \pm 2H$ . La viscosité du solide étant définie à  $\eta_s = 5000$ , la condition de vitesse nulle est ainsi propagée à l'ensemble de la zone solide.

La méthode d'immersion de domaines est utilisée dans le cas où les interfaces ne sont pas maillées. Les analyses effectuées dans la suite nous permettent de valider l'approche et d'estimer les erreurs dues à l'étalement de l'interface et à la discrétisation près de celle-ci.

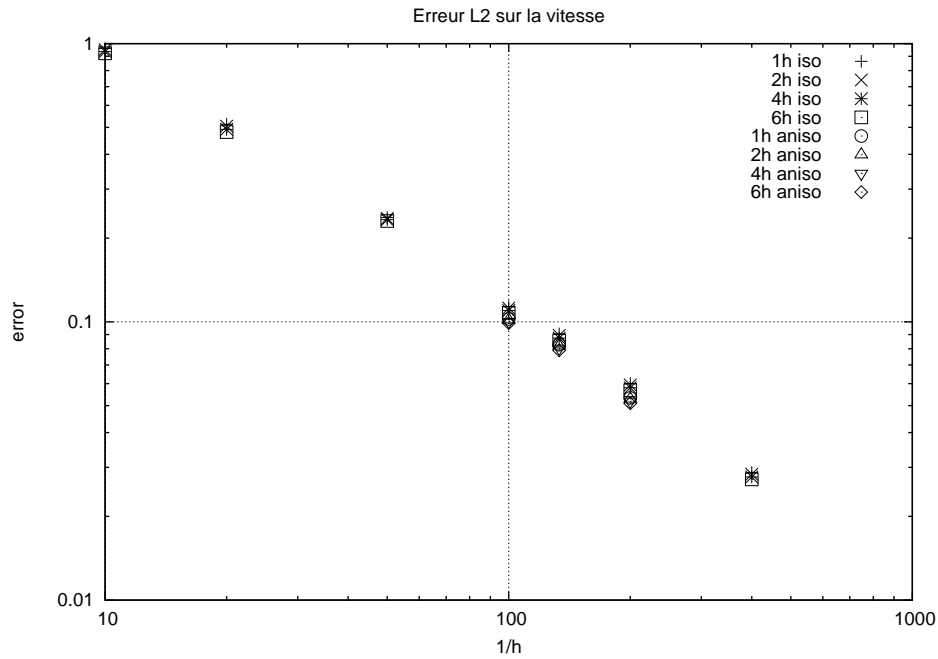
Il semble correct de penser que le type de loi de mélange et l'épaisseur de celle-ci, directement dépendante de la taille de maille au voisinage de l'interface, sont d'une grande importance pour la précision des calculs. Une étude de sensibilité à ces paramètres est donnée dans la suite, dans le cas immergé où l'interface fluide solide est diffuse et n'est pas maillée exactement.

#### 2.3.1.4 Étude de sensibilité aux paramètres numériques

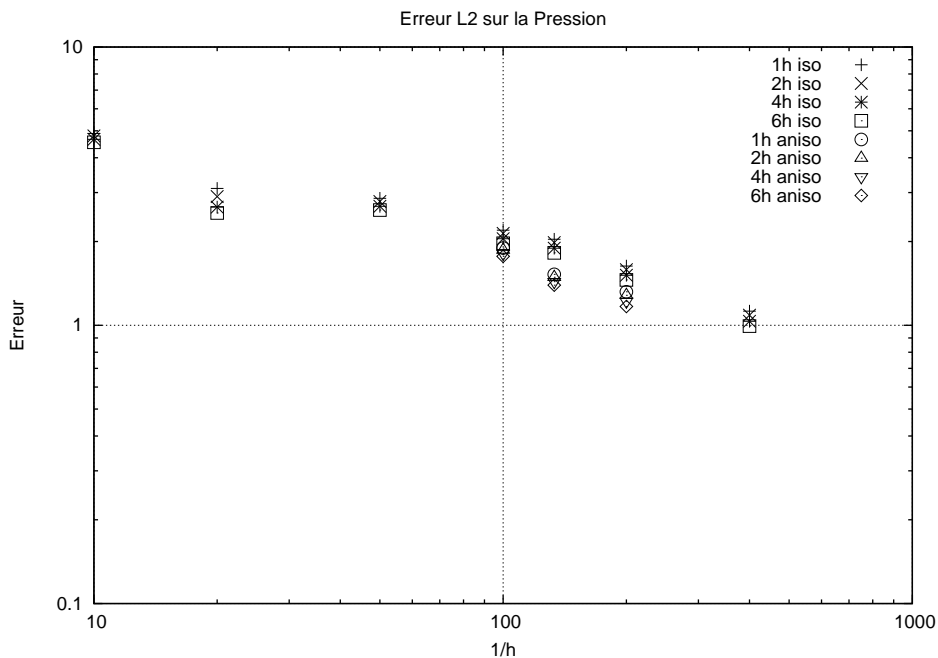
La manière de mélanger les propriétés physiques des différentes phases a une grande importance pour le calcul. Mais son étude de sensibilité est relativement complexe. En effet, l'épaisseur de la zone de mélange est directement liée à la taille de maille locale, puisque cette épaisseur ne peut pas être plus petite qu'une taille de maille. Ainsi, l'étude de sensibilité à l'épaisseur de la zone de mélange et l'étude de sensibilité à la discrétisation de l'interface ne peuvent pas être faites séparément.

Il faut distinguer deux types de maillage : les maillages isotropes et les maillages anisotropes. Pour ces derniers, l'anisotropie est calculée pour représenter au mieux l'interface entre le solide et le fluide, avec un nombre de degrés de liberté moindre pour le calcul.

Les résultats de calcul sont donnés figures 2.30 et 2.31 où nous avons tracé l'erreur sur la vitesse et sur la pression en fonction de  $1/h$ . Chaque courbe des graphiques représente l'erreur pour une épaisseur de mélange de la viscosité entre fluide et solide exprimée en taille de maille et pour un maillage qui est soit isotrope, soit anisotrope.

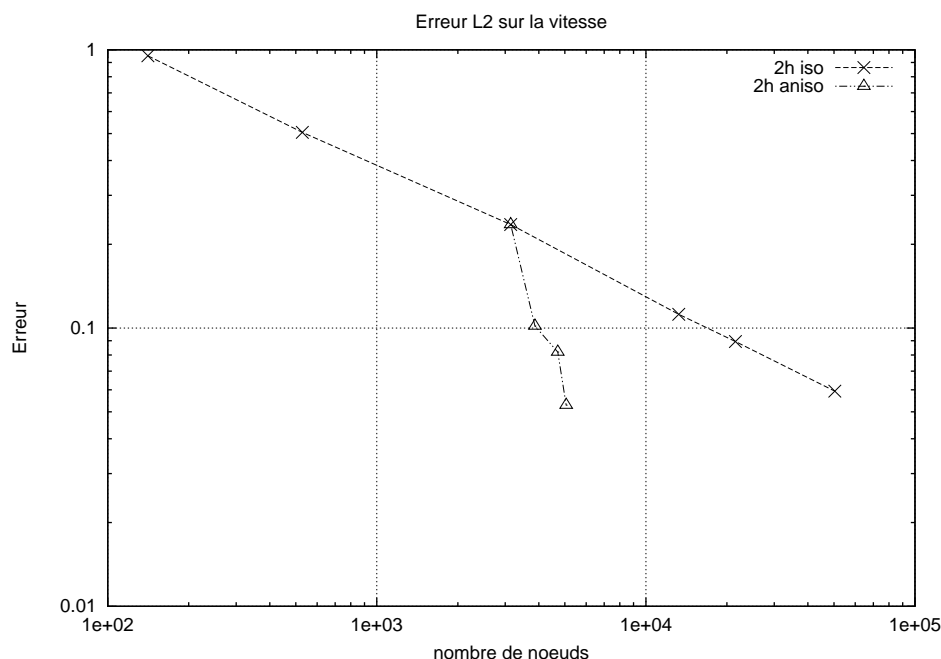


**FIGURE 2.30** – Norme  $L_2$  de l'erreur sur la vitesse pour l'écoulement de Poiseuille immergé. Nous avons fait varier l'épaisseur de mélange de la viscosité entre le fluide et le solide, avec  $e = 1h$ ,  $e = 2h$ ,  $e = 4h$  et  $e = 6h$ , pour un maillage isotrope et pour un maillage anisotrope.



**FIGURE 2.31** – Norme  $L_2$  de l'erreur sur la pression pour l'écoulement de Poiseuille immergé. Nous avons fait varier l'épaisseur de mélange de la viscosité entre le fluide et le solide, avec  $e = 1h$ ,  $e = 2h$ ,  $e = 4h$  et  $e = 6h$ , pour un maillage isotrope et pour un maillage anisotrope.

Nous voyons dans un premier temps une diminution de l'erreur lorsque la taille de maille diminue. La précision du calcul est en  $\mathcal{O}(h)$  pour la vitesse et proche de  $\mathcal{O}(h^{1/2})$  pour la pression. L'utilisation du maillage anisotrope ne permet pas un gain significatif en précision. En revanche, comme on le voit figure 2.32, le gain en coût de calcul est loin d'être négligeable, puisque le nombre de nœuds est plusieurs fois plus faible dans le cas anisotrope que dans le cas isotrope.



**FIGURE 2.32** – Norme  $L_2$  de l'erreur sur la vitesse en fonction du nombre de nœuds. Le passage à une adaptation anisotrope permet un gain significatif en terme de coût de calcul, pour une précision équivalente au maillage isotrope et pour  $e = 2h$ .

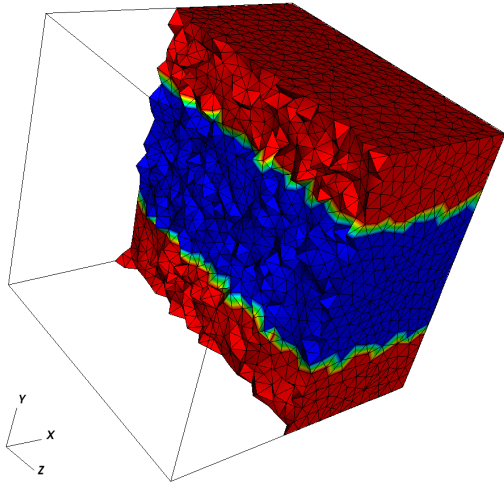
Nous remarquons une très légère augmentation de la précision des résultats lorsque l'épaisseur augmente. Cela est dû au fait que l'on fait disparaître l'effet du maillage, puisque plus l'épaisseur est grande, plus la transition est douce. Nous verrons cependant plus loin que l'épaisseur a un effet sur la détermination de la perméabilité, puisque augmenter l'épaisseur de la zone de mélange va faire virtuellement varier les dimensions de la zone fluide.

### 2.3.1.5 Calculs éléments finis 3D

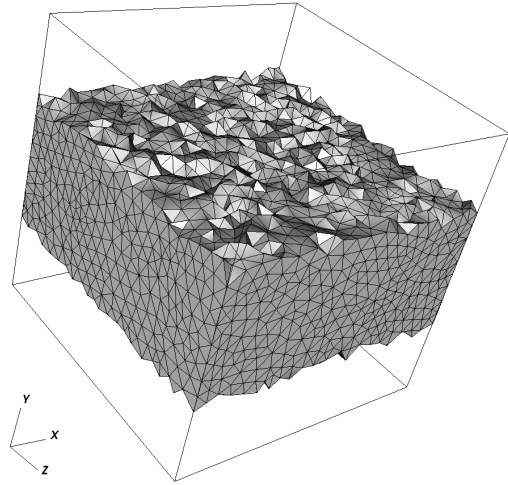
#### Écoulement de Poiseuille entre deux plans

La solution analytique est la même que celle donnée en 2.3.1.1. Nous avons effectué des calculs en utilisant la méthode d'immersion de domaines, avec un maillage isotrope homogène (figures 2.33 et 2.34). Devant le coût de calcul nécessaire pour obtenir des tailles de maille similaires aux calculs 2D, nous avons rapidement utilisé une adaptation anisotrope près de l'interface (figures 2.35 et 2.36).

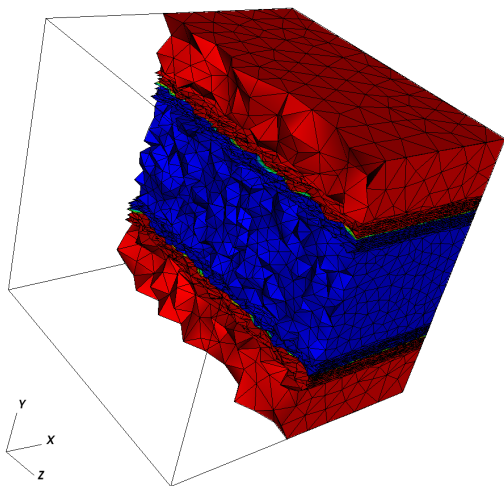
Les résultats sont donnés figures 2.37 et 2.38. Comme pour le cas 2D, la précision sur la vitesse évolue en  $\mathcal{O}(h)$  et la précision sur la pression en  $\mathcal{O}(h^{1/2})$ . Il n'y a pas de différence notable entre les calculs en 2D et en 3D pour la vitesse. En revanche, nous



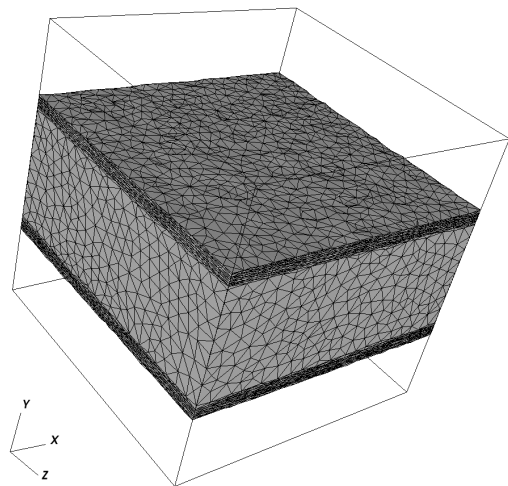
**FIGURE 2.33** – Écorché du maillage isotrope pour l'écoulement de Poiseuille plan 3D. La zone bleue correspond à la zone fluide, la zone rouge à la zone solide.



**FIGURE 2.34** – Extraction de la zone fluide immergée pour un maillage isotrope ( $h = 0.05$ ).



**FIGURE 2.35** – Écorché du maillage anisotrope pour l'écoulement de Poiseuille plan 3D. La zone bleue correspond à la zone fluide, la zone rouge à la zone solide.



**FIGURE 2.36** – Extraction de la zone fluide immergée pour un maillage anisotrope (près de l'interface,  $h_0 = 0.0075$ ).

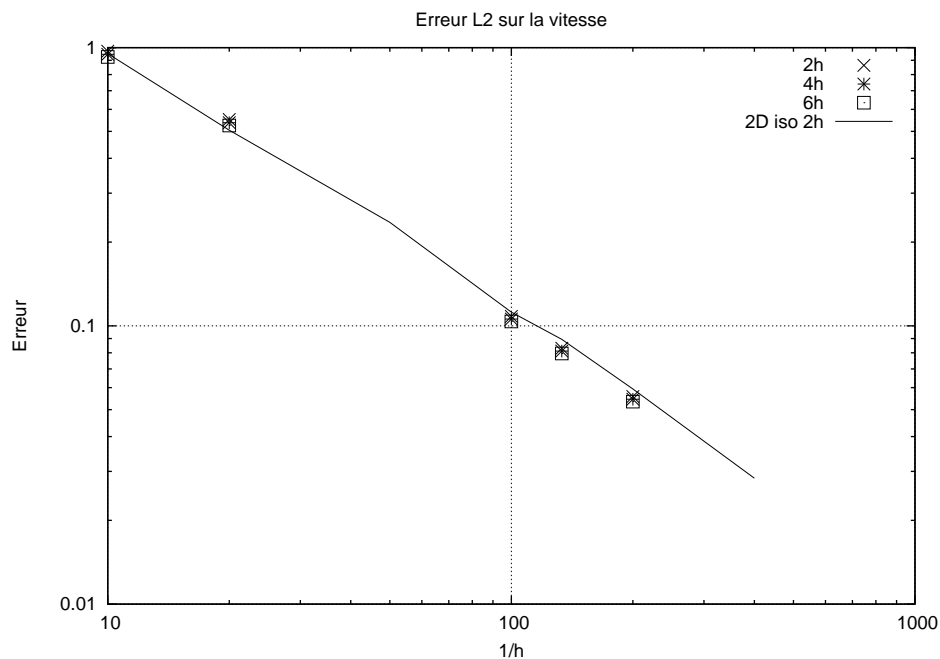


FIGURE 2.37 – Norme  $L_2$  de l'erreur sur la vitesse pour l'écoulement de Poiseuille plan en  $3D$ , pour une épaisseur de mélange de viscosité  $e = 2h$ ,  $e = 4h$  et  $e = 6h$ . Le trait plein correspond à la même erreur obtenue sur le cas  $2D$ .

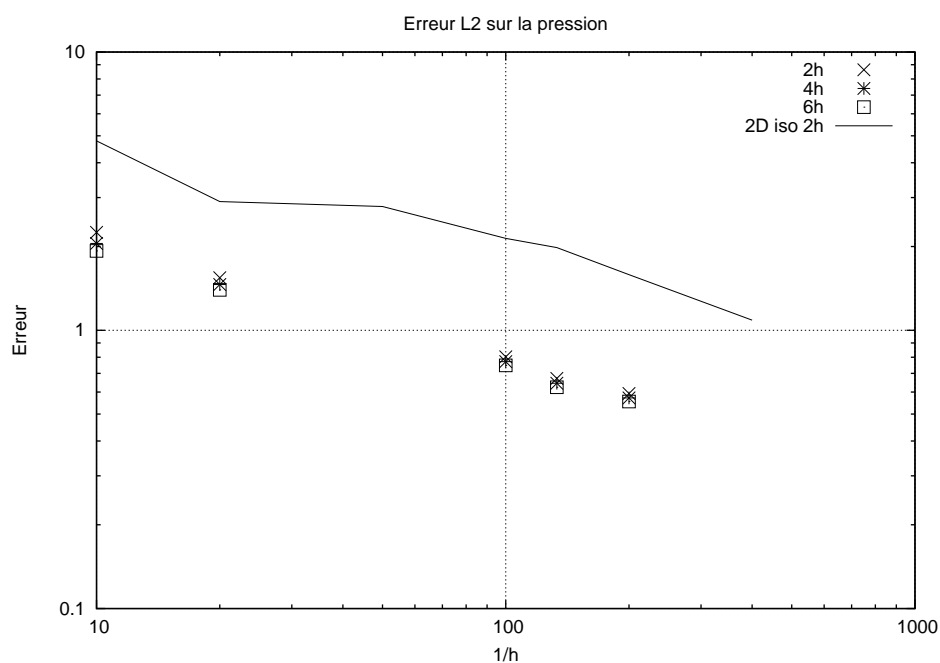


FIGURE 2.38 – Norme  $L_2$  de l'erreur sur la pression pour l'écoulement de Poiseuille plan en  $3D$ , pour une épaisseur de mélange de viscosité  $e = 2h$ ,  $e = 4h$  et  $e = 6h$ . Le trait plein correspond à la même erreur obtenue sur le cas  $2D$ .

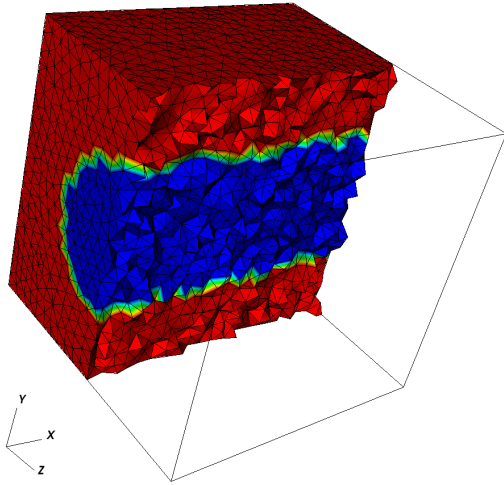
observons que la pression est mieux calculée en 3D. En effet, pour le cas 3D l'erreur est plus de deux fois plus faible que pour le cas 2D. Cela est dû à la formulation éléments finis utilisée au laboratoire qui se montre plus stable en 3D qu'en 2D.

### Écoulement de Poiseuille dans un tube cylindrique

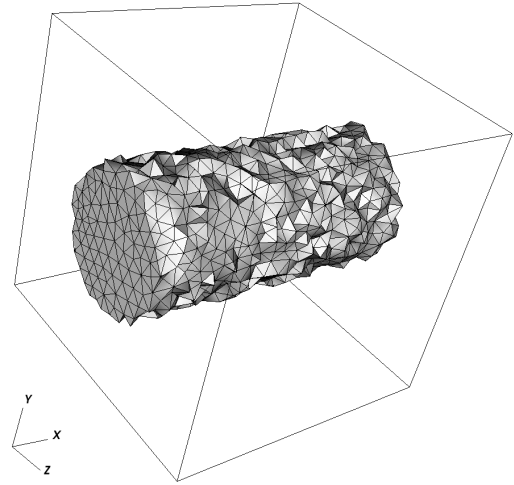
Nous immergeons un cylindre dans un domaine global pour calculer un écoulement de Poiseuille en utilisant la méthode d'immersion de domaines, comme indiqué figures 2.39 et 2.40, pour un maillage isotrope et, figures 2.41 et 2.42, pour un maillage anisotrope.

De la même manière que pour l'étude 2D et l'étude 3D de l'écoulement de Poiseuille plan, nous calculons la norme  $L2$  de l'erreur sur la vitesse, la pression et le gradient de pression. L'axe du tube est porté par l'axe  $x$ . Les plans d'entrée et de sortie du fluide seront donc les plans de normale  $\vec{e}_x$ . Nous imposons sur ces deux plans une vitesse coplanaire nulle et un différentiel de pression. La composante  $x$  de la vitesse sera laissée libre. Toutes les composantes de la vitesse sont imposées nulles sur les autres frontières du domaine de calcul. Comme pour les cas précédents, la forte viscosité définie dans la zone solide nous permet de propager cette condition aux limites jusqu'à la surface du cylindre intérieur.

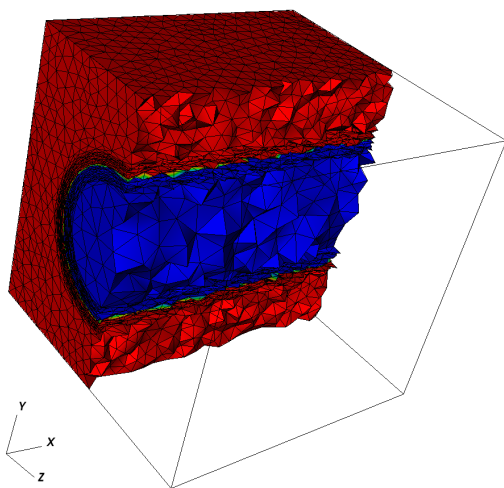
Les résultats des calculs d'erreur sont figure 2.43 et 2.44. L'erreur évolue de manière similaire au Poiseuille plan, avec une évolution de la précision en  $\mathcal{O}(h)$  pour la vitesse et proche de  $\mathcal{O}(h^{1/2})$  pour la pression. La précision est proche entre les écoulements de Poiseuille plans et de Poiseuille tube.



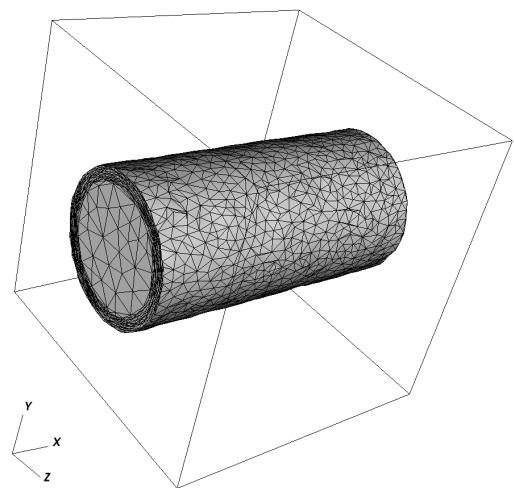
**FIGURE 2.39** – Écorché du maillage pour le Poiseuille tube. La zone bleue correspond à la zone fluide, la zone rouge à la zone solide.



**FIGURE 2.40** – Extraction de la zone fluide immergée pour un maillage isotrope ( $h = 0.05$ ).



**FIGURE 2.41** – Écorché du maillage pour le Poiseuille tube. La zone bleue correspond à la zone fluide, la zone rouge à la zone solide.



**FIGURE 2.42** – Extraction de la zone fluide immergée pour un maillage anisotrope (près de l'interface,  $h_q = 0.0075$ ).

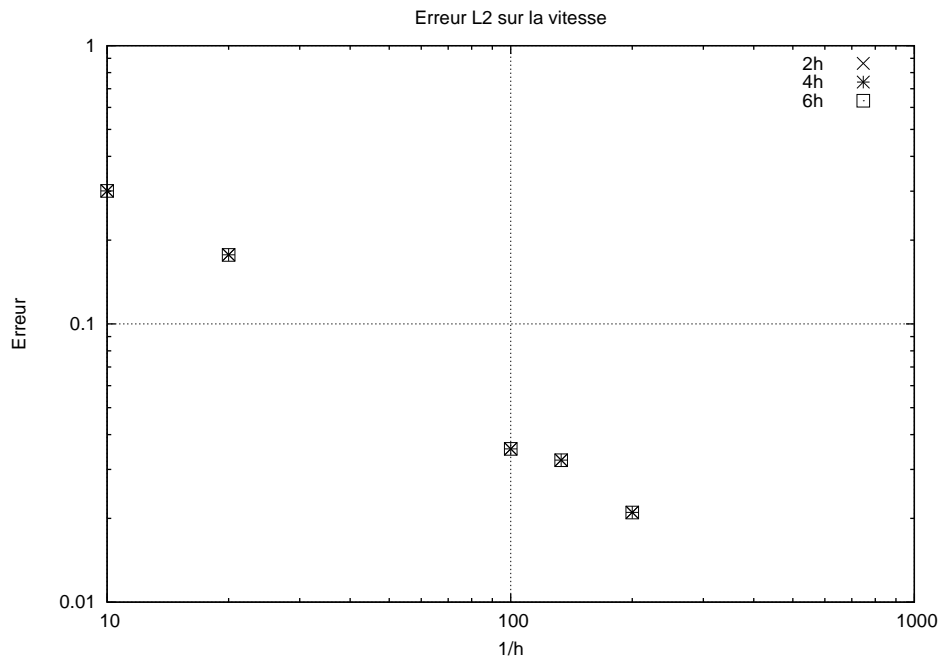


FIGURE 2.43 – Norme  $L_2$  de l'erreur sur la vitesse pour l'écoulement de Poiseuille dans un tube de section circulaire, pour trois épaisseurs de mélange de viscosité.

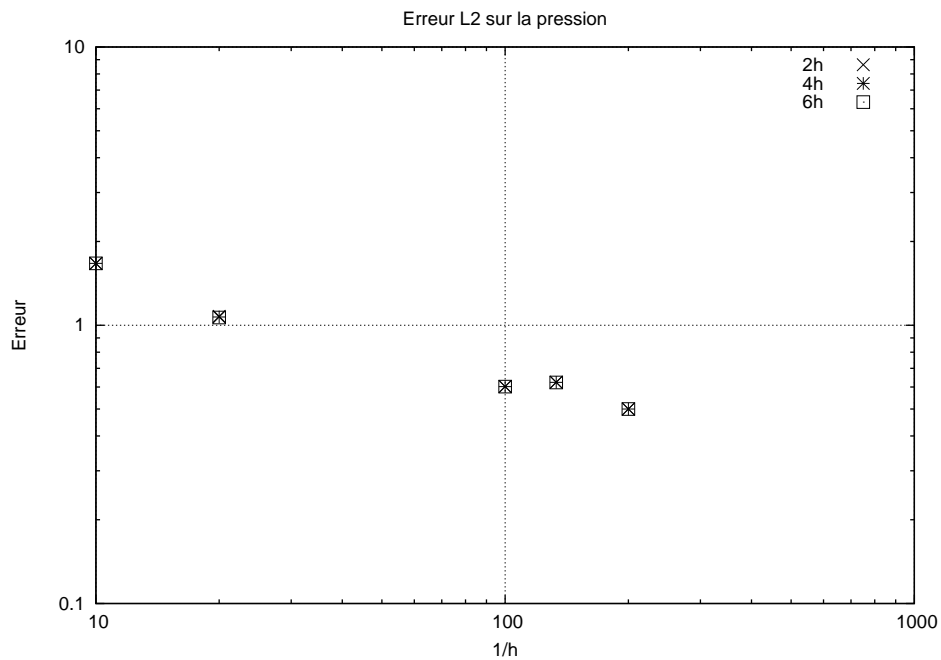


FIGURE 2.44 – Norme  $L_2$  de l'erreur sur la pression pour l'écoulement de Poiseuille dans un tube de section circulaire, pour trois épaisseurs de mélange de viscosité,  $e = 2h$ ,  $e = 4h$  et  $e = 6h$ .

### 2.3.2 Écoulement de Couette cylindrique

Un écoulement de Couette cylindrique (figure 2.45) est un écoulement qui se produit entre deux cylindres coaxiaux, de rayon  $R_i$  et  $R_o$ , en rotation aux vitesses angulaires  $\omega_i$  et  $\omega_o$ . Aucun gradient de pression n'est appliqué extérieurement. Nous considérons un écoulement newtonien à faible vitesse (à faible nombre de Reynolds).

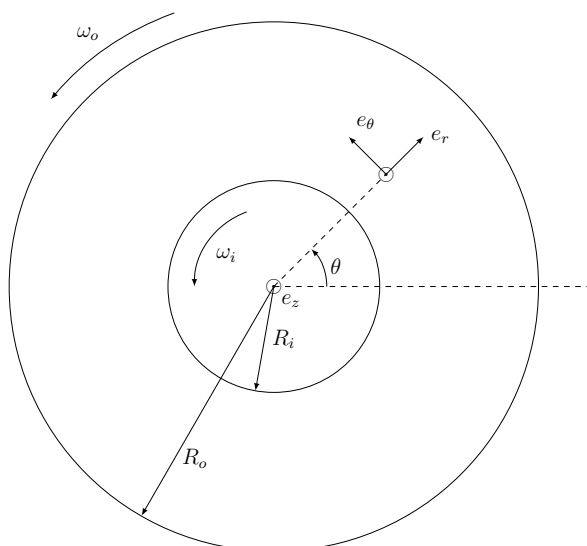


FIGURE 2.45 – Écoulement de Couette cylindrique, représentation schématique du domaine de calcul dans le cas de l'immersion de domaines.

#### 2.3.2.1 Solution analytique pour un écoulement de Couette cylindrique

Étant donné qu'il n'y a pas de gradient de pression dans la direction  $z$  de l'axe des cylindres, nous avons  $v_z = 0$ . De plus, par symétrie, la vitesse est indépendante de l'angle  $\theta$ . Les seules composantes de la vitesse sont donc  $v_r(r)$  et  $v_\theta(r)$ .

L'équation de continuité en coordonnées cylindriques, avec les conditions données précédemment, s'écrit :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} = 0 \quad (2.55)$$

Avec cette équation, nous avons  $v_r = C/r$  où  $C$  est une constante. Ainsi, puisque  $v_r = 0$  sur les parois des cylindres, nous avons forcément  $v_r \equiv 0$ . Nous obtenons ainsi un champ de vitesse de la forme :

$$\vec{v} = (0, v_\theta(r), 0) \quad (2.56)$$

Le champ de vitesse est de la forme suivante :

$$v_\theta = Ar + \frac{B}{r} \quad (2.57)$$

avec

$$A = \frac{R_o^2 \omega_o - R_i^2 \omega_i}{R_o^2 - R_i^2} ; \quad B = \frac{R_i^2 R_o^2 (\omega_i - \omega_o)}{R_o^2 - R_i^2} \quad (2.58)$$

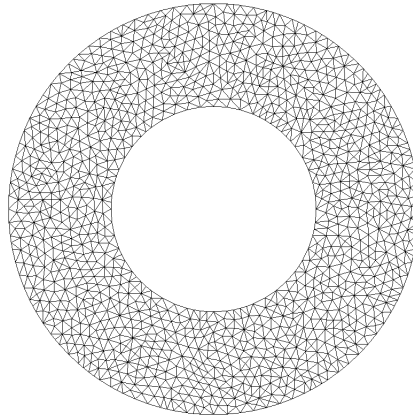
Dans le cas où le cylindre extérieur n'est pas en rotation, les coefficients  $A$  et  $B$  deviennent :

$$A = \frac{R_i^2 \omega_i}{-R_o^2 + R_i^2} ; B = \frac{-R_i^2 R_o^2 \omega_i}{-R_o^2 + R_i^2} \quad (2.59)$$

Nous effectuerons les mêmes calculs d'erreur que ceux donnés section 2.3.1.2 (page 52), utilisés pour les écoulements de Poiseuille. Dans le cas que nous traitons par la suite, nous choisissons  $\omega_i = 1$ ,  $\omega_o = -1$ ,  $R_i = 0.5$  et  $R_o = 1$ .

### 2.3.2.2 Résolution éléments finis d'un écoulement de Couette cylindrique

Nous commençons par résoudre le problème de manière classique, en utilisant un maillage de la zone fluide uniquement, tel que présenté figure 2.46. Nous imposons les



**FIGURE 2.46** – Exemple de maillage utilisé pour le calcul éléments finis de l'écoulement de Couette cylindrique où seule la zone fluide est maillée.

deux composantes de la vitesse sur les frontières, calculées à partir de la vitesse angulaire de chaque cylindre. Pour ce calcul, la difficulté supplémentaire face au cas du Poiseuille plan, concerne la discrétisation de la courbure. Nous avons fait varier la taille de maille de  $h = 0.1$  à  $h = 0.01$ . Les résultats sont donnés figure 2.47.

Le champ de pression théorique est constant lorsque l'on utilise l'équation de Stokes pour résoudre l'écoulement de Couette cylindrique. Dans la résolution de ce problème par éléments finis, la pression est définie à une constante près. Nous avons observé que la valeur moyenne de la pression dans le domaine pouvait varier relativement fortement autour de zéro. Nous avons donc calculé, en plus de l'erreur sur la pression, l'erreur sur le gradient de pression, puisque celui-ci est forcément nul sur le domaine.

Les courbes d'erreur en vitesse et en pression sont données figure 2.47. La précision sur la vitesse évolue en  $\mathcal{O}(h^2)$ . En ce qui concerne la pression, l'évolution de la précision est en  $\mathcal{O}(h^{1/2})$ . Comme expliqué précédemment, nous avons calculé l'erreur sur le gradient de pression. La précision reste presque constante, quelle que soit la taille de maille. Cela montre d'importantes oscillations qui ne disparaissent pas avec le raffinement de maillage.

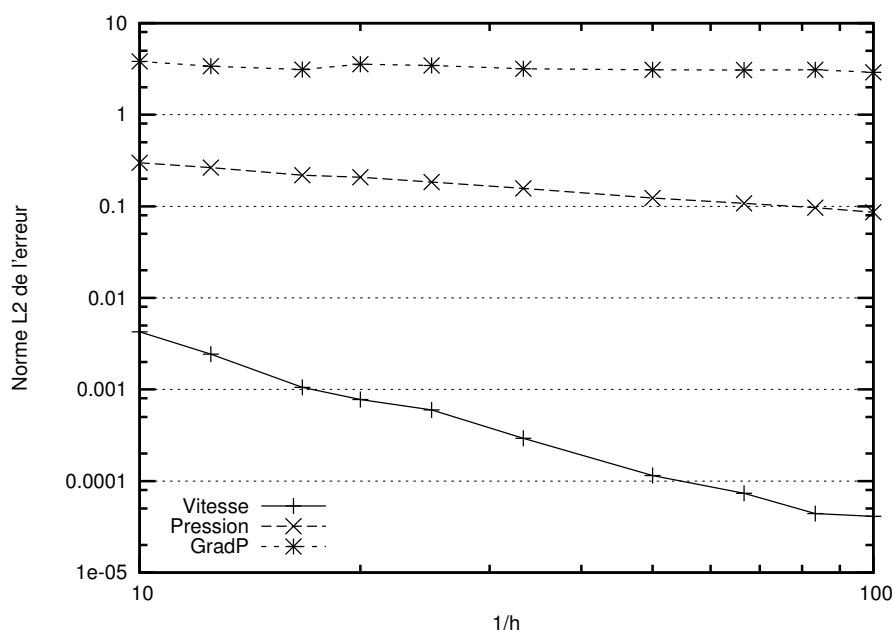


FIGURE 2.47 – Norme  $L_2$  de l'erreur sur les champs de vitesse, de pression et de gradient de pression, pour l'écoulement de Couette cylindrique non immergé.

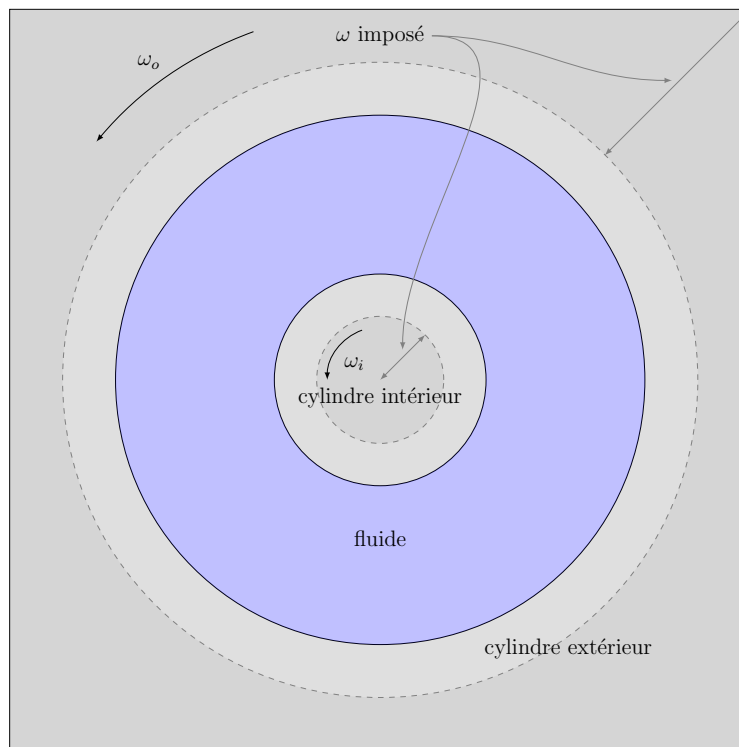
### 2.3.2.3 Résolution avec l'approche d'immersion de domaines

Nous présentons maintenant les résultats obtenus en utilisant la méthode d'immersion de domaines. Cette fois, la géométrie du modèle est celle représentée figure 2.48. Comme pour l'écoulement de Poiseuille simple, les interfaces entre les cylindres et le fluide sont représentées par une fonction distance. Un champ de viscosité est calculé pour prendre en compte les zones solides. Étant donné les résultats des calculs précédents, nous ne faisons pas varier l'épaisseur de mélange, puisqu'elle n'a aucun effet sur la précision du calcul. La condition aux limites sur la vitesse pour chacun des cylindres n'est pas imposée dans toute la zone solide, mais dans une zone intérieure à chaque cylindre, c'est-à-dire les zones en gris foncé sur la figure 2.48.

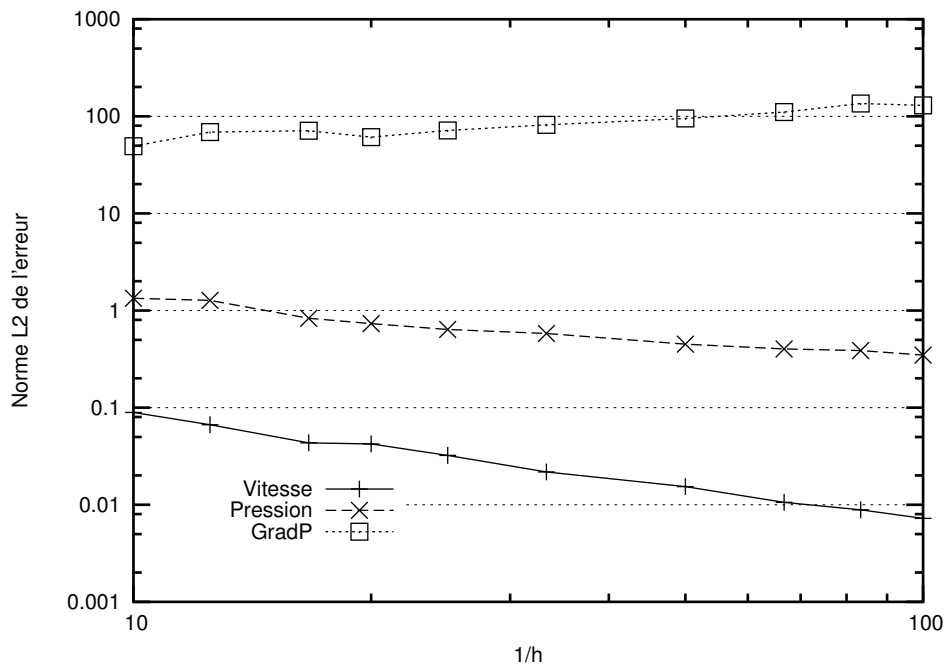
Dans un premier temps, l'erreur est calculée sur un maillage isotrope homogène, avec une taille de maille moyenne de 0.1 à 0.01. Ensuite, nous faisons les calculs avec un maillage adapté anisotrope autour des interfaces. Afin d'avoir une anisotropie marquée, nous choisissons d'utiliser un maillage de fond avec  $h_\varepsilon = 0.02$  et de faire varier la taille de maille dans l'épaisseur anisotrope de  $h_\rho = 0.02$  à  $h_\rho = 0.001$ .

Les résultats des calculs d'erreur pour les maillages isotropes sont donnés figure 2.49. Nous voyons dans le cas immergé que la précision du calcul augmente moins vite que dans le cas non immergé. Pour la vitesse, la précision évolue en  $\mathcal{O}(h^{1.1})$ , au lieu de  $\mathcal{O}(h^2)$  comme dans le cas non immergé. En ce qui concerne la pression, sa précision évolue en  $\mathcal{O}(h^{1/2})$ . Le résultat intéressant concerne le gradient de pression puisque l'erreur augmente lorsque la taille de maille diminue.

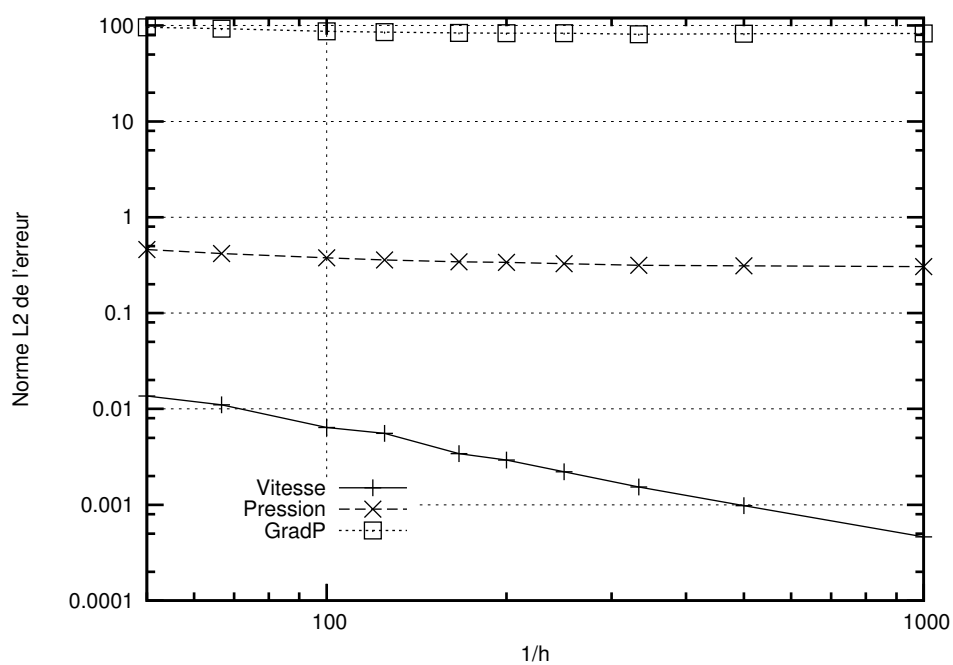
Pour le maillage anisotrope, les résultats sont donnés figure 2.50. En ce qui concerne la vitesse, la précision est un peu meilleure par rapport aux cas isotropes, avec une évolution en  $\mathcal{O}(h^{1.2})$ . En revanche, pour la pression et le gradient de pression, la précision évolue très peu avec la taille de maille.



**FIGURE 2.48** – Schéma de l'écoulement de Couette cylindrique dans le cas de la méthode d'immersion de domaines. La zone bleue correspond à la phase fluide, et les zones grises aux phases solides. La vitesse est imposée uniquement dans les zones en gris foncé.



**FIGURE 2.49** – Norme  $L_2$  de l'erreur sur les champs de vitesse, de pression et de gradient de pression, pour l'écoulement de Couette cylindrique immergé sur un maillage isotrope.



**FIGURE 2.50** – Norme  $L_2$  de l'erreur sur les champs de vitesse, de pression et de gradient de pression, pour l'écoulement de Couette cylindrique immergé sur un maillage anisotrope.

## 2.4 Validation du couplage Stokes-Darcy

Comme indiqué en 2.2.3, le couplage Stokes-Darcy se fait en résolvant, sur tout le domaine, l'équation de Brinkman. En faisant varier la valeur de la perméabilité, nous nous retrouvons soit avec un milieu poreux soit avec une zone qui peut être considérée comme fluide. Dans un premier temps, nous validons le solveur de Brinkman sur un domaine poreux seulement. Ensuite, étant donné que la zone fluide lors du couplage est approximée par une zone de perméabilité très élevée, nous vérifions la validité de notre approche en comparant le calcul d'un écoulement à perméabilité élevée avec une solution analytique de Stokes. Enfin, nous validons le couplage en comparant la solution pour un écoulement dans un domaine contenant une zone fluide et une zone poreuse, avec une solution analytique.

### 2.4.1 Validation du solveur de Brinkman.

Pour valider le solveur de Brinkman, nous nous plaçons dans un domaine cubique de hauteur  $H$  et de longueur  $L$  et nous résolvons l'équation de Brinkman seule. Un gradient de pression est imposé entre les faces de normales  $x$ . Une condition de contact collant est imposée entre les faces de normales  $z$  et les faces de normales  $y$  sont des plans de symétrie (vitesse normale nulle). Pour une telle configuration, la solution analytique de l'équation de Brinkman est la suivante [Lec99] :

$$v_x(z) = -K \frac{\Delta p}{L} \left( 1 - \frac{\cosh\left(\frac{H-z}{\sqrt{K}}\right)}{\cosh\left(\frac{H}{\sqrt{K}}\right)} \right) \quad (2.60)$$

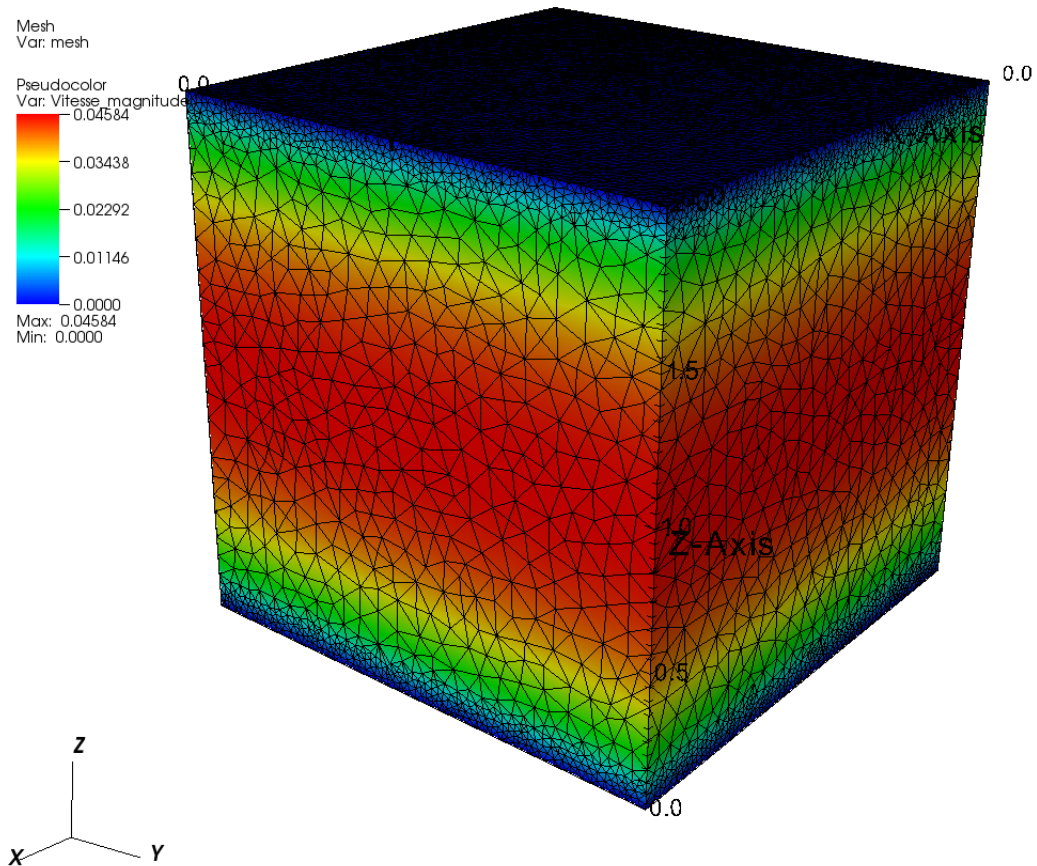
Il faut remarquer que, pour de faibles valeurs de la perméabilité, il apparaît une couche limite dont l'épaisseur diminue avec la perméabilité et qui rend la solution analytique de plus en plus raide. Cela nécessite un raffinement de maillage au niveau de ces couches limites (figure 2.51). Cela peut également gêner le calcul numérique par l'apparition d'instabilités au niveau des couches limites, si celles-ci n'ont pas un maillage suffisamment fin. La présence de ces couches limites montre bien que l'équation de Brinkman a plutôt été développée pour les milieux de perméabilité élevée, afin de prendre en compte les phénomènes visqueux qui se produisent à l'interface. Lorsque la perméabilité devient très faible, l'épaisseur de la couche limite devient tellement faible qu'elle peut être négligée et l'équation de Brinkman peut tout simplement être remplacée par l'équation de Darcy. Nous rappelons toutefois que nous utilisons l'équation de Brinkman afin de conserver naturellement la continuité des contraintes à l'interface fluide-poreux et de faciliter le couplage numérique des deux équations.

Lorsque la perméabilité devient très faible, le système est plus raide. Un moyen de pousser plus loin la convergence de la solution numérique est de jouer avec les paramètres en écrivant :

$$-\nabla \tilde{p} + \vec{v} + K \Delta \vec{v} = 0 \quad (2.61)$$

où  $\tilde{p} = \frac{K}{\mu} p$ .

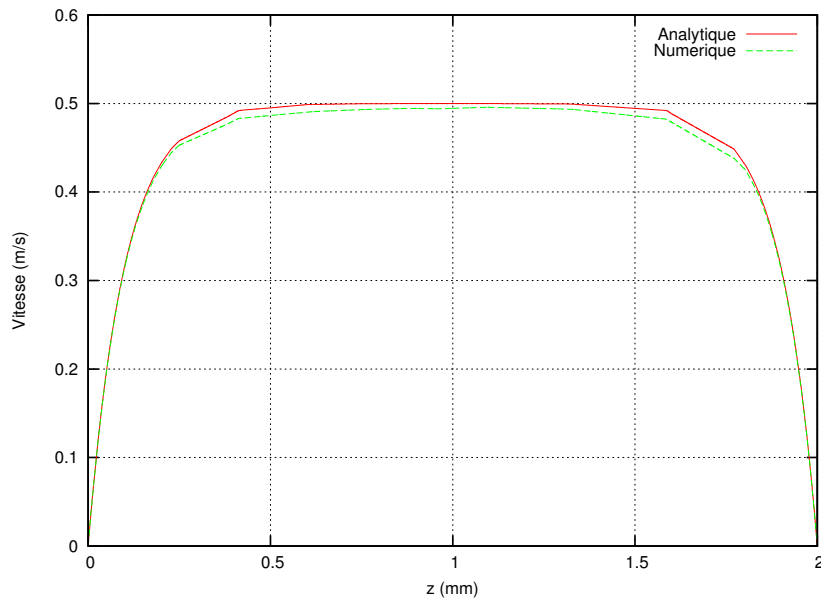
Pour les résultats de validation, nous allons nous placer dans la configuration suivante. Le domaine a les dimensions  $L = H = 2$  mm. La viscosité de la résine est de 1 Pa·s.



**FIGURE 2.51** – Écoulement de Brinkman pour  $k = 0.1$  et un maillage avec  $h = 0.1$  dans le domaine et  $h = 0.03$  au niveau des frontières, constante sur une épaisseur de  $e = 0.1$  et variant linéairement sur la même épaisseur pour atteindre la taille de maille globale. Le domaine de calcul est un cube de côtés  $H = L = 2$ .

La pression d'injection est choisie à 1 bar, soit  $10^5$  Pa. Une perméabilité plus faible que  $10^{-8}$  m<sup>2</sup> est difficile à atteindre car la couche limite est difficile à capturer, ce qui nécessite un maillage très fin. Nous montrons, figure 2.52, le profil de vitesse calculé numériquement et la solution analytique de l'équation de Brinkman.

Nous montrons ainsi la validité du solveur de Brinkman, pour retrouver une solution d'un écoulement de Brinkman. Étant donné que nous voulons l'utiliser pour un couplage avec le solveur de Stokes, nous montrons dans la suite qu'il est possible d'utiliser le solveur de Brinkman pour retrouver une équation de Stokes, puis pour retrouver la solution d'un écoulement dans un domaine contenant à la fois un milieu poreux et un milieu purement fluide.



**FIGURE 2.52** – Profil de vitesse analytique et numérique pour l'équation de Brinkman pour une perméabilité de  $10^{-8} \text{ m}^2$ .

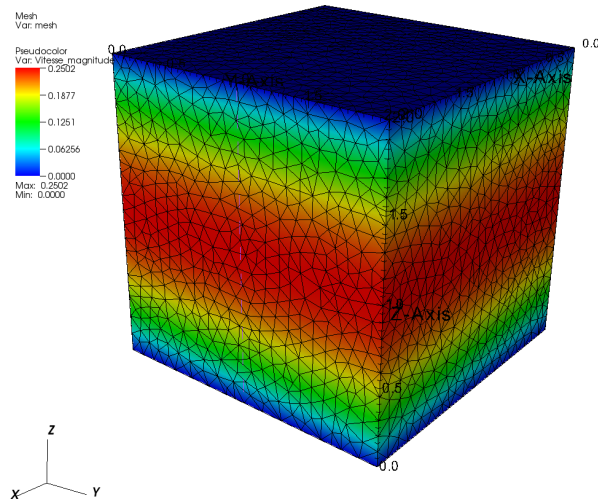
## 2.4.2 Validation du couplage Stokes-Brinkman

Afin de prendre en compte à la fois le milieu Stokes et le milieu poreux, tout en conservant la même équation, nous allons jouer sur le coefficient de perméabilité. En effet, pour les zones de fluide libre, nous souhaitons retrouver un écoulement de Stokes à partir de l'équation de Brinkman. Pour cela, il faut que le terme en vitesse s'annule, donc que le coefficient  $\frac{\mu}{K}$  soit nul. Ce n'est possible que pour  $K$  tendant vers l'infini.

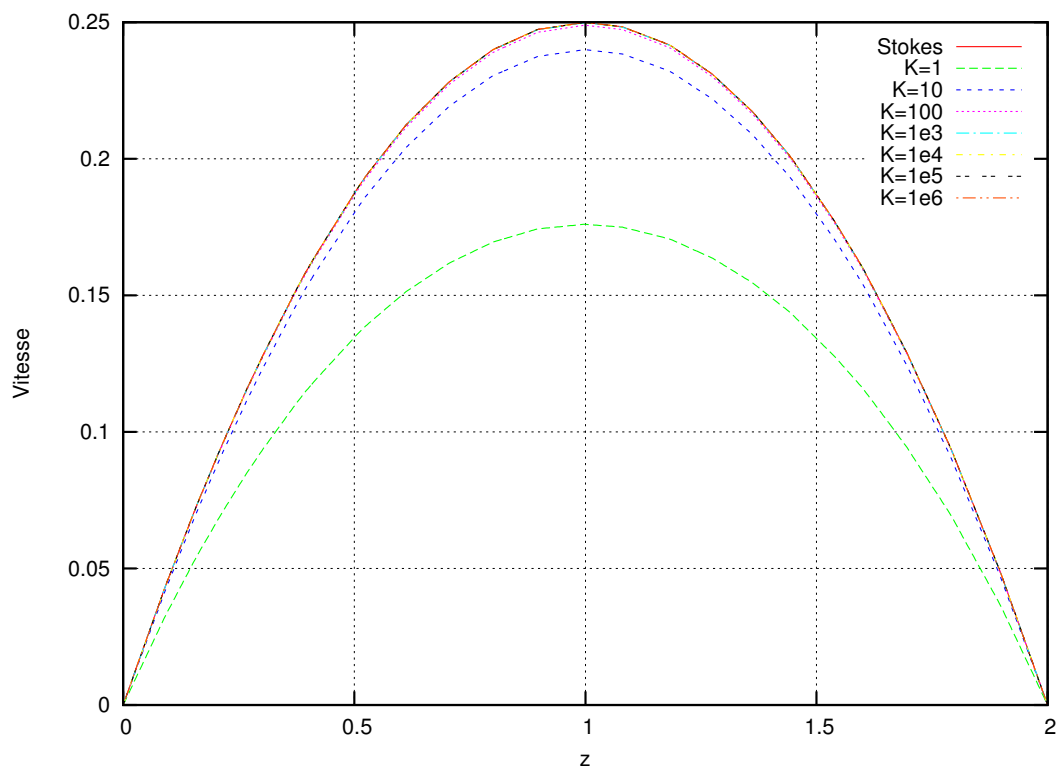
Le problème qui se pose au niveau numérique est d'utiliser un coefficient qui puisse avoir une valeur très grande afin de le faire tendre vers l'infini, sur certains nœuds du maillage et des valeurs très faibles. Typiquement une perméabilité de l'ordre de  $10^{-15}$  est courante pour des renforts à taux de fibres élevés, en d'autres nœuds du maillage. Cela conduirait à un conditionnement de matrice qui rendrait difficile, voire impossible, la résolution du système linéaire.

### 2.4.2.1 Utilisation du solveur de Brinkman pour un écoulement de Poiseuille

Nous faisons varier le coefficient de perméabilité dans un milieu homogène pour déterminer la valeur de  $K$  à partir de laquelle nous retrouvons un écoulement de Stokes avec une précision acceptable. Nous définissons un domaine cubique de côté 2. Nous imposons une différence de pression entre les faces en  $x = 0$  et  $x = 2$ . Sur les autres faces, nous laissons libre la composante  $x$  de la vitesse et nous imposons les autres composantes à la valeur nulle. Cela nous permet d'obtenir un écoulement de type Poiseuille, donné figure 2.53. Nous résolvons les équations de Brinkman, en faisant varier la valeur de la perméabilité, afin de s'approcher de la solution analytique d'un écoulement de Poiseuille. Le profil de vitesse est tracé figure 2.54, le long d'une ligne verticale sur le domaine présenté figure 2.53.



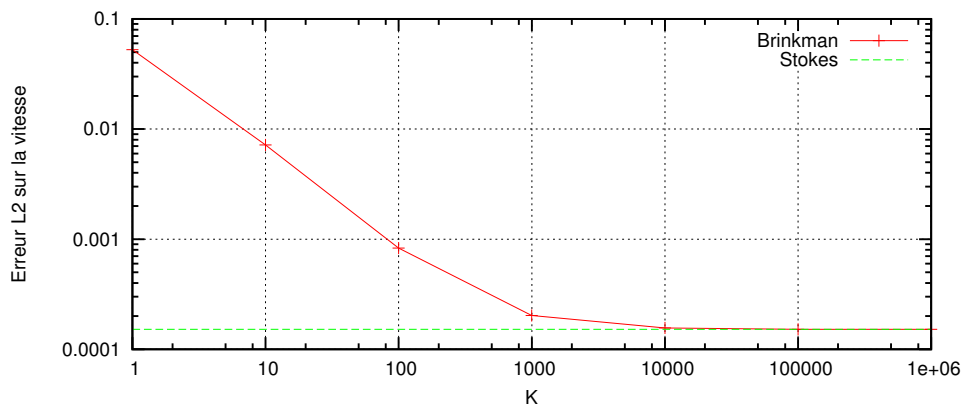
**FIGURE 2.53** – Poiseuille obtenu sur le domaine 3D de validation du solveur de Brinkman. Les faces d'entrée et de sortie ont pour normale  $x$ . Les faces de normale  $z$  sont à vitesse nulle imposée. Les faces de normale  $y$  sont des plans de symétrie. Le domaine est un cube de côté 2. La taille de maille est de  $h = 0.1$ .



**FIGURE 2.54** – Comparaison des profils de vitesse, pour différentes valeurs de la perméabilité, obtenus en utilisant la loi de Brinkman. La ligne nommée Stokes correspond au champ de vitesse obtenu en utilisant les équations de Stokes. Plus la valeur de  $K$  augmente, plus l'écoulement obtenu par Brinkman s'approche d'un écoulement de Poiseuille.

Avec les paramètres choisis, la valeur maximale de la vitesse de Stokes est de 0.25. Nous voyons, figure 2.54, que nous obtenons un champ de vitesse relativement proche d'un écoulement de Poiseuille pour un coefficient de perméabilité de 100. Pour cette perméabilité, nous obtenons un écart de 0.3% avec la solution analytique. Pour une perméabilité de 1000, l'écart relatif passe à 0.05%, puis à 0.004% pour une perméabilité de 10000. Nous pouvons ainsi donner à la perméabilité une valeur de 100 dans la zone de fluide de Stokes. Cela permet de modéliser un écoulement de type Stokes en utilisant un solveur de Brinkman, avec une très bonne précision.

Nous présentons, figure 2.55, la norme L2 de l'erreur en fonction de la valeur du coefficient de perméabilité. Nous voyons qu'au dessus de  $K = 10^4$ , la précision correspond à la précision d'un calcul de Stokes. Nous rappelons que le maillage est relativement grossier pour ces simulations. Nous pouvons donc conclure qu'une valeur de perméabilité comprise entre 100 et 10000 permet de représenter un écoulement régi par les équations de Stokes.



**FIGURE 2.55** – Norme L2 de l'erreur sur la vitesse, en fonction de la valeur de la perméabilité, pour une solution numérique d'un écoulement de Brinkman. La ligne en pointillé correspond à l'erreur obtenue pour un écoulement de Stokes.

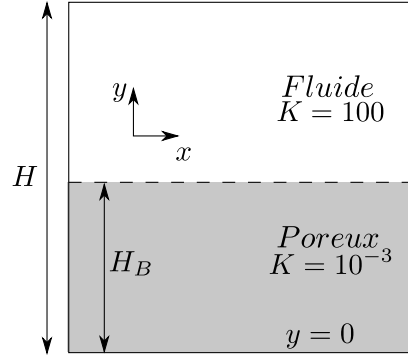
### 2.4.2.2 Couplage

Nous étudions maintenant le couplage Stokes-Darcy tel qu'il est présenté par Tan et Pillai [TP09] et Chen et Zhu [CZ08]. Le domaine est représenté schématiquement figure 2.56. Un gradient de pression est imposé entre les faces d'entrée et de sortie. La face supérieure et la face inférieure sont des parois. On impose donc que le fluide ait une vitesse nulle. Étant donné que les simulations ont été faites en 3D, les deux autres faces sont des plans de symétrie.

Nous pouvons comparer le champ de vitesse obtenu à son expression analytique [CZ08] :

$$\begin{aligned}
 v_{xs} &= -\frac{\Delta p H^2}{L 2\eta} \left(1 - \frac{y}{H}\right) \left(\frac{y}{H} - t_1\right) & H_B \leq y \leq H \\
 v_{xb} &= -\frac{\Delta p H^2}{L 2\eta} \left(t_2 \sinh\left(\frac{\alpha y}{H}\right) + \frac{2K}{H^2} \left[1 - \cosh\left(\frac{\alpha y}{H}\right)\right]\right) & 0 \leq y \leq H_B
 \end{aligned} \tag{2.62}$$

où  $v_{xs}$  et  $v_{xb}$  sont respectivement la vitesse dans le domaine fluide et la vitesse dans le



**FIGURE 2.56** – Représentation du domaine de calcul pour le couplage Stokes-Darcy grâce à la loi de Brinkman. Le domaine supérieur est un fluide pur. Le domaine inférieur est un domaine poreux. Les parois supérieures et inférieures ont des conditions de non-glissement.

domaine poreux et où  $t_1$  et  $t_2$  sont donnés par les expressions suivantes :

$$t_1 = -\frac{2K\alpha}{H^2} \frac{\cosh(\beta\alpha) - 1}{\sinh(\beta\alpha) + \alpha(1 - \beta) \cosh(\beta\alpha)} - \frac{(1 - \beta) \sinh(\beta\alpha)}{\sinh(\beta\alpha) + \alpha(1 - \beta) \cosh(\beta\alpha)} + \beta$$

$$t_2 = -\frac{2K}{H^2} \frac{\alpha(1 - \beta) \sinh(\beta\alpha) + \cosh(\beta\alpha) - 1}{\sinh(\beta\alpha) + \alpha(1 - \beta) \cosh(\beta\alpha)} + \frac{(1 - \beta)^2}{\sinh(\beta\alpha) + \alpha(1 - \beta) \cosh(\beta\alpha)}$$

et avec  $\alpha = H/\sqrt{K}$  et  $\beta = H_B/H$ . La figure 2.57 montre les profils de vitesse pour le couplage Stokes-Brinkman. Les paramètres sont les suivants : une différence de pression imposée de 2, une viscosité de 1 et une perméabilité de  $10^{-3}$  pour le milieu poreux et de 100 pour la partie fluide pur. Nous avons fait varier l'épaisseur de la zone de transition de la perméabilité de  $2h$ ,  $4h$  et  $10h$  avec une taille de maille au niveau de l'interface de  $h = 0.005$  et une taille de maille de fond de  $h = 0.1$ . Cette première étude du couplage Stokes-Brinkman nous montre la validité de notre méthode. Il serait bien entendu nécessaire pour une étude ultérieure, de pousser plus loin la validation, en étudiant l'effet de la taille de maille dans la zone de transition, ainsi que d'étudier la norme de l'erreur en fonction de la taille de maille, pour donner une meilleure estimation de la précision du solveur. Cependant, de ces premiers résultats, nous pouvons déduire que l'épaisseur de la zone de mélange pour la perméabilité doit être la plus fine possible et que le maillage doit également être raffiné dans cette zone.

## 2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les différentes méthodes numériques utilisées pour la résolution des écoulements. Dans un premier temps, nous avons présenté la méthode d'immersion de domaines. Elle consiste à représenter les interfaces dans le domaine de calcul eulérien en utilisant des fonctions distance qui nous permettent de calculer un champ pour les grandeurs physiques, comme la viscosité, dans le domaine de calcul global. Les zones solides sont prises en compte comme étant des fluides suffisamment visqueux pour qu'ils ne soient pas déformables.

Nous avons présenté la méthode d'adaptation de maillages utilisée pour obtenir une meilleure représentation de l'interface. Cette méthode nous permet de définir une métrique

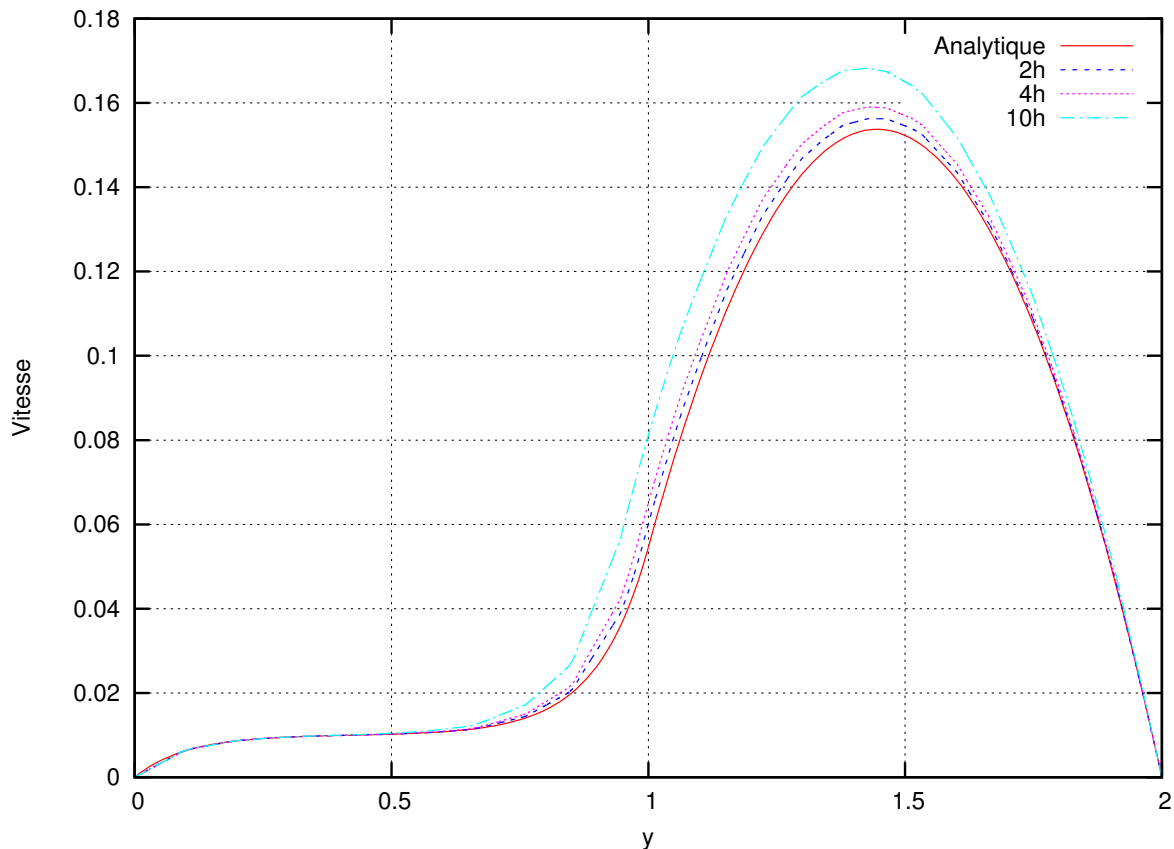


FIGURE 2.57 – Profil de vitesse obtenu pour le couplage Stokes-Brinkman pour différentes épaisseur de mélange de la perméabilité.

en chaque nœud du domaine, en utilisant la fonction distance à l'objet sur lequel nous souhaitons adapter le maillage. L'utilisation du gradient de cette distance nous permet de définir des directions particulières, sur lesquelles le maillage est plus fin. Nous obtenons, grâce à cette méthode, un maillage anisotrope. Ainsi, la discrétisation est aussi précise qu'avec un maillage isotrope adapté et le nombre de nœuds est beaucoup plus faible.

Enfin, nous avons présenté la technique d'immersion de maillage, qui est un cas particulier de la méthode d'immersion de domaines pour lequel, au lieu d'utiliser une fonction analytique pour l'interface entre les domaines, nous utilisons un maillage.

La combinaison de ces méthodes nous permet de simuler les écoulements dans des géométries complexes, comme c'est le cas lorsque nous simulons l'imprégnation d'un renfort.

Dans un second temps, nous présentons la méthode des éléments finis mixtes utilisée pour calculer les écoulements. La prise en compte des différentes phases se fait en utilisant des champs variables dans l'espace, pour les grandeurs physiques des fluides.

Le choix du MINI-élément implique que les paramètres de stabilisation soient automatiquement calculés en fonction des paramètres à résoudre et du maillage. Ainsi, l'utilisation de cette méthode dans le cadre de la méthode d'immersion de domaines a nécessité quelques adaptations au niveau de la stabilisation de la formulation. Ces adaptations ont principalement consisté à modifier le paramètre de viscosité pour la fonction bulle. Deux choix de champs de viscosité utilisés dans le terme de bulle de la formulation sont

donc présentés et nous montrons la validité de ces modifications dans la résolution d'un écoulement dans le cadre de la méthode d'immersion de domaines.

Nous présentons ensuite la formulation éléments finis mixte utilisée pour la résolution de l'équation de Brinkman.

La dernière section de ce paragraphe contient une validation de la méthode d'immersion de domaines. Nous avons choisi d'utiliser des écoulements de Poiseuille plan et tube, ainsi qu'un écoulement de Couette cylindrique afin de pouvoir comparer les solutions numériques obtenues avec des solutions analytiques simples. Les écoulements de Poiseuille nous permettent de valider les écoulements pour le solveur 2D et le solveur 3D. Cependant, les écoulements sont toujours unidirectionnels. L'écoulement de Couette cylindrique nous permet d'avoir des écoulements plus généraux et de nous placer dans des situations où les frontières des objets solides ont une courbure.

Nous observons que le choix de l'épaisseur de mélange pour le champ de viscosité a très peu d'influence sur la précision du résultat concernant le champ de vitesse, que ce soit en 2D ou en 3D. L'influence est légèrement plus importante pour le champ de pression, mais les tendances sont toutefois les mêmes. L'utilisation d'un maillage anisotrope adapté autour de l'interface n'apporte pas de précision supplémentaire, mais réduit considérablement la puissance de calcul nécessaire. Nous remarquons toutefois que la précision est plus grande en 3D qu'en 2D, ce qui a déjà été observé précédemment au laboratoire. Nous remarquons également, sur les calculs de Couette cylindrique, que les résultats pour les simulations avec la méthode d'immersion de domaines sont moins précis que les résultats pour un cas classique, où seul le domaine fluide est représenté, ce qui est tout à fait normal.

Enfin, nous validons notre approche pour le couplage Stokes-Darcy, qui consiste à résoudre Brinkman sur tout le domaine, en faisant varier la perméabilité pour s'approcher d'un écoulement de fluide pur dans la zone fluide et d'un écoulement de Darcy dans la zone solide. Nous montrons dans un premier temps la validité du solveur avec un écoulement de Brinkman. Puis, nous montrons que nous approchons d'un écoulement de Stokes avec une bonne précision lorsque la perméabilité a une valeur suffisamment grande et que l'épaisseur de la zone de transition entre un écoulement libre et un écoulement dans un milieu poreux est suffisamment fine.



# Chapitre 3

## Perméabilité des renforts fibreux à l'échelle microscopique et à l'échelle mésoscopique

### 3.1 Bibliographie

#### 3.1.1 Échelle microscopique

De nombreux auteurs ont formulé des lois analytiques ou semi-analytiques de la perméabilité en fonction de l'arrangement des fibres. Jackson et James [JJ86] donnent une revue de la littérature jusqu'en 1984. Ils ont sélectionné les travaux pour lesquels les écoulements sont à faible nombre de Reynolds et pour lesquels les fibres sont suffisamment longues pour que le rapport de forme ne soit pas un paramètre. Les différentes relations qu'ils ont récoltées sont ramenées à la porosité, pour pouvoir toutes les comparer. Ils ont relevé également les mesures expérimentales de différents auteurs, lorsque suffisamment d'informations étaient données pour pouvoir les comparer entre elles.

Nous présentons dans la suite certains des modèles analytiques qui ont été développés pour prédire la perméabilité des milieux fibreux.

##### 3.1.1.1 Les modèles capillaires

La principale hypothèse des modèles capillaires est que le milieu poreux est équivalent à un assemblage de capillaires parallèles. Carman [Car61] a effectué une bonne revue des différents modèles capillaires développés à l'époque. Blake [Bla22] et Kozeny [Koz27] ont travaillé indépendamment pour déterminer une relation liant perméabilité et porosité. Ils considèrent que les capillaires ont pour rayon le rayon hydraulique des pores eux-mêmes. Kozeny a supposé que les capillaires avaient une forme de section droite représentative de la forme moyenne d'une section de droite de pore. Il a de plus pris en compte la tortuosité du milieu. Cette relation a ensuite été modifiée par Carman [Car61] pour obtenir la relation suivante :

$$K = \frac{1}{k_0 \tau^2 S_0^2} \frac{\Phi^3}{(1 - \Phi)^2} \quad (3.1)$$

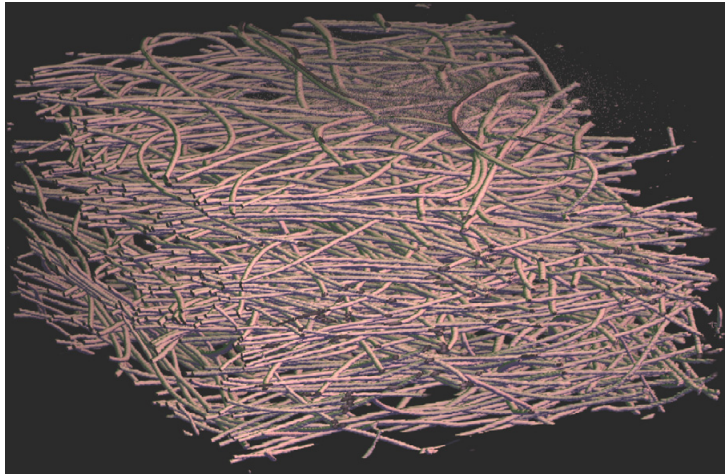
où  $\tau$  est la tortuosité,  $\Phi$  est la porosité,  $k_0$  est un facteur de forme dont différentes valeurs sont données tableau 3.1 et  $S_0$  la surface spécifique. La surface spécifique est la surface

**TABLE 3.1** – Valeurs de  $k_0$  pour différentes formes de sections de capillaires

Forme	$k_0$
Cercle	2
Ellipse, demi-axes $a, b$ :	
(i) $a = 2b$	2.13
(ii) $a = 10b$	2.45
Carré	1.78
Rectangle, côtés $a, b$ :	
(i) $a = 2b$	1.94
(ii) $a = 10b$	2.65
Fente parallèle	3
Triangle équilatéral	1.67
Espace annulaire dans des tuyaux concentriques	2.0 - 3.0

exposée au fluide, par unité de volume. La tortuosité est le rapport entre la distance réellement parcourue par le fluide et la distance linéaire. La tortuosité est un paramètre difficile à mesurer. Carman propose  $\tau = \sqrt{2}$  pour des milieux poreux isotropes et  $k_0 = 2.5$ . On a ainsi une bonne solution pour une large gamme de porosité.

Certains scientifiques ont cherché à déterminer la valeur de la constante de Kozeny-Carman pour des milieux fibreux, milieux pour lesquels la porosité est très souvent bien plus élevée que celle des milieux granulaires habituels en géologie et dont la structure du squelette solide est très différente. Jaganathan et al. [JVTP08] ont comparé des calculs numériques de perméabilité sur un volume digitalisé de mat (figure 3.1) avec des résultats de lois analytiques de la littérature. Rhali et al. [RTMS95] donnent une loi expérimentale

**FIGURE 3.1** – Volume digitalisé d'un mat avec une résolution de  $1.77 \mu\text{m}$  par voxel [JVTP08]

pour calculer la perméabilité d'empilements aléatoires de fibres courtes en se basant sur la relation de Kozeny-Carman :

$$K = \frac{62.5\Phi^6 d^2}{(1 - \Phi)^2 (3.6 + 56.4\Phi)^2} \quad (3.2)$$

avec  $d$  le diamètre des fibres. Les expériences ont été menées avec des fils de cuivre ou de bronze de  $136 \mu\text{m}$  de diamètre et des rapports d'aspect allant jusqu'à 80. Kyan et al. [KWK70] calculent la constante de Kozeny-Carman pour un lit de fibres courtes arrangées aléatoirement.

### 3.1.1.2 Les modèles de cellule

En 1959, Happel [Hap59] expose son modèle de prédiction de la perméabilité. Les équations de Stokes sont résolues sur un arrangement régulier de cylindres unidirectionnels. Le motif de l'arrangement étant régulier, l'auteur définit une cellule élémentaire, d'où le nom de *modèle de cellule*. Pour simplifier son modèle, il considère cette cellule carrée comme une cellule circulaire autour de la fibre. Il prendra la fraction volumique de fibre dans la cellule comme étant la même que celle de l'arrangement de cylindres. L'auteur considère qu'à une certaine distance du cylindre, la perturbation qu'il provoque sur l'écoulement devient négligeable. En prenant comme condition aux limites une vitesse radiale nulle à la frontière de la cellule et un non glissement à la paroi du cylindre, les cellules autour de chaque fibre composant l'arrangement pourront être considérées comme indépendantes les unes des autres. Cela explique que le modèle de cellule ne soit valable qu'à faible taux de fibres. L'auteur propose aussi une loi analytique pour la perméabilité parallèle et perpendiculaire aux fibres.

En ce qui concerne l'écoulement parallèle à l'axe des cylindres, les équations de Stokes sont écrites dans un repère cylindrique :

$$\frac{\partial}{r\partial r} \left( r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) = \frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (3.3)$$

où  $v_z$  est la composante de la vitesse dans la direction de l'axe des fibres. En imposant une vitesse nulle à la surface de la fibre et un gradient radial de la vitesse nul à la frontière de la cellule, la solution pour le champ de vitesse pour une pression variant linéairement le long de l'axe du cylindre est la suivante :

$$v_z = -\frac{1}{4\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \left( a^2 - r^2 + 2b^2 \ln \frac{r}{a} \right) \quad (3.4)$$

où  $a$  et  $b$  sont respectivement les rayons du cylindre et de la frontière du domaine. A partir de cette solution et de la loi de Darcy, la perméabilité longitudinale peut s'exprimer sous forme adimensionalisée (par le rayon des fibres au carré), en fonction du taux de fibres  $V_f = 1 - \Phi$  :

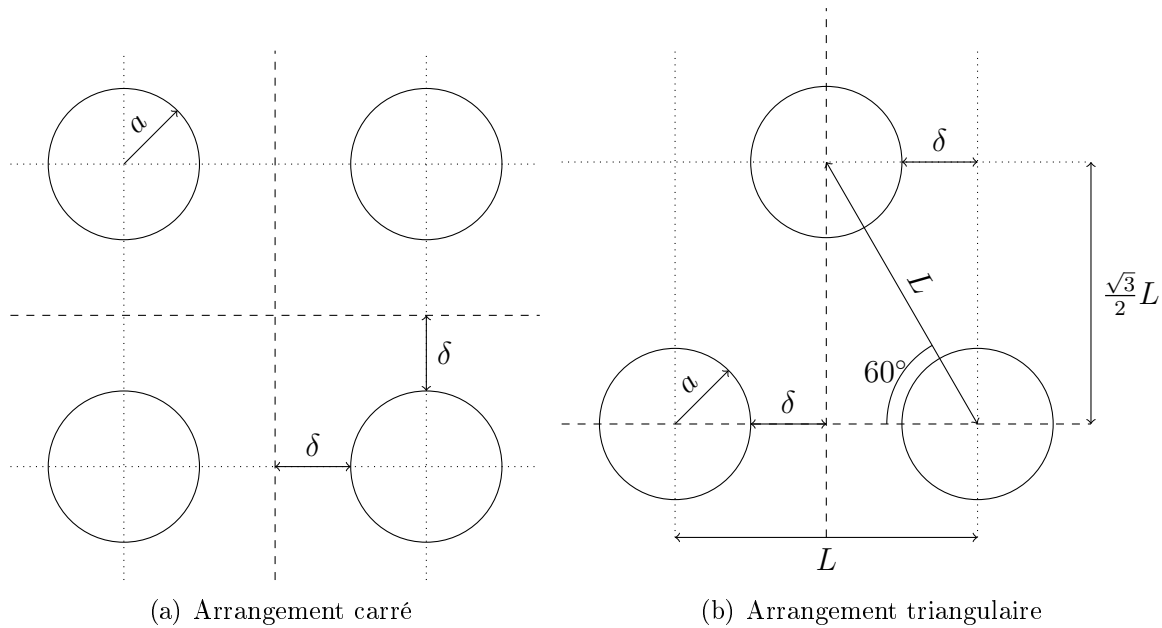
$$K_{\parallel} = \frac{1}{4V_f} \left( 2V_f - \frac{1}{2}V_f^2 - \frac{3}{2} - \ln V_f \right) \quad (3.5)$$

En ce qui concerne l'écoulement perpendiculaire à l'axe des fibres, l'auteur résout les équations de Stokes en utilisant les fonctions de courant. En imposant les conditions aux limites adéquates, il obtient, pour la perméabilité transverse sous forme adimensionnelle et en fonction du taux de fibres :

$$K_{\perp} = \frac{1}{8V_f} \left( \frac{V_f^2 - 1}{V_f^2 + 1} - \ln V_f \right) \quad (3.6)$$

### 3.1.1.3 Modèles de lubrification

Ces modèles sont basés sur l'application des approximations de la lubrification hydrodynamique aux écoulements dans des arrangements réguliers de fibres cylindriques unidirectionnelles. Les équations de Stokes sont résolues analytiquement, en utilisant des approximations plus ou moins fortes. A partir des champs de vitesse et de pression analytiques obtenus et introduits dans la loi de Darcy, une relation liant la perméabilité à la porosité ou au taux de fibres, pour les arrangements donnés figure 3.2, est obtenue. Selon les auteurs, l'arrangement que nous nommons triangulaire s'appelle arrangement hexaédrique.



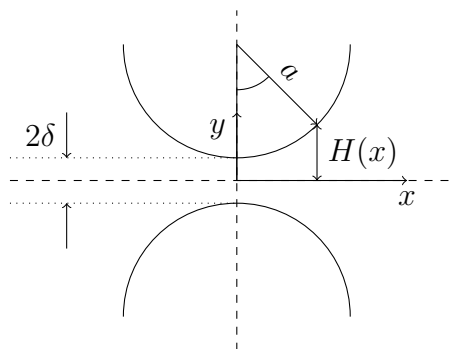
**FIGURE 3.2** – Représentation schématique des différents arrangements sur lesquels des relations analytiques pour la perméabilité ont été obtenues.

Gebart [Geb92] se place dans la configuration illustrée figure 3.3. Il utilise les approximations de la lubrification hydrodynamique, qui reviennent à considérer que l'écoulement se fait localement entre des plans parallèles, ce qui donne un gradient de pression constant selon  $x$ . Cependant, la distance entre ces plans varie selon  $x$ , ce qui nous donne un champ de vitesse dépendant à la fois de  $x$  et de  $y$ . Le champ de vitesse s'écrit ainsi :

$$v_x = \frac{H(x)^2}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \left( \frac{y^2}{H(x)^2} - 1 \right) \quad (3.7)$$

où  $x$  est la direction de l'écoulement et  $2H(x)$  est la distance verticale entre les surfaces de deux fibres. En utilisant la loi de conservation du débit  $Q$ , il est possible d'en tirer la relation suivante pour la pression :

$$p_{x_a} - p_{x_b} = -\frac{3}{2}\mu Q \int_{x_a}^{x_b} \frac{dx}{H(x)^3} \quad (3.8)$$



**FIGURE 3.3** – Application des approximations de la lubrification hydrodynamique entre deux fibres.

En faisant une approximation sur la valeur de l'intégrale de l'équation (3.8), l'auteur obtient :

$$\Delta p = -\frac{9\sqrt{2}\pi}{16} \frac{\eta Q}{a^2} \left(\frac{\delta}{a}\right)^{-5/2} \quad (3.9)$$

pour la différence de pression entre deux fibres successives (de centre à centre) dans la direction de l'écoulement. En identifiant cette dernière relation avec la loi de Darcy, en l'exprimant en fonction du taux de fibres et en adimensionnalisant par  $a^2$ , nous obtenons la relation suivante pour un arrangement carré :

$$K_{carré} = \frac{16}{9\sqrt{2}\pi} \left( \sqrt{\frac{V_{fmax}}{V_f}} - 1 \right)^{5/2} \quad (3.10)$$

avec  $V_{fmax} = \frac{\pi}{4}$ . Dans le cas triangulaire, Gebart considère que seules les dimensions de la cellule élémentaire changent. Les expressions pour les champs de vitesse et de pression sont donc les mêmes que celles de l'arrangement carré, aux différences près dues aux dimensions de la cellule. Dans ce cas, la relation est la suivante :

$$K_{tri} = \frac{16}{9\sqrt{6}\pi} \left( \sqrt{\frac{V_{fmax}}{V_f}} - 1 \right)^{5/2} \quad (3.11)$$

avec, cette fois,  $V_{fmax} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$ .

Pour un écoulement parallèle aux fibres, Gebart considère que l'écoulement entre les fibres est équivalent à un écoulement dans un tube dont le diamètre hydraulique équivalent est dépendant du taux de fibres. Il obtient ainsi la relation suivante :

$$K = \frac{8(1 - V_f)^3}{c V_f^2} \quad (3.12)$$

Nous pouvons ici y reconnaître une équation du type Kozeny-Carman. Le facteur de forme  $c$  prend pour valeur 57 dans un arrangement carré et 53 dans un arrangement triangulaire. Gebart montre ainsi que la constante de Kozeny ne doit pas être considérée comme une constante (calculée en fonction de la forme du canal d'écoulement du fluide) mais doit dépendre du taux de fibres.

Tamayol and Bahrami [TB09] procèdent d'une manière similaire à Gebart. Ils utilisent les équations de Stokes pour obtenir un écoulement avec un profil de vitesse parabolique de type Poiseuille :

$$\begin{cases} v_x = \frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} (H(x)^2 - y^2) & 0 \leq x \leq a \\ v_x = \frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} (H(x)^2 - y^2) + g(\Phi) \frac{x}{a} \bar{U} & a \leq x \leq a + \delta \end{cases} \quad (3.13)$$

où  $\Phi$  est la porosité,  $\bar{U}$  est la vitesse de Darcy,  $g(\Phi) = 1.274(1 - \Phi) - 0.274$  et

$$H(x) = \begin{cases} a + \delta - \sqrt{a^2 - x^2} & 0 \leq x \leq a \\ a + \delta & a \leq x \leq a + \delta \end{cases} \quad (3.14)$$

pour un arrangement carré dont le motif élémentaire est donné figure 3.4. Pour les notations, il faut se référer à la figure 3.2(a). La fonction  $g(\Phi)$  est obtenue en supposant que la vitesse  $u_b$  à la frontière de la cellule élémentaire est dépendante de la porosité par la relation linéaire  $g(\Phi)$ , où  $g(0.215) = 0$  (les fibres se touchent) et  $g(1) = 1$ . Les auteurs calculent ensuite le différentiel de pression et, en l'introduisant dans la loi de Darcy, obtiennent la relation adimensionnelle suivante pour la perméabilité transverse d'un arrangement carré de cylindres unidirectionnels :

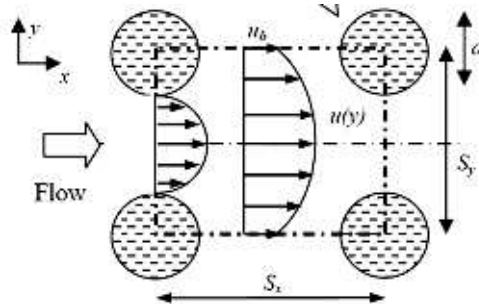
$$K_{\perp} = 4 \left( \frac{12 (\sqrt{\Phi'} - 1)}{\Phi' \sqrt{\Phi'}} \frac{2 - g(\Phi)}{2} + \frac{18 + 12 (\Phi' - 1)}{\sqrt{\Phi'} (1 - \Phi')^2} + \frac{18 \sqrt{\Phi'} \left[ \tan^{-1} \left( \frac{1}{\sqrt{\Phi' - 1}} \right) + \frac{\pi}{2} \right]}{(\Phi' - 1)^{\frac{5}{2}}} \right)^{-1} \quad (3.15)$$

où  $\Phi' = \frac{\pi}{4(1-\Phi)}$  et  $g(\Phi) = 1.274\Phi - 0.274$ . On peut l'exprimer en fonction du taux de fibres, en prenant  $\Phi' = \frac{\pi}{4V_f}$  et  $g(V_f) = 1 - 1.274V_f$ .

Les auteurs proposent aussi une relation pour la perméabilité longitudinale aux fibres, lorsque celles-ci se touchent. En se basant sur la relation de Darcy-Weisbach qui permet de modéliser l'écoulement dans un tuyau, ils obtiennent la relation analytique suivante pour la perméabilité :

$$K_{D-W} = \frac{2\Phi^2 \eta D_h}{f \rho \bar{U}} a^{-2} \quad (3.16)$$

où  $D_h$  est le diamètre hydraulique équivalent et  $f$  est le facteur de friction de Fanning. Il faut cependant remarquer que pour résoudre le problème, il est nécessaire de connaître



**FIGURE 3.4** – Cellule élémentaire utilisée par Tamayol pour obtenir sa loi analytique [TB09].

Sur cette figure,  $S = d + 2\delta$ , avec  $d = 2a$ .

le facteur de Fanning. Les auteurs [TB09] donnent quelques valeurs de  $f$  et du diamètre hydraulique  $D_h$  provenant de la littérature, comme par exemple  $f = 6.503$  et  $D_h = 0.103 * 2R$  pour un arrangement triangulaire (dans ce cas  $\Phi = 0.094$ ) et  $f = 6.606$  et  $D_h = 0.274 * 2R$  pour un arrangement carré (dans ce cas  $\Phi = 0.215$ ). Un modèle proposé par Bahrami et al. [BYC06] permet de calculer le facteur de friction  $f$ .

### 3.1.1.4 Le modèle mixte de Brusckke et Advani [BA93]

Bruschke et Advani [BA93] proposent un modèle mixte qui est une combinaison d'une relation analytique donnée par une méthode de lubrification, qui donne de bons résultats à fort taux de fibres et d'une relation analytique donnée par un modèle de cellule, qui donne de bons résultats pour de faibles taux de fibres, pour la perméabilité transverse :

$$K_{hyb} = \xi_1 K_{lub} + \xi_2 K_{cell} \quad (3.17)$$

avec

$$\begin{cases} \xi_1 = 1 - e^{\varsigma \left( \frac{-V_{fmax}}{\tilde{V}_f} - 1 \right)} \\ \xi_2 = 1 - e^{\varsigma \left( \frac{-V_{fmax}}{V_f} + 1 \right)} \end{cases} \quad (3.18)$$

où  $\varsigma$  est un paramètre ajustable. Les auteurs proposent  $\varsigma = 0.8$  comme une valeur correcte en comparant les résultats donnés par leur loi analytique et des résultats issus de calculs numériques. Les modèles de cellule et de lubrification utilisés dans le modèle mixte sont donnés dans la même publication et développés par les auteurs [BA93]. Pour le modèle de lubrification, la relation est la suivante :

$$K_{lub} = \frac{1}{A} \frac{(1 - \tilde{V}_f^2)^2}{\tilde{V}_f^3} \left( 3\tilde{V}_f \frac{\arctan \left( \sqrt{(1 + \tilde{V}_f)/(1 - \tilde{V}_f)} \right)}{\sqrt{1 - \tilde{V}_f^2}} + \frac{1}{2} \tilde{V}_f^2 + 1 \right)^{-1} \quad (3.19)$$

avec  $\tilde{V}_f$  et  $A$  donnés table 3.2. Le modèle de cellule, développé par les auteurs, est le

**TABLE 3.2** – Paramètres pour le modèle de lubrification de Brusckke and Advani [BA93]

Arrangement	$A$	$\tilde{V}_f$
Carré	3	$\sqrt{\frac{4}{\pi} V_f}$
Triangulaire	$3\sqrt{3}$	$\sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{\pi} V_f}$

suivant :

$$K_{cell} = -\frac{1}{8V_f} \left( \ln V_f + \frac{3}{2} - 2V_f + \frac{1}{2} V_f^2 \right) \quad (3.20)$$

## 3.1.2 Échelle mésoscopique

Les lois analytiques de la littérature concernant la détermination de la perméabilité de cylindres unidirectionnels sont utilisées pour prédire la perméabilité à l'échelle microscopique car il est fait l'hypothèse que les cylindres sont imperméables, ce qui est le cas

des fibres composant les mèches. En revanche, lorsque nous nous plaçons à l'échelle des mèches, ces lois ne sont utilisables qu'à condition de considérer les mèches comme des solides imperméables. De plus, il est nécessaire de les supposer de formes géométriques simples, comme des cylindres unidirectionnels. Ce n'est le cas ni pour l'unidirectionnalité ni pour la forme, cette dernière n'étant pas constante le long de la mèche.

Nous pouvons donc trouver dans la littérature des modèles permettant de prédire la perméabilité à l'échelle mésoscopique. Les hypothèses sont souvent simplificatrices. Nous trouvons, par exemple, l'hypothèse d'imperméabilité des mèches dans la thèse de Hoareau [Hoa94]. En effet, l'auteur s'est fortement inspiré de la méthode utilisée par Gebart [Geb92] pour déterminer sa loi analytique, en faisant de plus l'hypothèse de mèches de section lenticulaire.

La figure 3.5 montre la géométrie sur laquelle est donnée la perméabilité. En consi-

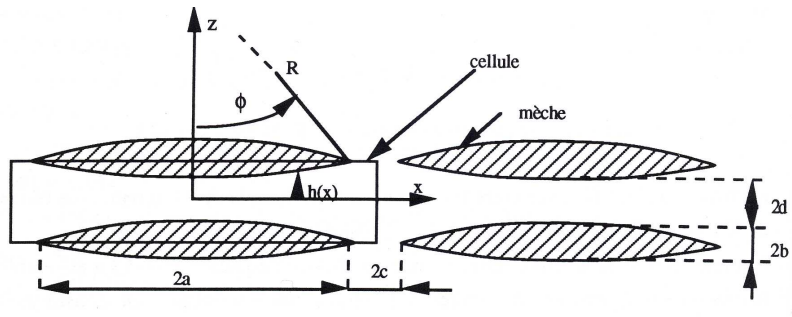


FIGURE 3.5 – Géométrie sur laquelle on va déterminer la perméabilité [Hoa94].

dérant que la perte de charge en dehors de la zone d'entrefer minimal est négligeable (c'est-à-dire entre les extrémités des mèches et dans la zone où  $H(x)$  n'est pas défini), la perméabilité est donnée par la relation suivante :

$$K = \frac{2}{3} \frac{a+c}{\sqrt{a^2+b^2}} \frac{b^2}{I(a)} \frac{\left(\frac{V_{fmax}}{V_f} - 1\right)^{5/2}}{\frac{V_{fmax}}{V_f}} \quad (3.21)$$

avec

$$I(a) = \frac{1}{2} \left( \frac{3}{2} \arctan \left( \frac{a}{\sqrt{2Rd}} \right) + \sin \left[ 2 \arctan \left( \frac{a}{\sqrt{2Rd}} \right) \right] + \frac{1}{8} \sin \left[ 4 \arctan \left( \frac{a}{\sqrt{2Rd}} \right) \right] \right) \quad (3.22)$$

$$V_f = \frac{\frac{1}{2} \arcsin \left( \frac{2ab}{a^2+b^2} \right) \left( \frac{a^2+b^2}{2b} \right)^2 - \frac{(a^2-b^2)a}{4b}}{(a+c)(b+d)} \quad (3.23)$$

et où le rayon des mèches s'écrit  $R = \frac{a^2+b^2}{2b}$ . Il faut bien noter que pour les équations (3.21), (3.22) et (3.23), les notations sont celles de la figure 3.5, c'est-à-dire que  $R$  est le rayon des mèches,  $2a$  est leur largeur,  $2b$  est leur épaisseur,  $2c$  la distance entre les mèches selon  $x$  et  $d = \min(H(x))$ .

Aucune expression pour  $V_{fmax}$  n'est donnée. Celle-ci reste donc à calculer pour pouvoir utiliser cette relation analytique.

Hoareau [Hoa94] ne donne pas de relation pour un écoulement dans la direction des mèches, n'ayant pas trouvé de valeurs du facteur de forme  $c$  pour sa géométrie dans la littérature.

Une autre étude [PW96] fait l'hypothèse d'une géométrie de mèches plus simple puisque les mèches sont de section elliptique et cette fois poreuses. Les auteurs utilisent un arrangement régulier rectangulaire de ces mèches elliptiques et définissent la porosité sous la forme suivante :

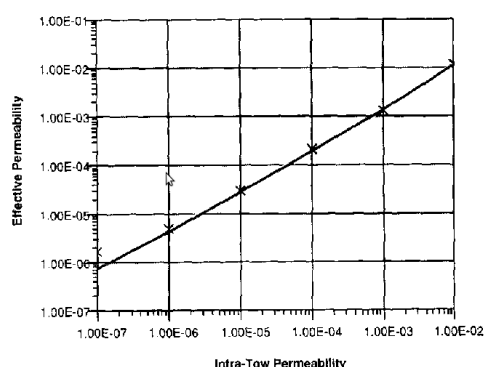
$$\Phi = 1 - \frac{\pi}{4} \frac{ab}{L_x L_y} (1 - \Phi_{meche}) \quad (3.24)$$

où  $a$  est le demi grand axe et  $b$  le demi petit axe de la section de la mèche,  $L_x$  et  $L_y$  les dimensions du VER et  $\Phi_{meche}$  la porosité de la mèche. De même, ils définissent une porosité nominale sous la forme suivante :

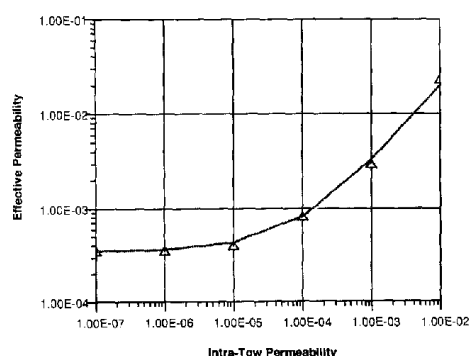
$$\Phi = 1 - \frac{\pi}{4} \frac{ab}{L_x L_y} \quad (3.25)$$

Cette porosité nominale est basée seulement sur la section des mèches et permet de comparer des mèches de même géométrie mais de propriétés internes différentes.

Les auteurs résolvent numériquement la loi de Brinkman et comparent les perméabilités obtenues pour différentes perméabilités de mèches. Ils montrent (figure 3.6 et 3.7) l'importance de prendre en compte la perméabilité des mèches lorsque le taux de fibres est très important, ce qui est le cas lorsque la compaction du renfort est importante.



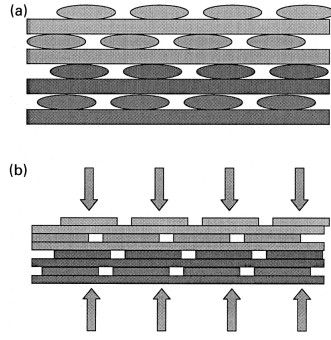
**FIGURE 3.6** – Comparaison entre le modèle développé par les auteurs de [PW96] et le logiciel FIDAP, pour des mèches elliptiques 2 : 1 et une porosité de mèches de 22%.



**FIGURE 3.7** – Comparaison entre le modèle développé par les auteurs de [PW96] et le logiciel FIDAP, pour des mèches elliptiques 2 : 1 et une porosité de mèches de 25%.

Lundström [Lun00] considère une géométrie simple pour un renfort comprimé (figure 3.8). L'auteur suppose que la perméabilité des mèches est donnée par les lois de Gebart [Geb92]. Il donne ensuite l'expression suivante pour la perméabilité d'une couche dont les mèches sont parallèles à l'écoulement :

$$K_{parallèle} = \frac{\sum_{n=1}^m K_{canal}^n A_{canal}^n + \sum_{n=1}^m K_{mèche}^n A_{mèche}^n}{\sum_{n=1}^m A_{canal}^n + \sum_{n=1}^m A_{mèche}^n} \quad (3.26)$$



**FIGURE 3.8** – En a), la géométrie des mèches non soumise à compression. En b), les mèches comprimées. La géométrie utilisée pour les calculs de perméabilité est celle de la configuration b).

et l'expression suivante pour une couche dont les fibres sont perpendiculaires à l'écoulement :

$$K_{perpendiculaire} = \frac{L}{\sum_{n=1}^m \frac{W_{mèche}^n}{K_{mèche}^n}} \quad (3.27)$$

Enfin, l'expression suivante pour la perméabilité des zones entre les fibres (c'est-à-dire la perméabilité équivalente à la perte de charge dans ces canaux) :

$$K^n = \frac{W_n^3}{H_n} \left[ \frac{16}{\pi^5} \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{1}{(2\alpha+1)^5} \frac{\exp\left((2\alpha+1)\pi\frac{H_n}{W_n}\right) - 1}{\exp\left((2\alpha+1)\pi\frac{H_n}{W_n}\right) + 1} + \frac{1}{12} \frac{H_n}{W_n} \right] + \frac{K_{mèche}^{parallèle}}{1 - V_f} \quad (3.28)$$

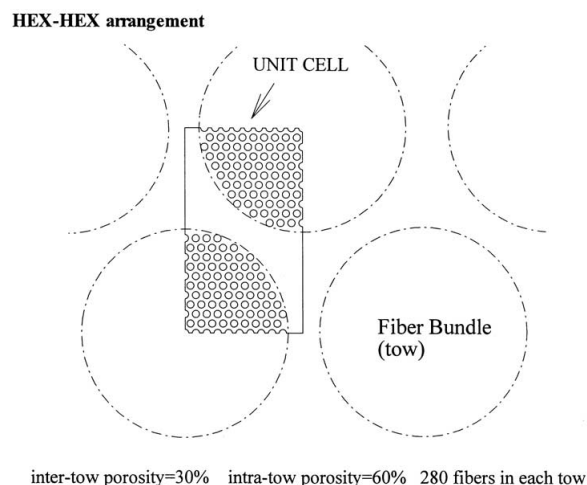
où  $A$  est l'aire de la section de l'écoulement,  $m$  est le nombre de mèches ou de canaux,  $L$  est la longueur de l'écoulement et  $W$  et  $H$  sont respectivement la largeur et la hauteur de la mèche ou du canal. La perméabilité globale du renfort est ensuite obtenue par une moyenne de la perméabilité perpendiculaire et de la perméabilité parallèle des couches, pondérée par la section des couches.

La comparaison du modèle avec les résultats expérimentaux montre que sa validité est meilleure pour les faibles taux de fibres que pour les forts taux de fibres. De plus, les auteurs concluent que la contribution des mèches à la perméabilité globale du renfort est très faible, voir négligeable lorsque le taux de fibres des mèches est très élevé.

Papathanasiou [Pap01] propose un modèle semi-empirique de la perméabilité transverse, déterminé à partir de calculs numériques par une méthode d'éléments frontières, pour un arrangement triangulaire de mèches cylindriques. Ces mèches sont elles-mêmes un arrangement triangulaire de fibres cylindriques (figure 3.9). Ils proposent la loi suivante pour la perméabilité transverse :

$$K = K_s \left( 1 + 2.67 \left( \frac{K_{meche}}{K_s} \right)^{0.89} \right) \quad (3.29)$$

où  $K_s$  est la perméabilité mésoscopique pour des mèches imperméables.



**FIGURE 3.9** – Représentation de l'arrangement de mèches et de fibres et domaine de calcul utilisé pour déterminer la perméabilité du renfort [Pap01].

### 3.1.3 Bibliographie sur le calcul numérique de la perméabilité

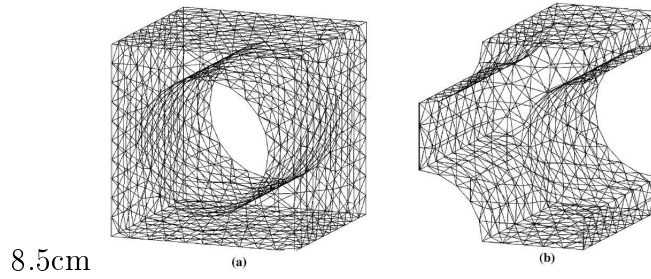
La détermination de lois analytiques n'est possible que pour des géométries simples. La recherche s'est donc tournée vers la prédiction numérique de la perméabilité. Une littérature importante s'est développée sur le sujet depuis de nombreuses années. Nous pouvons citer des études utilisant la méthode des éléments finis [LSM96, NT01, NT03, WLC03, TC04, SCKY04, GP07], la méthode Smooth Particles Hydrodynamics [JOS07], la méthode des éléments frontières [CP07], les méthodes Lattice Boltzman Method [BLV<sup>+</sup>04, PML07], les méthodes de volumes finis [NL05, NLFA06] avec le logiciel CFX (Ansys), [WMVTP06] avec le logiciel Fluent. Tous ces exemples montrent l'intérêt porté à la détermination de la perméabilité. Certains font ces études à l'échelle microscopique [WLC03, SY06, CP07, GP07, JOS07], d'autres à l'échelle mésoscopique en considérant un milieu poreux simple échelle [SCKY04, NL05, NLFA06] ou encore à l'échelle mésoscopique, en tenant compte de l'échelle inférieure [NT01, NT03, BLV<sup>+</sup>04, TC04, WMVTP06, PML07].

#### 3.1.3.1 Échelle microscopique

Cette échelle correspond à la mèche elle-même, composée de fibres dont le nombre peut atteindre plusieurs centaines. Le fluide s'écoule entre ces fibres. Dans ce cas, l'écoulement est simplement modélisé par les équations de Stokes.

Song et Youn [SY06] modélisent l'écoulement à une échelle microscopique afin de déterminer la perméabilité des mèches. Pour ces simulations, des arrangements réguliers de fibres sont considérés. La figure 3.10 montre une cellule élémentaire pour un arrangement carré et triangulaire.

Chen et Papathanasiou [CP07, CP08] et Jiang et al. [JOS07] simulent un écoulement de polymère entre des fibres. Chen et Papathanasiou [CP07] utilisent un algorithme de Monte-Carlo pour générer un ensemble de fibres qui ne se recouvrent pas (figure 3.11)



**FIGURE 3.10** – Maillage d’une cellule élémentaire pour un arrangement carré (a) ou triangulaire (b) des filaments [SY06].

et dont les positions sont paramétrées par la porosité  $\Phi$  souhaitée du VER et par une distance inter-fibres minimale  $\delta_{min}$ . Les conditions aux limites utilisées sont les suivantes :

- pas de glissement à la surface des fibres,
- conditions de Neuman homogène sur  $v_z$  aux frontières,  $v_z$  étant la vitesse parallèle aux fibres.

Un gradient de pression constant, soit dans la direction des fibres soit dans la direction transverse, est utilisé pour forcer l’écoulement. En utilisant la loi de Darcy, la perméabilité dans la direction des fibres  $K_{\parallel}$  [CP07] et transverse  $K_{\perp}$  [CP08] peut être déduite. Les auteurs proposent d’utiliser la distance inter-fibres comme paramètre supplémentaire. En effet, comme le montre les figures 3.11 pour un écoulement parallèle et 3.12 pour un écoulement transverse à l’axe des fibres, pour une même porosité, une distribution de fibres différente donne une perméabilité différente. Ils expliquent cela par le fait que des agrégations se forment pour de faibles distances inter-fibres, laissant de plus grands espaces poreux, ce qui augmente la perméabilité. Ils proposent l’expression suivante pour la perméabilité :

$$\frac{K}{K_{hex}} = \left( \frac{\bar{\delta}_1}{\delta_{hex}} \right)^n \quad (3.30)$$

où  $n$  dépend de la porosité,  $\bar{\delta}_1$  une distance inter-fibres moyenne et  $K_{hex}$  et  $\delta_{hex}$  correspondent à un arrangement triangulaire des fibres dans le VER. La relation est valable pour un écoulement transverse [CP08] et longitudinal [CP07] à l’axe des fibres et ainsi,  $K$  peut être indifféremment  $K_{\parallel}$  ou  $K_{\perp}$ . Nous pouvons observer, figures 3.13 et 3.14, que les calculs de perméabilité obtenus par les simulations suivent une loi puissance fonction du rapport des distances inter-fibres. En s’approchant de l’arrangement hexagonal des fibres, la perméabilité du VER diminue.

### 3.1.3.2 Échelle mésoscopique

Les mèches sont assemblées sans tissage (mat) ou tissées. Le volume élémentaire à représenter dépend des dimensions des mèches et de l’architecture du renfort. A cette échelle, l’écoulement du fluide entre les mèches est modélisé en utilisant les équations de Stokes. L’écoulement interne aux mèches, lorsqu’il est modélisé, l’est souvent en résolvant la loi de Darcy (1.39), c’est-à-dire que le milieu poreux qui représente la mèche est considéré comme un milieu homogène. La difficulté que l’on peut rencontrer ici concerne la définition du VER dans le cas de pièces fines. On peut dans ce cas se trouver en présence

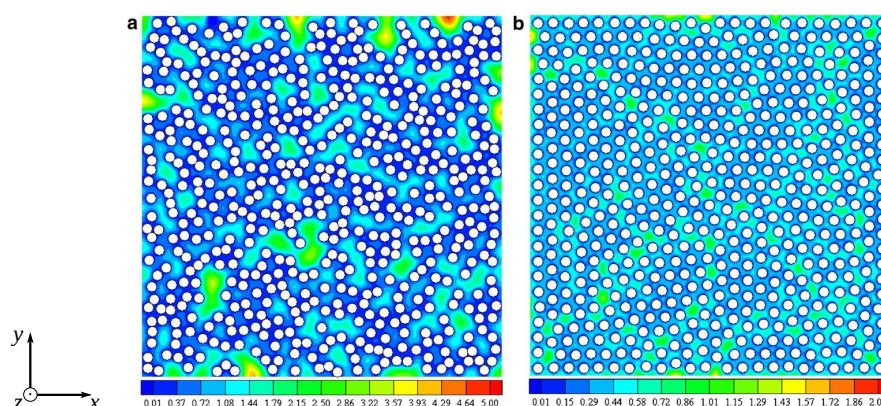


FIGURE 3.11 – Distribution de la composante axiale  $v_z$  de la vitesse. (a)  $\Phi = 0.70$ ,  $\delta_{min} = 0.1a$ ,  $K_{\parallel}/a^2 = 0.493$ ; (b)  $\Phi = 0.70$ ,  $\delta_{min} = 1.2a$ ,  $K_{\parallel}/a^2 = 0.246$ ;  $a$  étant le rayon des fibres et  $\delta_{min}$  la distance inter-fibres minimale [CP07].

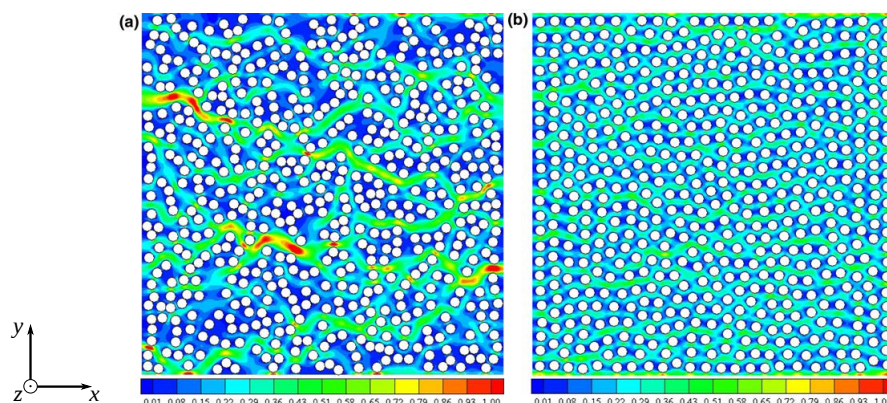


FIGURE 3.12 – Vitesse transverse. (a)  $\Phi = 0.70$ ,  $\delta_{min} = 0.1a$ ,  $K_{\parallel}/a^2 = 9.427 \times 10^{-2}$ ; (b)  $\Phi = 0.70$ ,  $\delta_{min} = 1.0a$ ,  $K_{\parallel}/a^2 = 1.024 \times 10^{-1}$  [CP08].

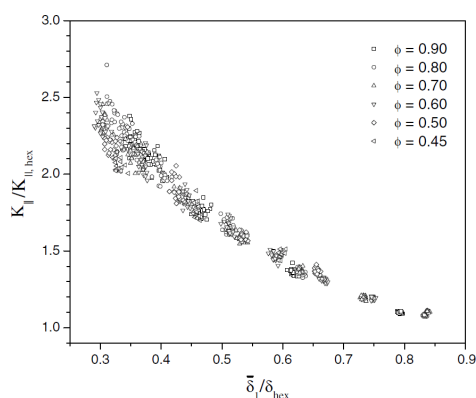


FIGURE 3.13 – Résultats de simulations pour différents arrangements de fibres [CP07].

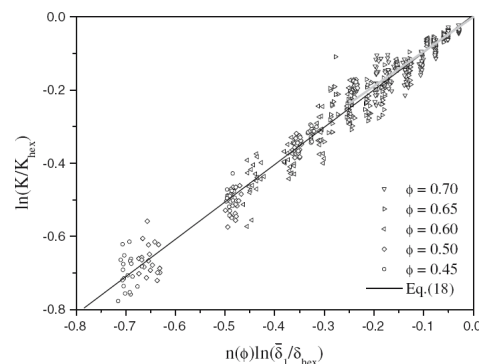


FIGURE 3.14 – Relation entre la perméabilité et la distance inter-fibres issue de simulations pour différents arrangements de fibres [CP08]. L'équation (18) de la légende du graphe correspond à l'équation (3.30) de ce manuscrit.

d'un empilement de quelques tissus seulement. Le VER risque dans ce cas d'avoir des dimensions proches de celles du moule, surtout dans l'épaisseur.

Ngo et Tamma [NT03] utilisent une méthode des éléments finis stabilisés par une méthode PSPG (pressure-stabilizing Petrov-Galerkin) pour calculer la perméabilité d'un renfort. La perméabilité locale des mèches est calculée en utilisant la relation de Gebart [Geb92]. Afin de rester sur le repère global, le tenseur de perméabilité global est calculé à partir de la perméabilité locale en utilisant la méthode suivante.

Pour un assemblage régulier de fibres, nous pouvons définir une repère local  $\Pi_L$  dont l'axe  $z_L$  est aligné avec l'axe des fibres. Dans ce cas, le tenseur de perméabilité s'écrit sous la forme suivante :

$$K_L = \begin{pmatrix} K_{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & K_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & K_{\parallel} \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

Le tenseur de perméabilité global, c'est-à-dire le tenseur de perméabilité défini dans un repère quelconque et qui n'a aucune orientation particulière avec les fibres, peut être déterminé à partir de  $K_L$  en utilisant la matrice de rotation  $R$  :

$$R = \Pi_G \cdot \Pi_L^T = \begin{pmatrix} x_G x_L & x_G y_L & x_G z_L \\ y_G x_L & y_G y_L & y_G z_L \\ z_G x_L & z_G y_L & z_G z_L \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

où  $\Pi_G$  est le repère global. La perméabilité globale s'écrit donc :

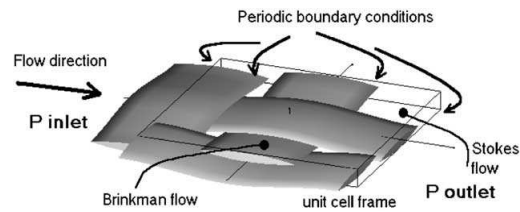
$$K_G = R K_L R^T = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{pmatrix} \quad (3.33)$$

L'équation suivante de Brinkman est résolue :

$$0 = \eta \Delta \vec{v} - \nabla p - \mathbb{I}_s \Phi \eta K^{-1} \vec{v} \quad (3.34)$$

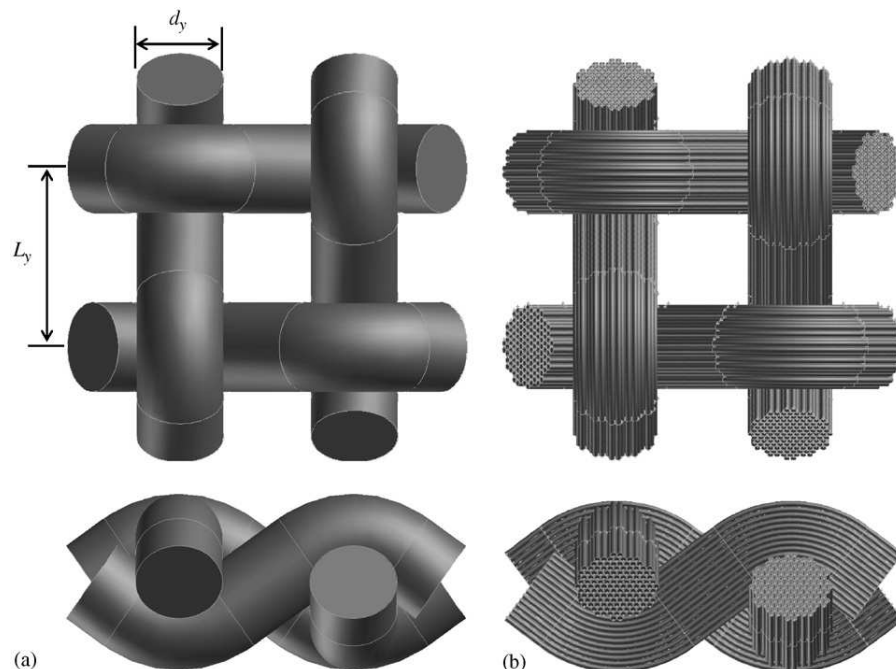
où  $\mathbb{I}_s$  vaut 1 si le point du domaine appartient à la mèche (l'équation de Brinkman est résolue) ou 0 si on est en dehors (l'équation de Stokes est résolue). Finalement, les moyennes volumiques de la vitesse et de la pression sont calculées et introduites dans l'équation de Darcy pour déterminer la perméabilité effective du renfort.

Park et al. [PML07] et Belov et al. [BLV<sup>+</sup>04], la micro-porosité est prise en compte dans l'écoulement en résolvant le couple d'équations Stokes et Brinkman avec une méthode LBM (Lattice Boltzmann Method), c'est à dire que l'écoulement est modélisé par des particules qui vont interagir les unes avec les autres. Song et Youn [SY06] utilisent une méthode d'éléments finis. L'intérêt d'utiliser l'équation de Brinkman est qu'elle ne diffère de l'équation de Stokes que par l'ajout du terme de résistance au fluide qui tient compte de la perméabilité du milieu. Cela permet de résoudre plus facilement le problème multidomaines contenant des zones de fluide pur dont l'écoulement est résolu par Stokes et des zones de milieu poreux, dont l'écoulement est résolu par Brinkman. La figure 3.15 donne un exemple de géométrie où les deux équations sont calculées.

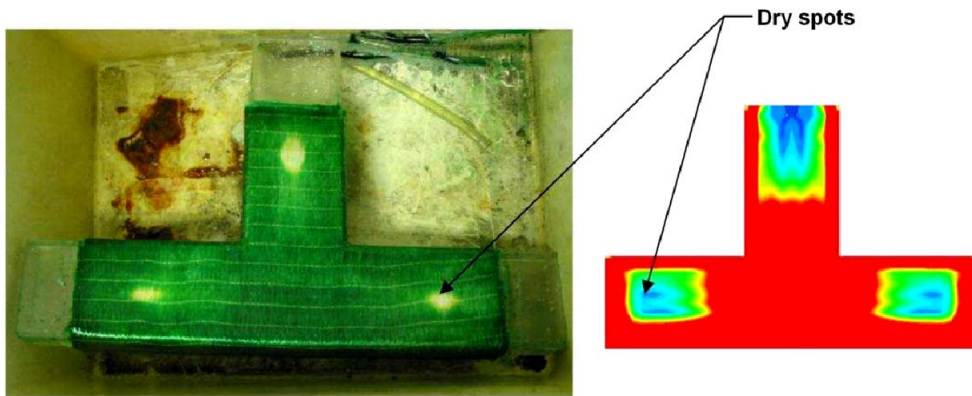


**FIGURE 3.15** – Cellule élémentaire du renfort utilisé pour la LBM (Lattice Boltzmann Method) [BLV<sup>+</sup>04].

Wang et al. [WMVTP06] prennent en compte la double porosité de manière directe, c'est à dire que l'écoulement entre les mèches est toujours simulé par Stokes. L'écoulement dans les mèches n'est plus modélisé par Darcy mais également par Stokes, chaque fibre étant représentée individuellement (figure 3.16). Une comparaison avec un modèle utilisant l'immersion de domaines y est faite, où la mèche est considérée comme un milieu poreux, dans laquelle la loi de Darcy est résolue. Les calculs utilisent la méthode des volumes finis avec le logiciel Fluent. La perméabilité utilisée dans ce cas est donnée par la relation de Gebart [Geb92]. Les auteurs comparent la perméabilité finale calculée par les deux modèles. Ils concluent que la relation de Gebart sous-estime la perméabilité de 10 à 15%, même à haut taux de fibres. On peut cependant se poser des questions sur la forme des mèches, qui sont lisses et bien circulaires dans le cas poreux, mais qui ne le sont plus du tout dans le cas direct, où elles sont composées de 139 fibres.



**FIGURE 3.16** – Cellule élémentaire du renfort (a) les mèches sont considérées comme un milieu poreux, (b) les 139 fibres composant chaque mèche sont modélisées [WMVTP06].



**FIGURE 3.17** – Comparaison entre l'expérience à gauche et la simulation numérique à droite avec la loi de Darcy [NTHM06] lors de l'injection dans un moule de connection entre des poutres et des colonnes.

### 3.1.3.3 Échelle macroscopique

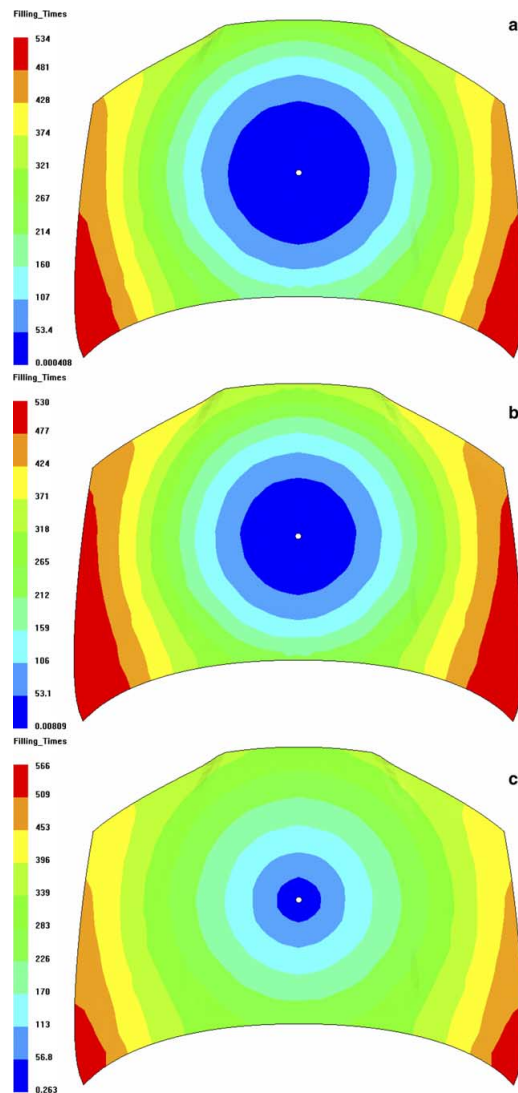
Nous considérons maintenant l'échelle de la pièce. En général, ses dimensions ne permettent pas de modéliser le renfort par ses mèches. La cavité du moule est remplacée par un milieu dont les petites échelles ont été homogénéisées et qui est caractérisé par une porosité et une perméabilité équivalentes au renfort, qu'il contienne ou non une double échelle de porosité. On utilisera donc une loi de Darcy ou de Brinkman.

La perméabilité  $K(x, y, z)$  peut varier dans chaque élément ou en chaque nœud en fonction du renfort, de sa compaction, de sa déformation. Pour un milieu anisotrope, la perméabilité, sous forme de tenseur pourra être exprimée sous la forme donnée en (3.33).

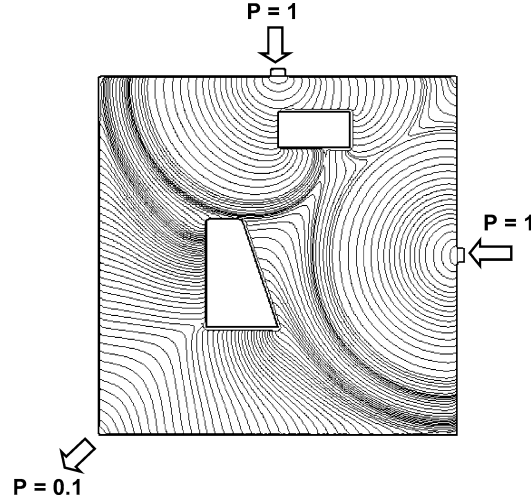
La simulation du remplissage d'un moule RTM par Nakshatrala et al. [NTHM06] (figure 3.17) permet d'observer la présence de zones sèches avec une bonne corrélation entre l'expérimental et la simulation numérique. D'autres auteurs [SBL<sup>+</sup>01] comparent l'injection expérimentale de résine dans un mat avec la simulation numérique du code RTM3D développé par Renault.

La figure 3.18 illustre le remplissage d'un capot automobile en utilisant la loi de Darcy [RAS<sup>+</sup>06]. L'écoulement et le déplacement du front de matière sont calculés en utilisant la méthode des éléments finis avec volumes de contrôle (FE/CV). Cette méthode consiste à considérer un volume autour de chaque nœud et le milieu des arêtes des éléments communs à ce nœud [NT03]. La valeur d'un facteur de remplissage en chaque nœud donne le taux de remplissage du volume de contrôle correspondant. Les flux de matière sont calculés sur les faces du volume de contrôle.

Les auteurs utilisent deux relations liant le taux de micro-vides et de micro-vides au nombre capillaire, ce dernier étant obtenu à partir du champ de vitesse calculé et des valeurs du coefficient de tension de surface et de l'angle de contact statique entre le polymère et la surface des fibres. La combinaison de ces deux lois leur permet d'optimiser le débit d'injection en cours de remplissage afin de minimiser le taux de vide. La figure 3.18 montre la position du front de résine au cours du temps en affichant le temps de remplissage (temps pour lequel le volume de contrôle est entièrement rempli).



**FIGURE 3.18** – Position au cours du temps du front de résine lors du remplissage d'un moule de capot de voiture [RAS<sup>+</sup>06]. En a) la pression d'injection est constante, en b) le débit d'injection est constant et en c) le débit d'injection a été optimisé par la méthode de calcul mise en place par les auteurs.



**FIGURE 3.19** – Évolution du front de résine avec une méthode BEM/Level Set [ST06]. Chaque ligne représente l'interface à un temps donné.

Les auteurs de [ST06] utilisent la méthode des éléments frontières (Boundary Element Method) pour résoudre l'équation de Darcy et la méthode Level Set pour suivre le front d'écoulement lors de l'imprégnation. La figure 3.19 montre la position du front de matière au cours du temps dans le cas d'un moule avec deux points d'injection et des obstacles. Cela permet de repérer les zones de recollement des deux fronts et les possibles zones de capture de bulles d'air.

## 3.2 Le calcul numérique de la perméabilité

Le calcul de la perméabilité d'un VER numérique est basé sur l'équation (1.39) que nous répétons ici :

$$\langle \vec{v} \rangle = -\frac{1}{\eta} K \cdot \nabla \langle P_f \rangle^f \quad (1.39)$$

et qui nous permet d'écrire la perméabilité sous la forme suivante :

$$K = -\eta \frac{\langle v \rangle}{\langle \nabla p \rangle^f} \quad (3.35)$$

En exprimant les grandeurs moyennes (la vitesse et le gradient de pression) en utilisant les relations (1.18) et (1.19), la perméabilité peut s'écrire :

$$K = -\eta \frac{\Omega_f}{\Omega} \frac{\int_{\Omega_f} v \, d\Omega_f}{\int_{\Omega_f} \nabla p \, d\Omega_f} \quad (3.36)$$

où  $\Omega_f$  est le volume de fluide et  $\Omega$  le volume total. Dans nos calculs, nous définissons une fonction caractéristique de la zone solide  $I_s$ . De plus, l'intégration sur le domaine de calcul peut s'écrire comme la somme de l'intégration sur chaque élément du maillage du domaine de calcul. Ainsi, la perméabilité peut s'écrire finalement :

$$k = -\eta \Phi \frac{\sum_i \int_{\Omega_i} (1 - I_s) v \, d\Omega_i}{\sum_i \int_{\Omega_i} (1 - I_s) \nabla p \, d\Omega_i} \quad (3.37)$$

Nous voyons dans l'équation (3.37) que le gradient de pression est calculé sur chaque élément. Du fait de la non régularité du maillage et de la précision de la formulation, des fluctuations artificielles du gradient de pression, qui est une grandeur définie aux éléments (section 2.2.2.1 page 43), apparaissent.

Étant donné la sensibilité de la perméabilité au gradient de pression, ces fluctuations vont détériorer la précision des résultats. Pour s'affranchir de ce problème (tout du moins en grande partie), nous avons testé l'utilisation d'une pression lissée :

$$p_s + \varepsilon_{\mathcal{K}} \Delta p_s = p \quad (3.38)$$

où  $\varepsilon_{\mathcal{K}} \Delta p_s$  est un terme de diffusion. Le calcul de cette pression lissée  $p_s$  à partir du champ de pression calculé  $p$  s'écrit sous la forme faible suivante :

$$\int_{\Omega} p_s q_h \, d\Omega - \int_{\Omega} \varepsilon_{\mathcal{K}} \, d\Omega = \int_{\Omega} p q_h \, d\Omega \quad (3.39)$$

où  $\varepsilon_{\mathcal{K}}$  dépend de la taille de maille.

Cette méthode à été testée dans la suite. Cependant, il ne s'agit que des premiers essais qui méritent d'être poursuivis. Nous avons choisi de prendre  $\varepsilon_{\mathcal{K}} \sim 10^{-3}$ . Cette valeur est restée constante quelle que soit la taille de maille utilisée pour le calcul, alors que le terme  $\varepsilon_{\mathcal{K}}$  est un terme de diffusion qui doit dépendre de la taille de maille  $h$ . Des tests plus poussés devraient être faits afin de tester l'évolution de l'erreur de calcul en fonction de ce paramètre  $\varepsilon_{\mathcal{K}}$  et de la taille de maille. Les premiers résultats donnés dans la suite sont néanmoins très prometteurs, surtout dans le cas 2D, où la formulation est moins précise que dans le cas 3D et où les gains apportés par ce post-traitement sur la pression sont loin d'être négligeables. Des calculs supplémentaires ont été faits sur les cas de validation utilisant un écoulement de Poiseuille mais cette méthode n'a pas été utilisée dans les autres calculs.

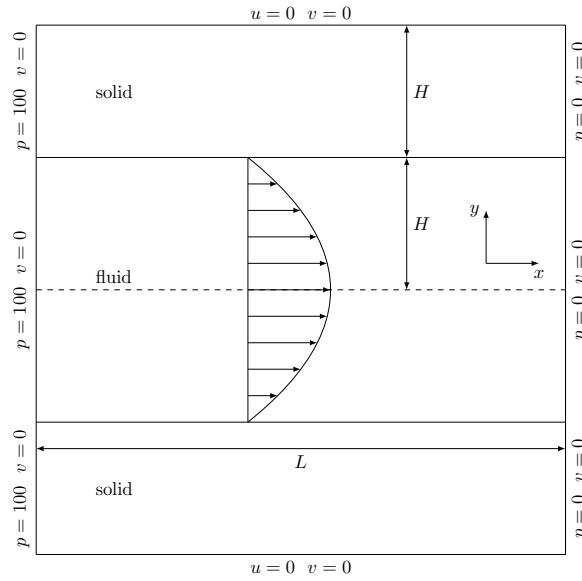
## 3.3 Validation du calcul de perméabilité

### 3.3.1 Perméabilité équivalente à un écoulement de Poiseuille

Dans un premier temps, nous allons valider notre méthode de calcul de la perméabilité sur un cas simple. Nous nous plaçons dans le cas d'un écoulement de Poiseuille entre deux plans infinis pour les cas 2D et 3D et dans une conduite cylindrique pour le cas 3D, comme présenté section 2.3.1 (page 51). Il existe dans ces cas une solution analytique du champ de vitesse (voir section 2.3.1.1) que nous relierons à la perméabilité. Nous pouvons donc comparer nos calculs à une solution exacte. Cela a aussi l'intérêt de ne pas nous donner de dispersion dans les résultats qui nous servent de référence, comme ce serait le cas pour des mesures expérimentales. Nous n'avons, dans ce cas, pas d'approximation, contrairement aux relations analytiques dans le cas d'arrangements réguliers, ces dernières étant basées sur des approximations qui peuvent être relativement fortes.

#### 3.3.1.1 Perméabilité analytique

L'écoulement de Poiseuille étudié est détaillé section 2.3.1.1 (page 51). La figure 3.20 reprend cet écoulement et donne les notations utilisées dans les équations suivantes. Le



**FIGURE 3.20** – Schéma d'un écoulement de Poiseuille dans un cas immergé.

champ de vitesse analytique est le suivant :

$$v_x(y) = \frac{\Delta p}{2\eta L} (y^2 - H^2) \quad (2.47)$$

Le débit par unité de longueur s'écrit de la manière suivante :

$$Q = -\frac{2\Delta p H^3}{3L\eta} \quad (3.40)$$

La perméabilité s'exprime de la manière suivante :

$$K = \frac{QL\eta}{\Delta p S} \quad (3.41)$$

où  $S = 4H$  puisqu'on est dans un cas 2D et que Darcy considère la section totale du matériau poreux et non la section fluide. Ainsi, dans le cas d'un écoulement de Poiseuille, la perméabilité est donnée par :

$$K = \frac{H^2}{6} \quad (3.42)$$

Si nous prenons  $H = 0.25$  mm et  $L = 1$  mm, pour un fluide de viscosité  $\eta = 1$  Pa·s et en imposant un différentiel de pression  $\Delta p = -100$  Pa, nous trouvons une perméabilité de  $0.01041665$  mm<sup>2</sup>.

De la même manière que pour l'écoulement de Poiseuille entre deux plaques infinies qui nous sert à valider les calculs 2D de perméabilité, nous pouvons calculer la perméabilité équivalente à un écoulement de Poiseuille dans un tube cylindrique pour valider les calculs 3D de perméabilité.

Pour le tube cylindrique, le débit s'exprime sous la forme suivante :

$$Q = \frac{\pi}{128\eta} \frac{\Delta p}{L} d^4 \quad (3.43)$$

où  $d$  est le diamètre du tube. Cela nous permet d'exprimer la perméabilité sous la forme suivante :

$$K = \frac{\pi d^4}{128S} \quad (3.44)$$

Pour la même raison que précédemment, la section  $S$  n'est pas la section circulaire traversée par le fluide mais bien la section totale du matériau poreux. Nous allons nous placer dans le cas d'un tube de longueur  $L = 1$  mm et de diamètre  $d = 0.5$  mm. Le matériau poreux est un cube de côté  $L$ . Cela nous donne une perméabilité analytique  $K_{analytique} = 0.001533981$  mm<sup>2</sup>.

### 3.3.1.2 Les calculs numériques de la perméabilité en 2D

Dans un premier temps, nous faisons un calcul éléments finis classique, c'est-à-dire que le maillage correspond à la zone fluide. Une condition de non glissement est appliquée aux frontières en  $y = \pm H$  en imposant une vitesse nulle. Les frontières en  $x = 0$  et  $x = 1$  sont imposées en pression. Nous prenons une taille de maille isotrope et homogène  $h = 0.01$  mm. La perméabilité obtenue est  $K = 0.0103733$  mm<sup>2</sup>, ce qui donne une erreur de 0.42% par rapport à l'analytique. La norme L2 de l'erreur sur la vitesse est de 0.02224 et la norme maximale est de 0.001186.

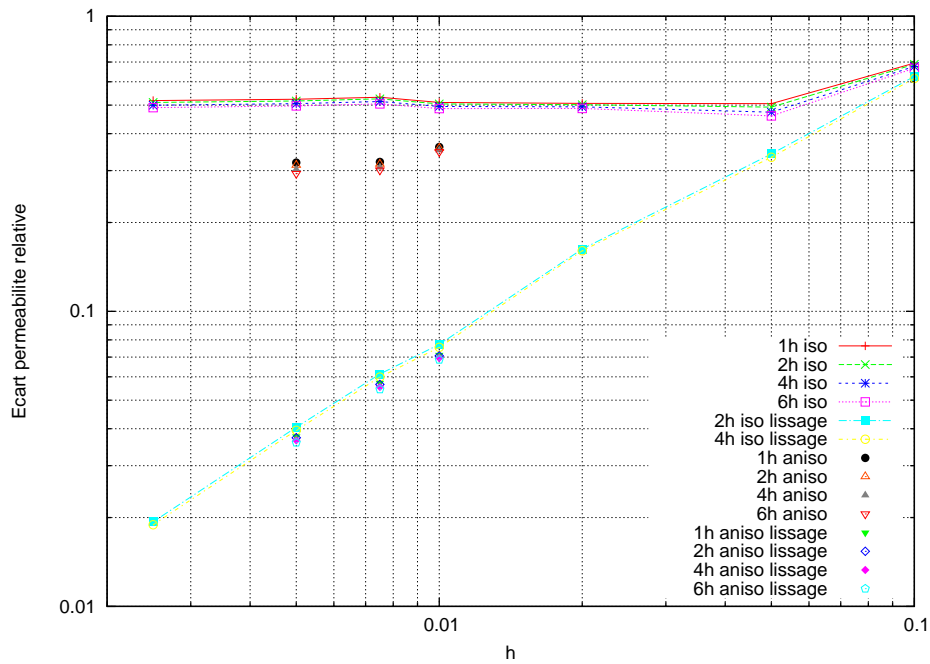
Nous allons maintenant résoudre le problème en utilisant l'approche d'immersion de domaines, décrite en 2.1.1 page 25. Le domaine de calcul est représenté schématiquement sur la figure 3.20. Les conditions aux limites sont les mêmes que pour le cas non immergé précédent. Cependant, la condition aux limites de vitesse nulle n'est pas appliquée au solide complet mais seulement aux frontières en  $y = \pm 2H$ . La viscosité du solide étant définie à  $\eta_s = 5000$ , la condition de vitesse nulle est ainsi propagée à l'ensemble de la zone solide.

Il semble correct de penser que le type de loi de mélange et l'épaisseur de celle-ci, directement dépendante de la taille de maille au voisinage de l'interface, sont d'une grande importance pour la précision des calculs. Une étude de sensibilité à ces paramètres est donnée dans la suite.

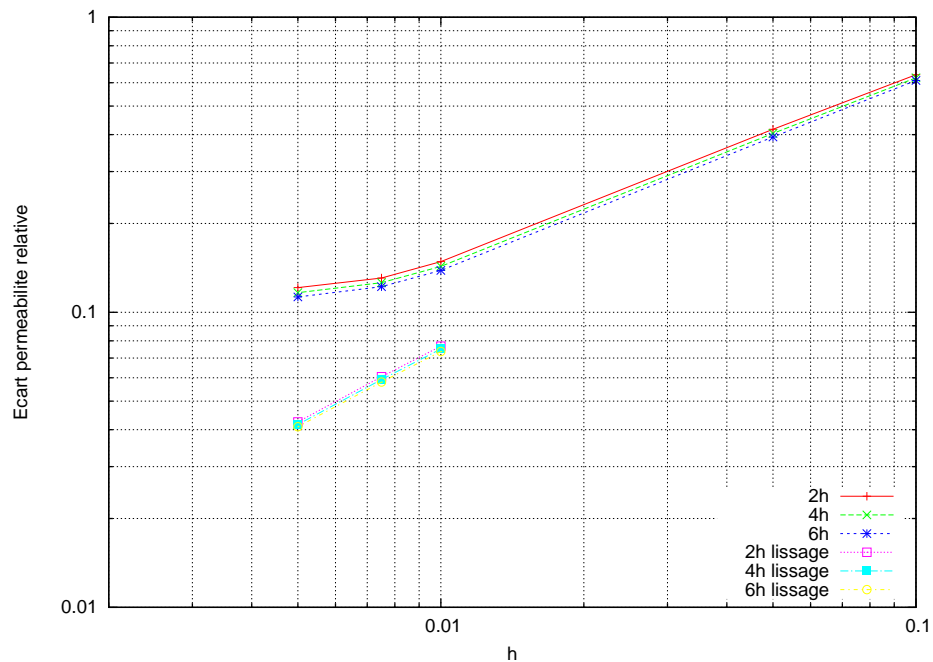
### 3.3.1.3 Étude de sensibilité aux paramètres numériques

Les résultats des calculs de perméabilité sont tracés figure 3.21 en fonction de la taille de maille près de l'interface et de l'épaisseur de mélange. Nous remarquons en premier lieu que l'utilisation du lissage de la pression donne de meilleurs résultats qu'avec une pression non-lissée puisqu'on s'approche de la valeur analytique de la perméabilité. De plus, le lissage diminue fortement la sensibilité à l'épaisseur du mélange de viscosité.

En ce qui concerne l'adaptation anisotrope du maillage, nous pouvons remarquer que les résultats sont beaucoup plus précis dans le cas anisotrope, lorsque la pression n'est pas lissée. Par contre, avec une pression lissée, les résultats obtenus avec adaptation du maillage anisotrope sont similaires au cas isotrope. L'avantage reste cependant le gain



**FIGURE 3.21** – Écart relatif entre la perméabilité calculée et analytique, pour un écoulement de Poiseuille plan en 2D, donné par la relation  $\frac{|K-\hat{K}|}{\hat{K}}$ . Les maillages sont isotropes (iso) ou adaptés anisotropiquement (aniso) autour de l'interface fluide-solide. Différentes épaisseurs de mélange pour la viscosité sont testées, avec  $e = 1h, 2h, 4h$  et  $6h$ . Nous remarquons tout de suite que les courbes avec lissage de la pression sont toutes très proches les unes des autres et avec un écart à la perméabilité analytique plus faible. Les courbes sans lissage sont regroupées dans la partie supérieure du graphique, avec une différence entre un maillage isotrope et un maillage anisotrope.



**FIGURE 3.22** – Calcul de perméabilité pour un écoulement de Poiseuille plan en 3D. Différentes épaisseurs de mélange pour la viscosité sont testées, avec  $e = 2h$ ,  $4h$  et  $6h$ . Certains résultats sont donnés avec un lissage de la pression

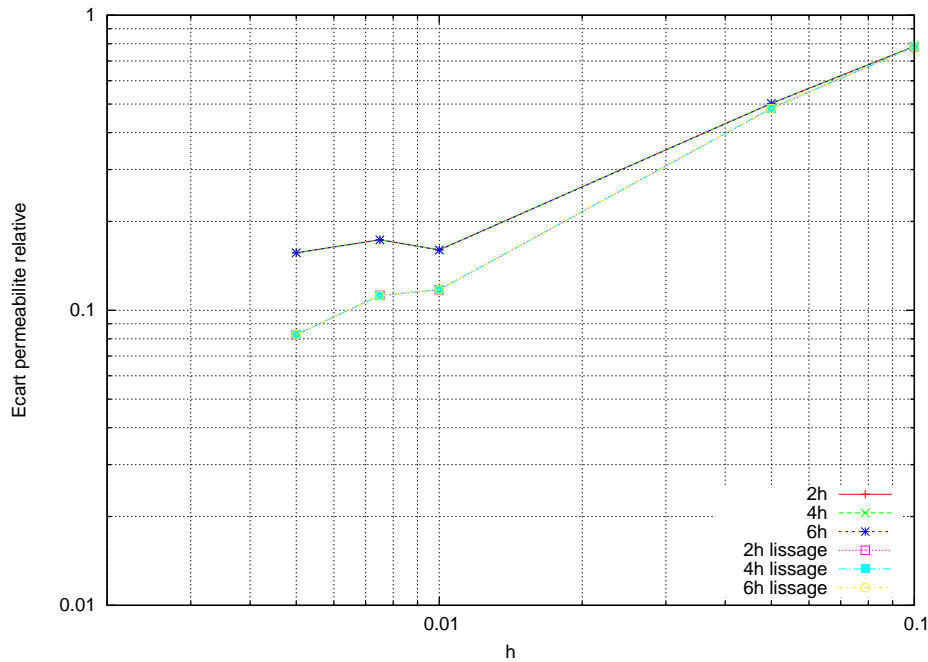
en coût de calcul puisque le nombre de nœuds est considérablement réduit dans le cas anisotrope.

#### 3.3.1.4 Les calculs numériques de perméabilité en 3D

Dans un premier temps, nous calculons la perméabilité d'un écoulement de Poiseuille plan, en 3D. Cela nous donne une comparaison directe entre les calculs 2D et 3D puisque la relation analytique donnant la perméabilité (3.41) est la même.

Les résultats sont donnés figure 3.22. Nous remarquons que l'erreur sur la perméabilité est beaucoup moins grande dans le cas 3D que dans le cas 2D puisque l'erreur passe de 50% en 2D à un peu plus de 10% en 3D. Nous pouvons remarquer également que l'utilisation du lissage de la pression donne des résultats très similaires (voire presque égaux) entre les cas 2D et 3D. Nous pouvons également observer que l'épaisseur de mélange de viscosité joue un rôle négligeable dans la précision du calcul. Cela peut être dû au fait que dans le cas d'un mélange arithmétique comme utilisé ici, la différence de viscosité devient très rapidement très grande et que, de ce fait, la zone fluide est sensiblement identique quelle que soit l'épaisseur du mélange de viscosité. Tester ces calculs en utilisant un mélange harmonique (qui favorise les faibles valeurs dans le mélange), pourrait apporter des informations complémentaires et conduire à des conclusions différentes sur l'effet de l'épaisseur de mélange sur la précision des résultats.

Nous allons maintenant calculer la perméabilité équivalente d'un écoulement de Poiseuille dans un tube tel que présenté section 2.3.1.5 (page 58). Cela nous permet de valider nos calculs de perméabilité en 3D car, de la même manière que pour l'écoulement de Poi-



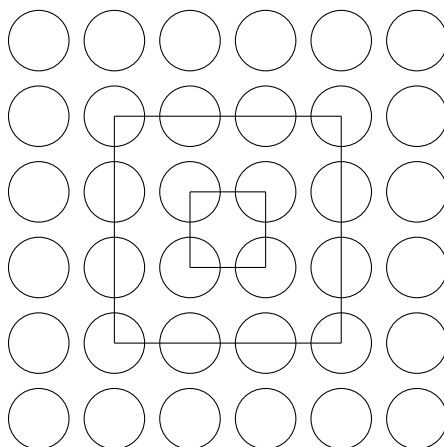
**FIGURE 3.23** – Calcul de perméabilité pour un écoulement de Poiseuille dans un tube (3D). Les maillages sont isotropes ou adaptés anisotropiquement autour de l’interface fluide-solide. Les courbes sans lissage sont confondues. Les courbes avec lissage également. Il y a assez peu de différence entre les deux groupes de courbes.

seuille plan, nous avons une relation analytique de la perméabilité donnée par l’équation (3.44). De plus, nous verrons l’effet de la géométrie des interfaces puisque nous sommes maintenant en présence de fortes courbures.

Les résultats de perméabilité sont donnés figure 3.23. Nous voyons tout de suite que l’effet du lissage est beaucoup plus faible que dans les cas précédents. L’utilisation de la pression classique donne une précision légèrement moins bonne que dans le cas 3D plan, les différences pouvant être uniquement dues à la prise en compte de la courbure qui est peut-être moins précise dans le cas de la méthode d’immersion de domaines.

### 3.4 Calcul de perméabilité pour un arrangement régulier de fibres

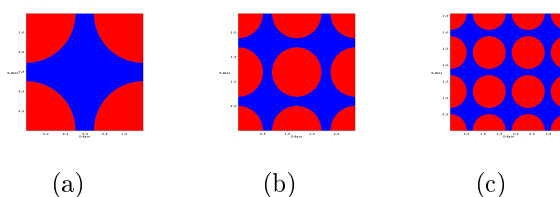
Nous nous plaçons ici dans le cas d’un arrangement régulier de fibres cylindriques unidirectionnelles. Cette géométrie simple nous permet de comparer nos calculs de perméabilité avec les relations analytiques de la littérature données dans la bibliographie en 3.1.1. Dans un premier temps, nous vérifions que notre méthode d’immersion de domaines pour le calcul de perméabilité donne des résultats cohérents avec les calculs classiques pour un milieu périodique. Il est admis que, pour les calculs éléments finis classiques (seule la zone fluide est maillée), le VER correspond au plus petit élément du motif périodique (figure 3.24). Nous vérifions aussi cela pour notre approche en immersion de domaines, en choisissant des volumes contenant des nombres de fibres différents afin de déterminer lequel est un VER.



**FIGURE 3.24** – Un arrangement régulier de fibres. Les deux cadres représentent deux candidats pour des VER possibles.

### 3.4.1 Choix du VER

Comme indiqué précédemment, nous allons vérifier que, dans le cas d'un arrangement périodique, le VER est le volume contenant le plus petit élément du motif. Pour cela, nous allons faire varier la taille du volume de calcul, comme indiqué figure 3.24, en gardant le taux de fibres constant. La figure 3.25 donne les différentes géométries. Nous choisissons un maillage anisotrope autour des interfaces, afin de diminuer la sensibilité à la discrétisation de ces dernières, comme on a pu le voir dans les tests de validation précédents (3.3.1.3). Les valeurs de la perméabilité adimensionnelle pour un taux de fibres  $V_f = 0.46$  sont données tableau 3.3. Les écarts sont respectivement de 0.77% et de 1.99% entre (a) et (b) et entre (a) et (c). On peut considérer que le motif de l'arrangement est bien un VER, dans le cas d'un arrangement régulier.



**FIGURE 3.25** – Étude de la sensibilité de la perméabilité à la taille du VER. Le rayon des fibres, en rouge, est constant. La taille du VER augmente et la taille de maille est la même pour les trois domaines.

**TABLE 3.3** – Calculs de perméabilité pour différentes tailles de VER, pour un taux de fibres  $V_f = 0.46$ .

(a) 4 fibres	$K_{adim} = 0,01719232$
(b) 9 fibres	$K_{adim} = 0,01732464$
(c) 16 fibres	$K_{adim} = 0,01753368$

### 3.4.2 Variation du taux de fibres

Dans cette partie, nous allons comparer nos résultats avec certaines lois analytiques tirées de la littérature [Geb92, BA93, Hap59, TB09]. Nous nous plaçons dans le cas d'un arrangement carré et dans le cas d'un arrangement triangulaire. Nous faisons varier le taux de fibres. Pour cela, nous choisissons de diminuer la taille du domaine de calcul, en gardant le rayon des fibres constant. Ainsi, pour conserver l'arrangement, l'écart entre les fibres doit varier. Cela nous a obligé à créer autant de maillages que ce que nous avons de points sur la courbe et à déplacer le centre des fibres d'autant de fois. Cependant, l'autre méthode, consistant à faire varier le rayon des fibres en conservant le domaine de calcul et à conserver la position des fibres, avait d'autres désavantages, notamment le fait de devoir faire varier beaucoup d'autres paramètres, comme la taille de maille locale près de l'interface, l'épaisseur sur laquelle on fait le raffinement, l'épaisseur sur laquelle on fait varier la viscosité.

Le paramètre que nous avons choisi de faire varier pour cette étude est le rapport entre la demi-distance inter-fibres  $\delta$  et le rayon des fibres  $a$  tels que représentés figure 3.2. Nous voyons sur les courbes de résultats (figures 3.26 et 3.27) que ce choix n'était pas forcément le plus judicieux car le taux de fibres ne dépend pas linéairement du rapport  $\frac{\delta}{a}$ . En effet, si on écrit le taux de fibres en fonction de ce rapport, on trouve pour un arrangement carré :

$$V_f = \frac{\pi}{4 \left(1 + \frac{\delta}{a}\right)^2} \quad (3.45)$$

Nous faisons varier le taux de fibres d'environ 0.2 jusqu'à environ le taux de fibres maximum, obtenu lorsque les fibres se touchent. Dans ce cas, le fluide ne passe plus (pour un écoulement transverse) et la perméabilité doit être nulle. Le taux de fibres maximum est de 78.54% pour l'arrangement carré et de 90.69% pour l'arrangement triangulaire. Encore une fois, étant donné que nous faisons varier le rapport  $\frac{\delta}{R}$ , nous avons conservé la même plage de valeurs pour les deux arrangements. Nous n'allons donc pas jusqu'au taux de fibres maximum pour l'arrangement triangulaire.

Les résultats des calculs 2D sont donnés figures 3.26 et 3.27. Nous remarquons immédiatement que nos résultats sont en bon accord avec la littérature. Dans les deux configurations, les résultats numériques sont proches du modèle hybride ou du modèle de lubrification utilisé pour le modèle hybride, pour les taux de fibres élevés. Lorsque le taux de fibres diminue, on s'écarte des modèles de lubrification. En revanche, contrairement à ce qu'on pourrait attendre, l'écart entre les résultats numériques et les modèles de lubrification est peu différent de l'écart entre les résultats numériques et les modèles de cellules. On s'attendrait pourtant à ce qu'on s'approche des modèles de cellules, les hypothèses utilisées pour les obtenir supposant que l'écart entre les fibres est important, ce qui n'est pas le cas pour les modèles de lubrification. On n'observe donc pas de tendance particulière en faveur d'un modèle plutôt qu'un autre.

Nous faisons ensuite les mêmes calculs en 3D, afin de montrer la validité de nos méthodes. Étant donné le coût de calcul supplémentaire, nous avons fait varier le taux de fibres de 0.4 à 0.754 seulement, pour l'arrangement carré. Nous avons choisi les mêmes paramètres de

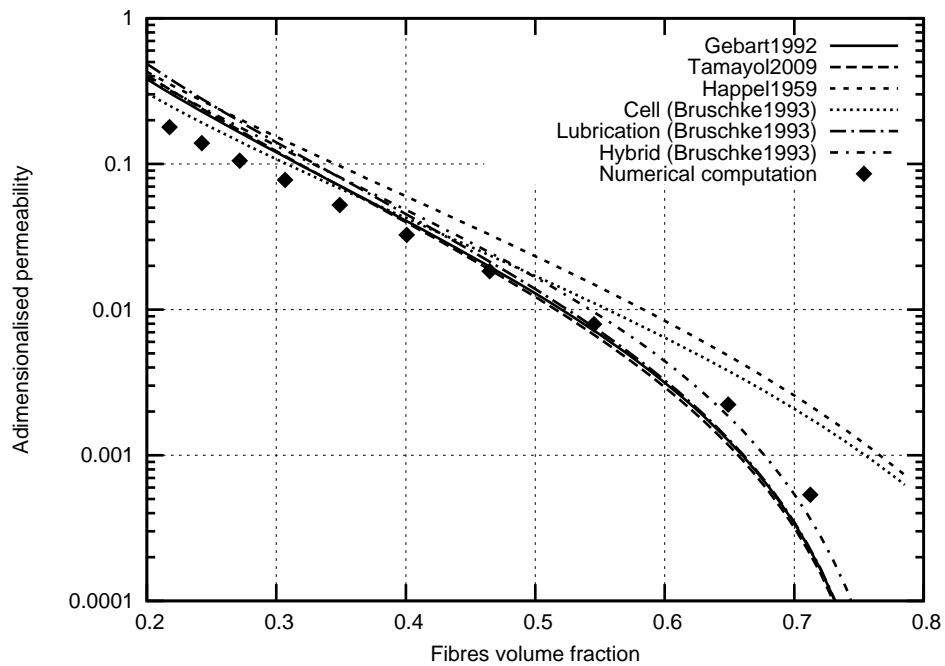


FIGURE 3.26 – Perméabilité transverse en fonction du taux de fibres pour un arrangement carré. Comparaison entre les résultats numériques et plusieurs lois analytiques.

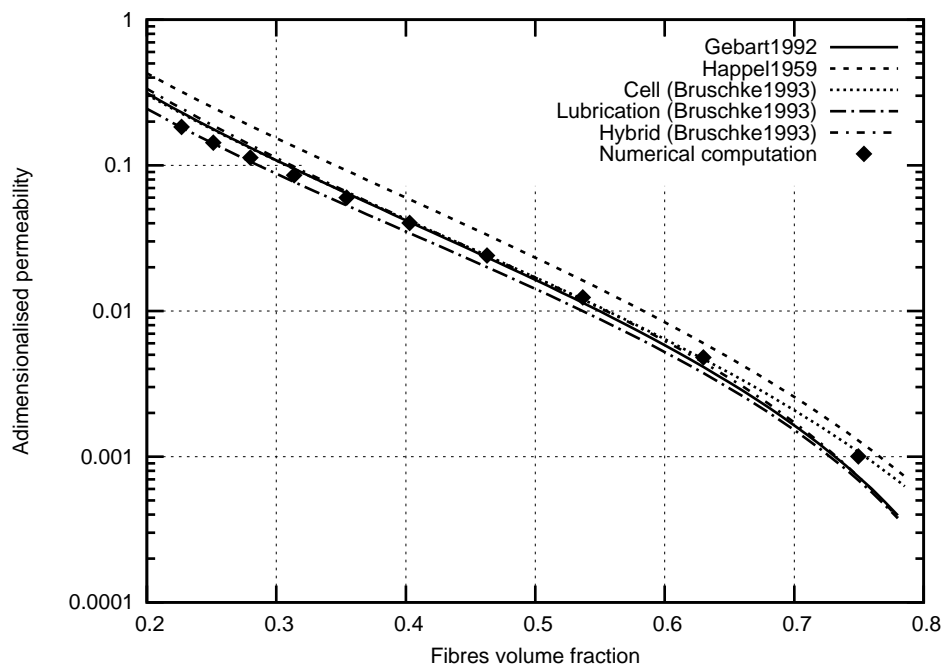
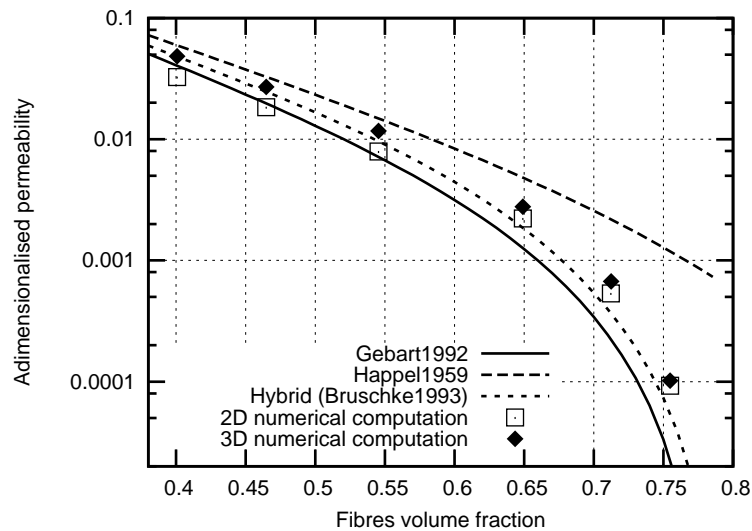


FIGURE 3.27 – Perméabilité transverse en fonction du taux de fibres pour un arrangement triangulaire. Comparaison entre les résultats numériques et plusieurs lois analytiques.

maillage que pour le cas 2D et le domaine est un cube dont les arêtes ont toutes la même dimension. Les résultats sont donnés figure 3.28. Nous remarquons immédiatement que les tendances données par les calculs 3D sont les mêmes que pour les calculs 2D. Les ordres de grandeurs sont conservés. Cependant, les différences vont de 10% pour le taux de fibres le plus élevé, jusqu'à presque 50% pour le taux de fibre le plus faible, entre les calculs 2D et les calculs 3D (en prenant les calculs 2D pour référence). Cela peut s'expliquer par le fait que la formulation 2D est moins précise que la formulation 3D. Ainsi, pour les faibles taux de fibres, la zone fluide est plus importante, ce qui augmente l'erreur globale par rapport aux forts taux de fibres où les zones solides sont plus importantes.

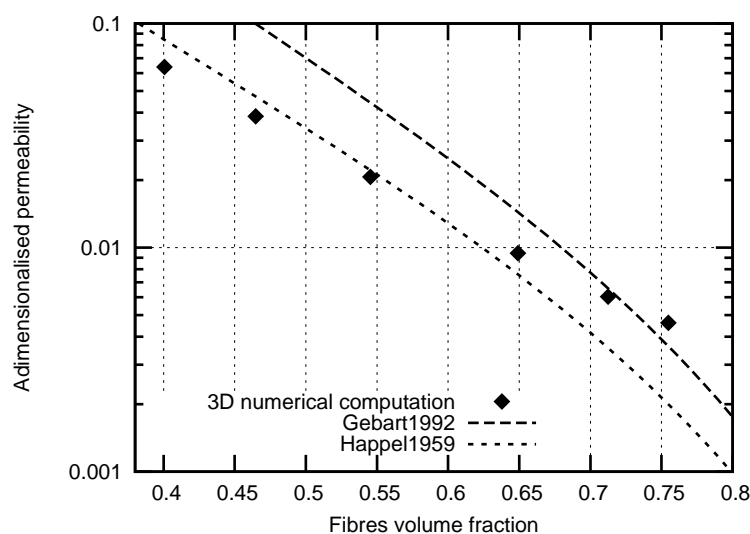


**FIGURE 3.28** – Perméabilité transverse en fonction du taux de fibres pour un arrangement carré en 3D. Comparaison entre les résultats numériques 2D et 3D et des lois analytiques.

Nous avons également calculé la perméabilité longitudinale pour les mêmes taux de fibres que le cas 3D transversal. Pour l'écoulement longitudinal, un différentiel de pression est imposé sur les faces perpendiculaires à l'axe des fibres. Le maillage est identique à celui utilisé pour l'écoulement transversal. Nous comparons ensuite les résultats numériques avec ceux obtenus en utilisant les lois de Gebart [Geb92] et Happel [Hap59] pour les écoulements parallèles à l'axe des fibres.

Les résultats sont donnés figure 3.29 et montrent une perméabilité du même ordre de grandeur que celle obtenue analytiquement. En revanche, l'évolution de la perméabilité numérique en fonction du taux de fibres est différente de celle observée pour la perméabilité analytique.

Cela peut s'expliquer par les hypothèses fortes qui sont prises pour les lois analytiques. En effet, dans le cas de Gebart, nous avons l'hypothèse de l'écoulement dans un tube. Pour Happel, nous avons l'hypothèse d'un écoulement cylindrique autour d'un cylindre solide. Dans les deux cas, le profil du champ de vitesse est bien différent du profil réel entre les fibres.

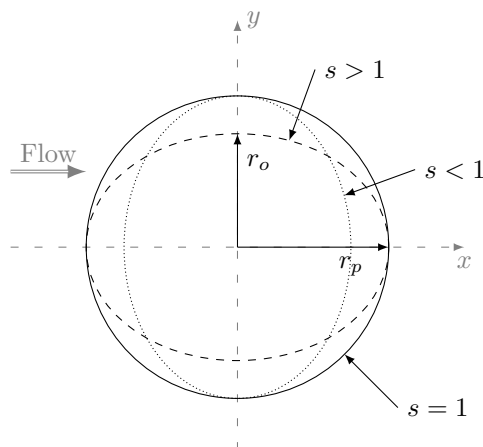


**FIGURE 3.29** – Perméabilité pour un écoulement parallèle à l’axe des fibres en fonction du taux de fibres pour un arrangement carré. Comparaison entre les résultats numériques et des lois analytiques.

### 3.4.2.1 Influence du facteur de forme

Dans les simulations numériques précédentes, la direction de l’écoulement est choisie parallèle ou perpendiculaire à l’axe des fibres. Lorsque ce n’est pas le cas, la section vue par l’écoulement n’est plus circulaire mais ellipsoïdale. Dans ce qui suit, nous étudions l’effet du facteur de forme sur la perméabilité transverse.

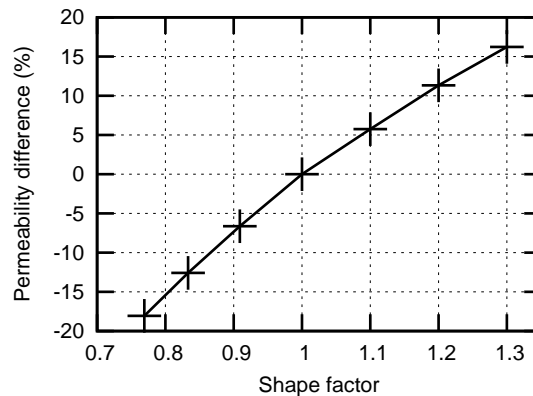
Le facteur de forme est défini par  $s = \frac{r_p}{r_o}$ , où  $r_p$  est le rayon de la fibre dans la direction de l’écoulement et  $r_o$  le rayon dans la direction orthogonale (fig. 3.30). Nous faisons varier le facteur de forme entre 0.77 et 1.3. La perméabilité est adimensionalisée en utilisant le facteur  $r_p r_o$  au lieu de  $a^2$ . Ce choix s’explique simplement par le fait que la perméabilité a la dimension d’une surface. Pour un cercle, la surface est proportionnelle à  $a^2$ . Pour une ellipse, la surface est proportionnelle au produit du petit diamètre et du grand diamètre. Il semble donc logique d’adimensionaliser par cette grandeur. Les résultats sont donnés



**FIGURE 3.30** – Différentes sections de fibres illustrant la variation du facteur de forme associé.

figure 3.31. Nous gardons le taux de fibres constant. Tous les résultats sont normalisés avec la perméabilité calculée pour un cercle, c'est-à-dire pour  $s = 1$ .

La différence tracée figure 3.31 est définie par  $(K(s = 1) - K(s)) / K(s = 1)$ . Nous pouvons observer que la perméabilité augmente avec le facteur de forme. C'est un résultat auquel nous pouvons nous attendre, étant donné que lorsque  $s$  augmente, l'aire de la face d'entrée du fluide augmente. Ainsi, la résistance à l'écoulement est moins grande, ce qui augmente la perméabilité. Ces résultats montrent qu'une légère modification de la forme des fibres a une influence très grande sur la perméabilité.



**FIGURE 3.31** – Écart, en pourcentage, entre la perméabilité pour une section circulaire et pour des sections elliptiques de fibres.

Cette dernière étude est une étude préliminaire sur l'effet de la forme des fibres. Il est utile, dans le cas mésoscopique, si l'on fait l'hypothèse que l'écoulement à l'intérieur des mèches est négligeable, bien qu'il soit fort probable que sans négliger les écoulements intra-mèches, la forme de la mèche ait un effet que nous devons prendre en compte. Cela nous montre que l'évolution de la forme de la section des mèches, modifiée selon que les mèches voisines se touchent, selon la compaction etc., doit être pris en compte pour une évaluation précise de la perméabilité. Bien évidemment, cette étude mérite d'être poursuivie, par exemple en se plaçant à l'échelle mésoscopique avec un couplage Stokes-Brinkman, en modifiant la structure du milieu poreux (arrangement triangulaire, ou aléatoire) ou encore en utilisant une distribution de facteur de forme dans le domaine, par exemple.

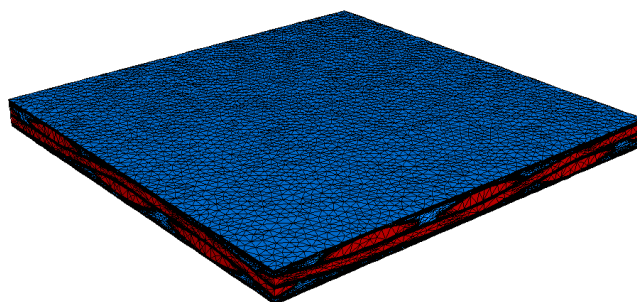
### 3.4.3 Perméabilité multi-échelles d'un renfort

Dans cette partie, nous présentons des calculs de perméabilité pour le VER d'un renfort de type G986, non déformé. Le maillage des mèches est immergé dans un domaine global correspondant à l'entrefer du moule qui le contient. C'est un cas simple qui nous permet de montrer la faisabilité des calculs de perméabilité multi-échelles en utilisant à la fois la méthode de calcul de perméabilité en immersion de domaines et le couplage fluide-poreux.

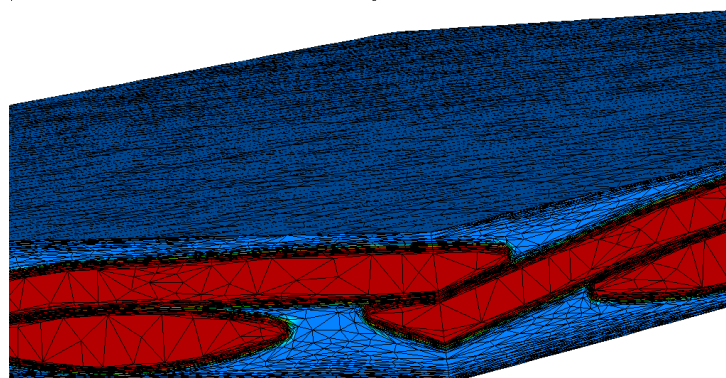
Nous choisissons de prendre les dimensions en mm. Ainsi, pour conserver un système d'unité cohérent, nous prendrons une pression en MPa. Nous allons nous approcher des

conditions du procédé RTM. Les dimensions du VER sont de 5 mm pour la largeur et la longueur et de 0.33 mm pour la hauteur. Nous injectons avec 1 bar de pression, soit 0.1 MPa. La viscosité du fluide est de 1 Pa·s. Nous faisons varier la perméabilité des mèches, qui prend les valeurs  $K = 10^{-12} \text{ m}^2$ ,  $K = 10^{-14} \text{ m}^2$  et  $K = 10^{-16} \text{ m}^2$ . Nous comparons ces résultats avec le calcul de perméabilité pour des mèches imperméables.

Un maillage anisotrope est utilisé pour bien capturer l'interface. De plus, étant donné que la surface des mèches peut être très proche de la frontière du maillage, il est nécessaire d'avoir un maillage très fin pour bien capturer la zone fluide et ne pas provoquer d'écoulement bouchon, ce que l'on voit si on ne trouve qu'un seul élément entre l'interface solide et la frontière. Cependant, pour éviter d'avoir un maillage beaucoup trop lourd pour ce calcul, un maillage anisotrope a également été utilisé sur les deux frontières correspondantes aux parois avec le moule. La taille de maille locale dans les zones anisotropes est de  $h = 0.005 \text{ mm}$ . La figure 3.32 montre le maillage et l'isovaleur zéro de la fonction distance utilisés pour cette étude. La figure 3.33 montre un détail du maillage. Les zones de contact sont bien représentées grâce à l'utilisation de la méthode de maillage anisotrope présentée en 2.1.3 (page 31) utilisant une fonction distance à chaque mèche immergée.



**FIGURE 3.32** – Maillage utilisé pour le domaine de calcul. En rouge, nous avons représenté les mèches. En bleu, nous sommes dans la zone fluide.



**FIGURE 3.33** – Zoom sur le maillage utilisé pour le domaine de calcul. Nous remarquons l'adaptation anisotrope du maillage autour des interfaces.

La figure 3.34 montre le champ de vitesse pour le cas de Stokes pur, c'est-à-dire pour des mèches totalement imperméables. La porosité obtenue dans ce cas est de  $\Phi = 0.47$  et la perméabilité est de  $K = 3.22 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2$ . La figure 3.35 montre le champ de vitesse dans le cas perméable, avec une perméabilité  $K = 10^{-12} \text{ m}^2$ . La figure 3.36 montre le champ de vitesse uniquement dans les mèches. La vitesse est affichée en mm/s. Nous voyons que le champ de vitesse a une amplitude plus importante dans le cas perméable. De plus, nous remarquons également que le champ de vitesse dans les mèches est le plus important au niveau des interfaces mèches-fluide. Cela est simplement dû à l'utilisation d'une zone de mélange trop épaisse et à un maillage trop grossier pour s'approcher de la couche limite

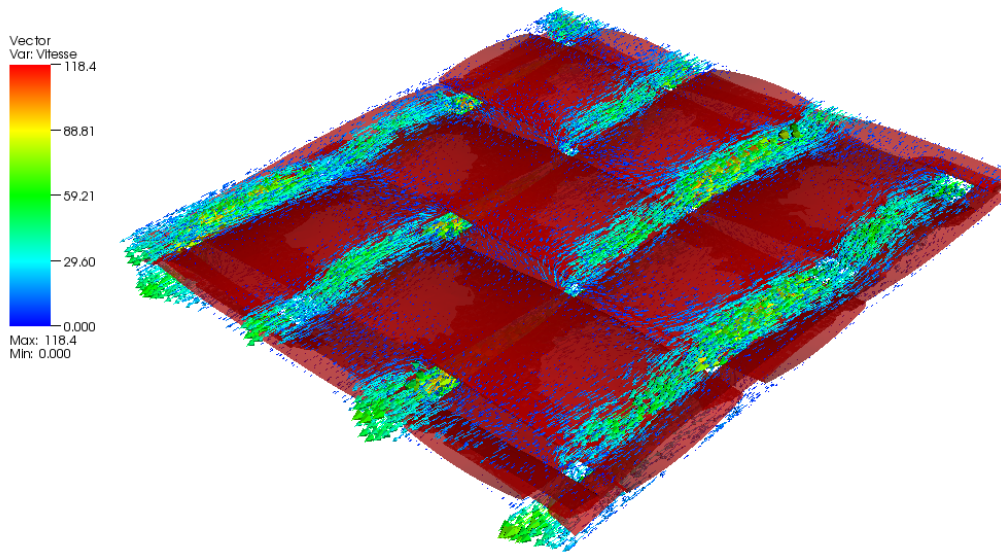


FIGURE 3.34 – Champ de vitesse pour des mèches imperméables.

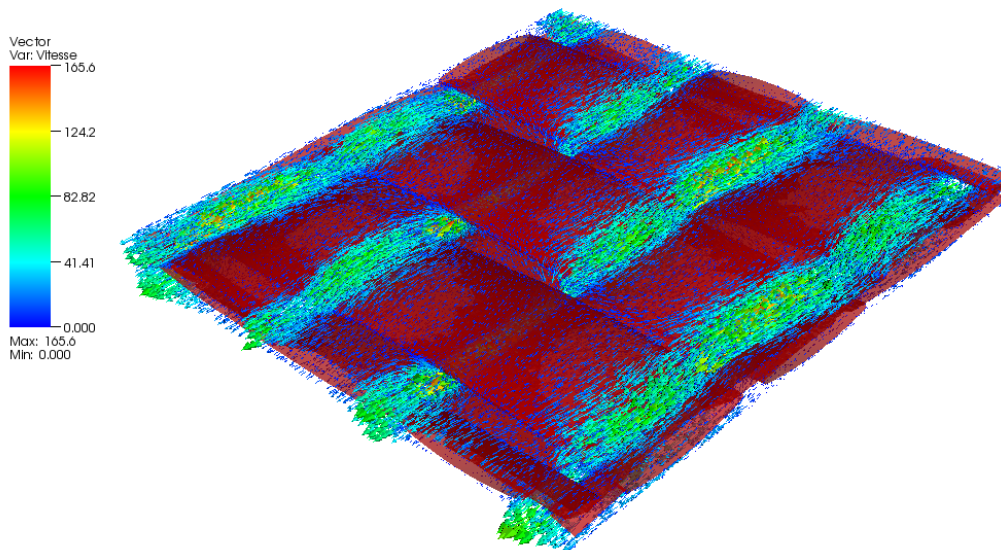


FIGURE 3.35 – Champ de vitesse pour des mèches perméables avec  $K = 10^{-12} \text{ m}^2$ .

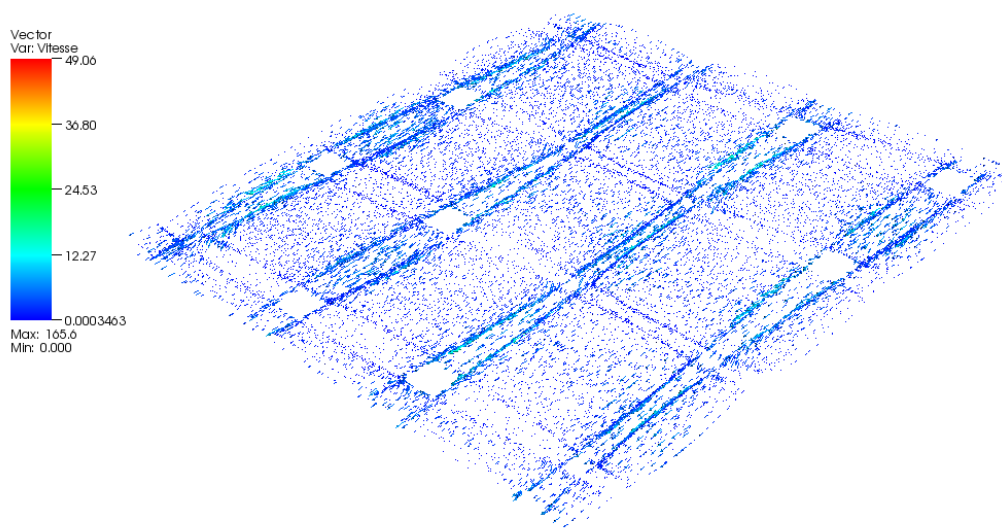


FIGURE 3.36 – *Champ de vitesse dans les mèches pour  $K = 10^{-12} \text{ m}^2$ .*

de Brinkman. Utiliser un maillage plus fin pourrait modifier les résultats. Cependant, le but de cette étude est de montrer la faisabilité de la méthode pour les écoulements à l'échelle mésoscopique.

La figure 3.37 montre l'évolution de la perméabilité longitudinale mésoscopique en fonction de la perméabilité des mèches. Nous pouvons voir une évolution notable de la perméabilité lorsque la perméabilité des mèches change. Nous remarquons que la perméabilité est vraiment plus grande que la perméabilité de mèches imperméables, ce qui semble en désaccord avec certains auteurs qui montrent que la perméabilité mésoscopique est indépendante de la perméabilité des mèches lorsque celle-ci est très faible. Cependant, nous revenons sur la discrétisation de la couche limite au niveau de la transition Stokes-Brinkman, que nous n'avons peut-être pas prise assez fine. Nous montrons grâce à cet exemple, la faisabilité de la méthode.

## 3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons commencé par présenter différentes lois analytiques, issues de la littérature, pour le calcul de la perméabilité des renforts tissés, à l'échelle microscopique et à l'échelle mésoscopique. Nous avons ensuite présenté des études sur le calcul numérique de la perméabilité, cette fois aussi à différentes échelles. Ces lois sont basées sur différentes hypothèses et différentes méthodes, ce qui leur donne des domaines de validités différents qui sont cependant souvent difficiles à déterminer. Cela montre une certaine complexité puisque la perméabilité est une grandeur moyenne qui doit contenir toute la complexité géométrique du matériau solide qui compose le milieu poreux. En effet, la perméabilité est dépendante à la fois de la porosité mais aussi de l'architecture du solide. Dans le cas des renforts tissés, cela se traduit par la prise en compte de la forme

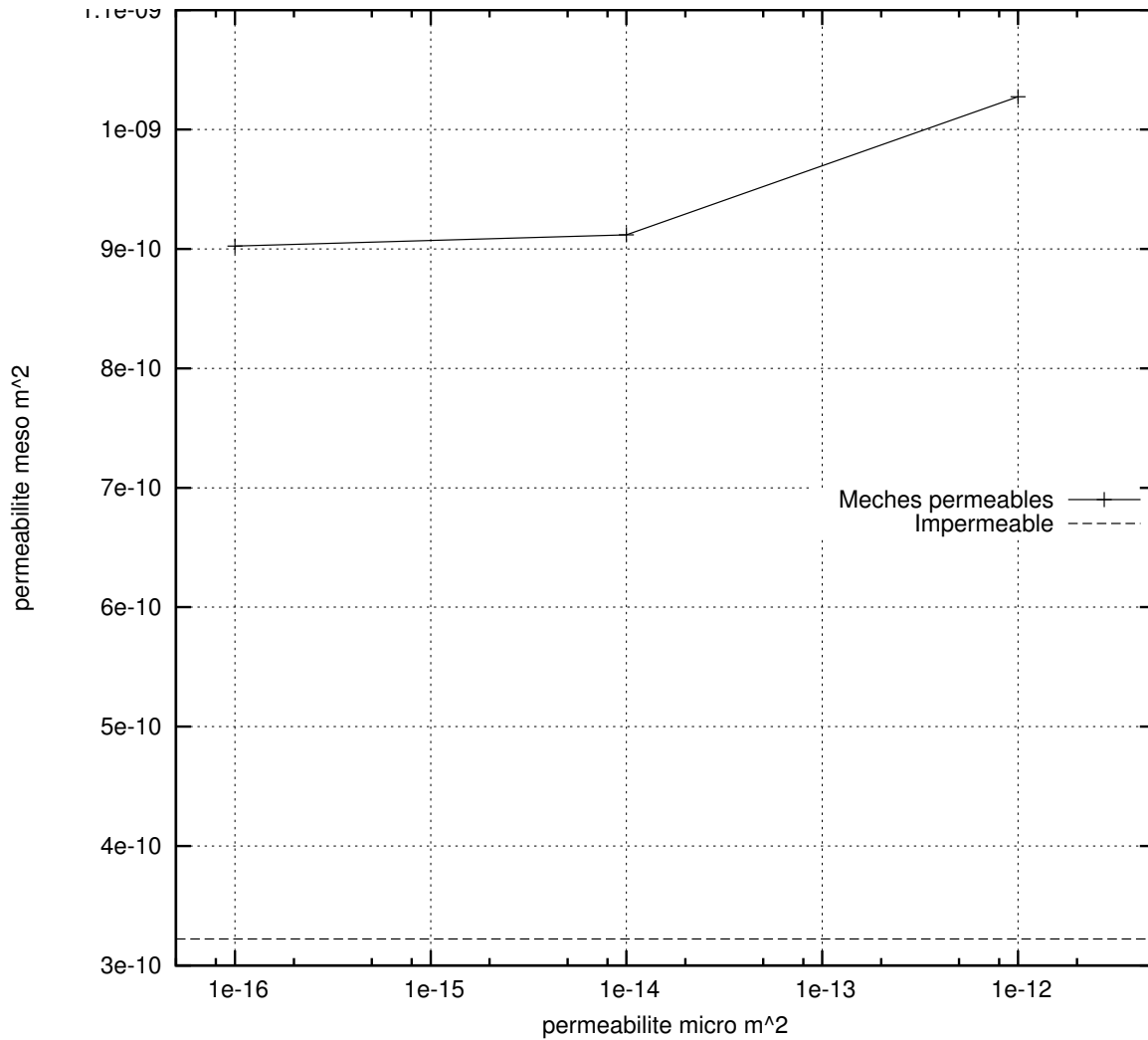


FIGURE 3.37 – Évolution de la perméabilité mésoscopique en fonction de la perméabilité des mèches.

géométrique des fibres ou des mèches, de leur arrangement les uns par rapport aux autres et de leur orientation par rapport à l'écoulement.

Nous avons présenté, dans un second temps, la méthode numérique mise en place pour le calcul de la perméabilité, basée sur une méthode de prise de moyenne.

Nous avons ensuite validé les calculs de perméabilité sur des géométries et des écoulements simples, pour lesquels il existe une expression analytique de la perméabilité. Nous avons montré la faible sensibilité à l'épaisseur de la zone de mélange de la viscosité lorsque ce mélange se fait dans la zone solide uniquement. De plus, nous avons montré une meilleure précision lors de l'utilisation d'un lissage de la pression, ce qui montre l'intérêt de travailler sur une méthode de stabilisation efficace.

Nous avons également montré que l'utilisation d'un maillage anisotrope augmentait légèrement la précision du calcul, pour un domaine en deux dimensions (en 3D, le coût de calcul étant bien plus important, nous avons utilisé systématiquement un maillage anisotrope pour adapter le maillage près de l'interface). Nous avons également observé

que les résultats étaient plus précis en 3D qu'en 2D.

Nous avons ensuite comparé nos calculs numériques de perméabilité avec des lois de la littérature, pour des calculs 2D et 3D et pour des écoulements transverses et longitudinaux par rapport à l'axe des fibres. Nous avons trouvé une bonne concordance entre les résultats numériques et les résultats analytiques pour les écoulements transverses. Pour les écoulements longitudinaux, l'ordre de grandeur des résultats est respecté mais l'évolution de la perméabilité en fonction du taux de fibres est un peu différent.

Nous avons montré l'importance de la géométrie dans la valeur de la perméabilité, en étudiant sa variation en fonction du facteur de forme de fibres initialement cylindriques.

Enfin, à l'échelle mésoscopique, nous avons comparé la perméabilité de mèches imperméables à des mèches de perméabilité différentes et avons montré l'importance de prendre en compte la perméabilité des mèches pour une étude mésoscopique des écoulements.



# Chapitre 4

## Les phénomènes de capillarité

Lors de l'imprégnation d'un tissu par la matrice polymère, les phénomènes capillaires peuvent avoir une importance capitale sur la santé matière et les propriétés du matériau composite final. En effet, c'est dans la zone de saturation partielle que se produit l'apparition des porosités. L'écoulement de la matrice peut être dû aux forces visqueuses lorsque le débit d'injection est suffisamment important. Dans ce cas, le polymère s'écoule principalement entre les mèches. On trouve alors majoritairement des micro-vides entre les fibres qui composent les mèches. En revanche, lorsque le débit d'injection est plus faible, les effets capillaires prennent le dessus et favorisent l'écoulement à l'intérieur des mèches, entre les fibres. Ainsi, les porosités apparaissent plutôt entre les mèches.

Le but du travail présenté dans ce chapitre est de mettre en place les méthodes numériques utiles dans la prise en compte des phénomènes capillaires intervenant dans les écoulements à petite échelle. Ce chapitre est donc découpé de la manière suivante. Dans un premier temps, nous présentons différentes méthodes numériques de la littérature pour la modélisation des interfaces. Nous présentons également la physique intervenant dans les phénomènes capillaires et deux méthodes numériques pour modéliser la tension de surface, que nous avons ensuite implémentées. Dans un second temps, nous validons notre utilisation du solveur de Stokes pour les écoulements bi-fluides. Enfin, nous validons les méthodes numériques utilisées pour la prise en compte des phénomènes capillaires.

### 4.1 Modélisation numérique de l'interface

#### 4.1.1 Introduction sur les méthodes multiphasiques numériques

La modélisation numérique d'écoulements multiphasiques est courante à l'heure actuelle, tant les applications dans lesquelles de tels écoulements ont lieu sont nombreuses. Cela peut être le cas pour les phénomènes géophysiques comme les vagues, pour la microfluidique, l'injection de pièces plastiques, le remplissage de moule en fonderie, etc.

De nombreuses méthodes numériques ont été mises en place pour modéliser de tels écoulements. Comme c'est le cas pour une particule fluide, une interface peut être suivie de manière lagrangienne ou eulérienne. Nous aurons donc des méthodes basées sur une représentation lagrangienne des interfaces par un maillage, ou des particules. Nous pouvons aussi utiliser des méthodes dites eulériennes. Cette fois, le repère du maillage est fixe

et l'interface va traverser les éléments. Il est nécessaire dans ce cas de pouvoir représenter cette interface autrement que par un maillage. Nous nous attarderons dans la suite à ces méthodes puisque la méthode Level Set utilisée dans ce travail est une méthode eulérienne. Nous allons ainsi détailler les différentes approches en fonction de la manière d'obtenir l'interface entre les différentes phases. Enfin, la troisième classe de méthodes contient les méthodes dites lagrangiennes-eulériennes. Il faut cependant remarquer que le classement de ces méthodes peut différer selon les auteurs. Par exemple, certaines méthodes basées sur les techniques de suivi d'interfaces utilisant des particules seront classées comme des méthodes lagrangiennes pour certains auteurs car les particules sont suivies de manière lagrangienne ou classées comme des méthodes eulériennes par d'autres car les écoulements sont calculés dans un cadre eulérien et l'interface traverse effectivement les éléments du maillage de fond. De bonnes revues sur ces différentes méthodes ont été faites par Smolianski [Smo01] et Maitre [Mai06]. Hyman [Hym84] expose différentes méthodes de suivi et de capture d'interface.

##### 4.1.1.1 Les méthodes lagrangiennes et lagrangiennes-eulériennes

Les méthodes lagrangiennes paraissent, au premier abord, les plus naturelles et les plus simples pour traiter les problèmes de surface libre. Cette dernière correspond à la frontière du maillage. Il est facile d'imposer des conditions aux limites à l'interface (contrainte nulle, tension de surface, etc.).

Il y a cependant plusieurs inconvénients majeurs dans ces méthodes. Tout d'abord, le maillage suit le champ de vitesse. Ainsi, les nœuds sont déplacés et peuvent introduire de grandes distorsions des éléments. C'est la raison pour laquelle les méthodes lagrangiennes ne sont pas utilisées pour simuler les écoulements en mécanique des fluides. De plus, la gestion des ruptures ou des connexions est très complexe. Par exemple, lors du détachement d'une goutte pendante, nous aurions deux maillages non connectés à partir d'un seul maillage. Cela montre le genre de difficultés que nous aurons à résoudre.

Le premier inconvénient exposé ici, à savoir la distorsion des éléments lors d'un calcul fluide en lagrangien, peut être résolu en utilisant une méthode ALE (Arbitrary Lagrangian Eulerian). Les méthodes ALE sont intermédiaires entre les méthodes lagrangiennes et les méthodes eulériennes puisque les nœuds se déplacent mais que leur vitesse n'est pas forcément la vitesse de la matière. Le principe est souvent de donner aux nœuds de la surface libre la vitesse du fluide, ce qui permet de bien capturer les modifications de forme de celle-ci. Les frontières ne correspondant pas à des surfaces libres ne sont pas déplacées et les nœuds internes du maillage ont une vitesse arbitraire, calculée de façon à ne pas introduire de distorsions des éléments.

##### 4.1.1.2 Les méthodes eulériennes

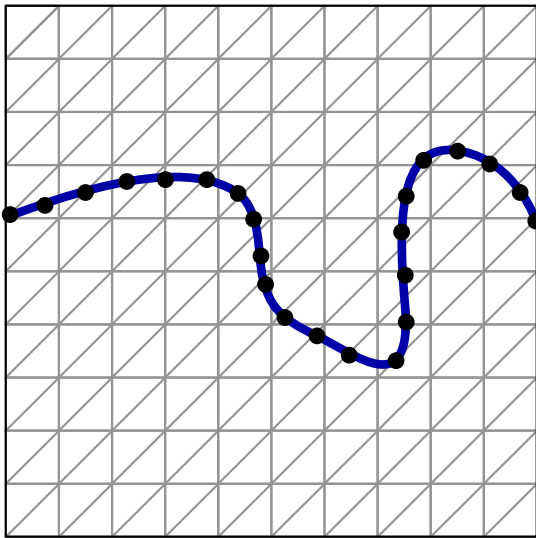
Comme indiqué dans l'introduction de ce chapitre, de nombreuses méthodes eulériennes sont disponibles, chacune différant des autres par la manière d'obtenir l'interface. Nous allons donner ici les différentes méthodes eulériennes qui sont les méthodes avec suivi d'interface (interface-tracking) et les méthodes avec capture d'interface (interface capturing).

## Les méthodes avec suivi d'interface

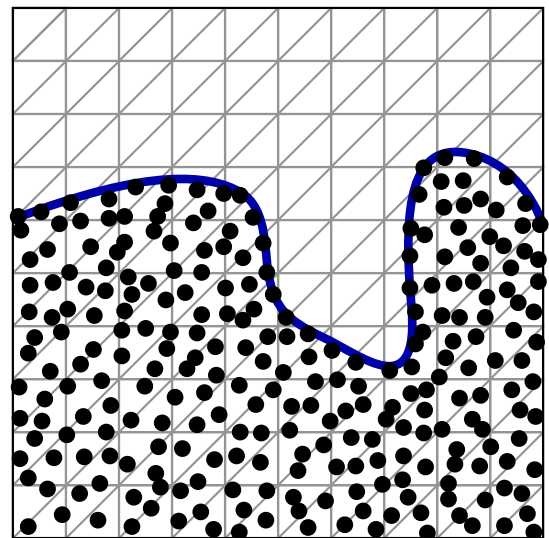
Ces méthodes consistent à suivre le déplacement lagrangien de l'interface, que ce soit par l'intermédiaire de particules, ou par l'intermédiaire d'un second maillage de l'interface elle-même. Parmi elles, nous trouvons les méthodes de suivi de front, de volume tracking et de frontières immergées.

Les méthodes de suivi de front sont un suivi lagrangien de particules sur ou autour de l'interface (figure 4.1). Ces méthodes rendent le suivi d'interface facile puisque le transport des particules est assez simple. Cependant, ces méthodes sont difficilement applicables dans le cas d'interfaces très complexes, avec de grands changements de topologie, comme des reconnections ou des ruptures d'interfaces. Cette approche a été introduite par Unverdi et Tryggvason [UT92].

Les méthodes de type "volume tracking" consistent en l'utilisation de marqueurs pour déterminer quel fluide est contenu dans chaque élément (figure 4.2). Les marqueurs sont transportés de manière lagrangienne. La plus célèbre de ces méthodes est la méthode marker-and-cell (MAC) [HW65].



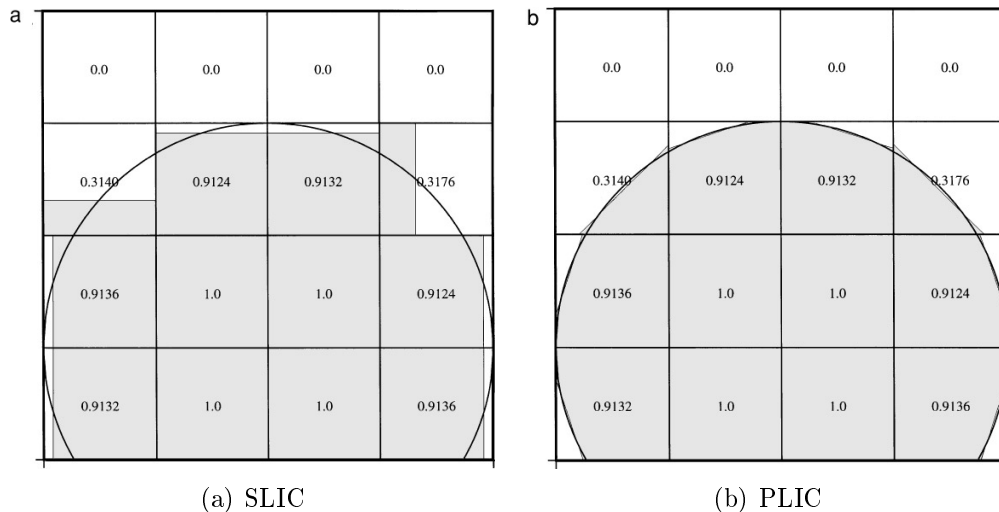
**FIGURE 4.1** – *La méthode de suivi de front. La ligne bleue représente l'interface et les points sont les particules qui permettent de la suivre numériquement.*



**FIGURE 4.2** – *La méthode de type Marker-and-cell. La ligne bleue représente l'interface et les points sont les particules qui permettent de marquer l'une des deux phases.*

Les avantages de ces méthodes sont de pouvoir prendre en compte, sans aucune difficulté, plus de deux phases. Les problèmes sont qu'il est difficile d'imposer des conditions aux limites à l'interface, que le coût de calcul est relativement important étant donné la présence de particules lagrangiennes dans tout le volume et qu'il n'est pas possible d'obtenir une représentation précise de l'interface et donc d'accéder à sa normale ou à sa courbure. De plus, il est souvent nécessaire de redistribuer les particules afin d'éviter les accumulations et les disparitions de ces dernières à cause du champ de vitesse.

Il faut noter que cette méthode et la méthode Volume Of Fluid, présentée plus loin, sont très semblables et que cette dernière est souvent classée dans les méthodes de type volume tracking.



**FIGURE 4.3** – Deux méthodes de reconstruction de l'interface utilisées dans la méthode VOF [RK98].

Les méthodes de frontières immergées [Pes77, Pes02, PP93] consistent en l'utilisation d'un maillage eulérien dans lequel un maillage lagrangien se déplace librement. L'interaction entre les deux maillages est possible par l'application d'une fonction Dirac lissée centrée sur le maillage lagrangien. Les effets de l'interface sur l'écoulement sont pris en compte par un terme source dans les équations de l'écoulement.

### Les méthodes avec capture d'interface

Dans ces méthodes, l'interface est reconstruite à partir d'une grandeur transportée par l'écoulement. Ces grandeurs peuvent être discontinues, c'est-à-dire définies aux éléments, ou continues, c'est à dire définies aux nœuds. Parmi ces méthodes, nous trouvons la Level Set, le Volume-Of-Fluid et le Champ de Phase.

La méthode Level Set est basée sur l'utilisation d'une fonction distance signée à l'interface, c'est-à-dire qu'en chaque nœud est donnée la distance à l'interface. Le signe de cette distance nous permet de nous placer dans une phase ou une autre. L'interface est donc définie par l'iso-valeur zéro de cette fonction distance. L'intérêt de cette méthode est de nous donner une reconstruction précise de l'interface. Son inconvénient est que la propriété d'être une distance n'est pas conservée lors de son transport et qu'il est nécessaire de corriger cette fonction à intervalle régulier. Cela rend la méthode non conservative. Nous détaillons cette méthode plus loin, en 4.1.2.

La méthode Volume-of-Fluid (VOF) [HN81] consiste à transporter un champ de pseudo-concentration ou champ de *couleur*. Ce champ donne la fraction de phase dans chaque élément. Cette méthode souffre principalement d'une diffusion importante mais elle est conservative. De plus, contrairement à la méthode Level Set qui nous donne précisément la forme de l'interface, sa reconstruction dans la méthode VOF est plus complexe. En effet, le champ utilisé pour la reconstruire est la fraction de phase. Elle ne nous donne pas directement l'orientation de l'interface. Des méthodes ont été développées pour la reconstruction de cette interface (la figure 4.3 en donne deux exemples). Une bonne revue des méthodes de type VOF est présentée par Rudman [Rud97] et par Scardovelli et Zaleski

[SZ99].

La méthode de Champ de Phase, comme la méthode Level Set, consiste à transporter une fonction continue. La différence est que cette fonction varie continûment à travers l'interface et que sa forme et son épaisseur, autour de l'interface, sont obtenus par des considérations thermodynamiques du problème à modéliser. Ainsi, la fonction Champ de Phase correspond à une grandeur physique et son équation d'évolution n'est pas une simple équation de transport mais une équation énergétique basée sur les lois de la thermodynamique statistique [Jac99, Mai06].

### 4.1.2 Transport de la Level Set

Comme expliqué précédemment, la méthode Level Set est beaucoup utilisée aujourd'hui. Elle ne permet pas seulement de représenter des interfaces entre plusieurs phases pour la simulation d'écoulements multiphasiques. En effet, elle est aussi utilisée en imagerie médicale, par exemple, pour détecter des contours de topologie complexe en 2D et en 3D, en optimisation de forme pour la mécanique des structures, en géophysique pour l'estimation des vitesses des ondes sismiques, etc. Beaucoup d'applications peuvent être trouvées sur le site internet de Sethian : <http://math.berkeley.edu/~sethian/> et dans [Set99].

La méthode Level Set a été développée par Osher et Sethian [OS88] sous le nom de méthode PSC pour *Propagation of Surfaces under Curvature*. Elle a ensuite été améliorée par d'autres auteurs. La méthode est basée sur le transport d'une fonction distance signée à l'interface. Cela signifie que la valeur de cette fonction nous donne la distance à laquelle nous nous trouvons de l'interface entre les phases et le signe de cette valeur nous renseigne sur la phase dans laquelle nous nous trouvons. Cette fonction distance  $\alpha$  est convectée par une simple équation de transport :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \vec{v} \nabla \alpha = 0 \quad (4.1)$$

où  $\vec{v}$  est la vitesse du fluide. Nous écrivons la forme faible de cette équation sous la forme suivante :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \alpha}{\partial t} \alpha^* \, d\Omega + \int_{\Omega} \vec{v} \nabla \alpha \alpha^* \, d\Omega = 0 \quad (4.2)$$

avec  $\alpha$  et  $\alpha^*$  pris dans  $\mathcal{H}^1(\Omega)$ . Le terme temporel peut s'écrire :

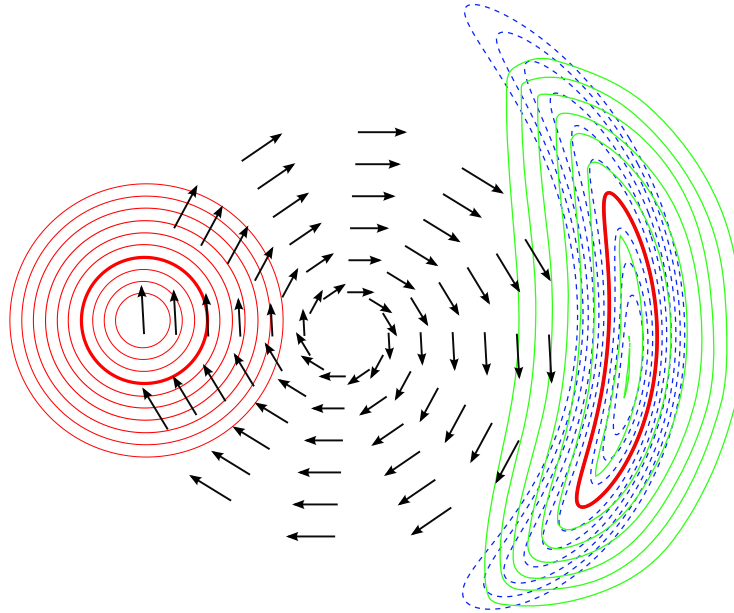
$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{\alpha(t_n) - \alpha(t_{n-1})}{\Delta t} \quad (4.3)$$

Plus de détails sur les méthodes de résolution et de stabilisation de la méthode Level Set peuvent être trouvés dans la thèse de Basset [Bas06].

Le problème principal du transport de  $\alpha$  est que la propriété de distance n'est pas conservée au cours du temps. En effet, une fonction distance a la propriété suivante :

$$\|\nabla \alpha\| = 1 \quad (4.4)$$

Après un certain nombre d'itérations de transport, étant donné que le champ de vitesse n'est pas forcément constant dans le domaine de calcul, cette propriété de gradient unitaire n'est pas conservée, c'est-à-dire que les lignes de niveau vont se resserrer. Il est donc nécessaire de corriger cette fonction pour lui donner de nouveau cette propriété sur le gradient (figure 4.4).



**FIGURE 4.4** – *Modification de la propriété de distance de la fonction Level Set lors de son transport. Le champ de vitesse indiqué par les vecteurs transporte la Level Set initiale à  $t_0$  en rouge gras. Les lignes rouges sont des iso-valeurs de la fonction distance. Au temps  $t_n$ , les iso-valeurs de la distance sont indiquées par les pointillés bleus. La propriété de distance est perdue. Une étape de ré-initialisation permet de retrouver les iso-valeurs de la distance en vert.*

La ré-initialisation consiste à corriger de manière itérative la fonction distance tout en conservant la position de l'iso-valeur zéro [Sus94]. L'idée est de résoudre une équation de type Hamilton-Jacobi :

$$\begin{cases} \tilde{\alpha}(x, 0) = \alpha(x, t) \\ \frac{\partial \tilde{\alpha}}{\partial \tilde{t}} = S(\tilde{\alpha}) (1 - |\nabla \tilde{\alpha}|) \text{ pour } \tilde{t} \in [0, \epsilon] \\ \alpha(x, t) = \tilde{\alpha}(x, \tilde{t}_f) \end{cases} \quad (4.5)$$

où  $\tilde{t}$  est un temps fictif et  $\tilde{\alpha}$  est la fonction modifiée par l'équation de Hamilton-Jacobi. Ainsi, on donne à  $\tilde{\alpha}$  la valeur de  $\alpha$  au temps fictif zéro. Puis on modifie  $\tilde{\alpha}$  jusqu'au temps fictif final  $\tilde{t}_f$ . A ce moment là, on donne à  $\alpha$  la valeur de  $\tilde{\alpha}$ , qui est la fonction distance réinitialisée. La fonction  $S(\tilde{\alpha})$  est une fonction signe [PMO<sup>+</sup>99] :

$$S(\tilde{\alpha}) = \frac{\tilde{\alpha}}{\sqrt{\tilde{\alpha}^2 + |\nabla \tilde{\alpha}|^2 h^2}} \quad (4.6)$$

où  $h$  est la taille de maille locale. En écrivant le terme temporel sous la forme :

$$\frac{\partial \tilde{\alpha}}{\partial \tilde{t}} = \frac{\tilde{\alpha} - \tilde{\alpha}^-}{\Delta \tilde{t}} \quad (4.7)$$

nous pouvons exprimer l'équation de Hamilton-Jacobi sous la forme d'une équation de transport similaire à (4.2) :

$$\frac{\tilde{\alpha}}{\Delta \tilde{t}} + \vec{w} \nabla \tilde{\alpha} = \frac{\tilde{\alpha}^-}{\Delta \tilde{t}} + \tilde{F} \quad (4.8)$$

où  $\tilde{F} = S(\tilde{\alpha}^-)$  et  $\vec{w} = S(\tilde{\alpha}^-) \frac{\nabla \tilde{\alpha}^-}{|\nabla \tilde{\alpha}^-|}$ . L'équation pour la ré-initialisation sera ainsi résolue de la même manière que l'équation de transport de la Level Set, simplement en ajoutant un second membre et en utilisant un terme de vitesse de propagation  $w$  calculé en fonction du champ transporté. Bien que l'iso-valeur zéro soit conservée en théorie, la pratique montre que les erreurs de calcul lors de la ré-initialisation finissent par déplacer l'interface.

## 4.2 La tension de surface

### 4.2.1 Introduction à la tension superficielle

Les effets des forces capillaires sur les fluides sont connus depuis des siècles, bien avant d'en comprendre les causes. Poggendorff [Pog83] donne des informations historiques sur l'étude des phénomènes capillaires, reprises très succinctement dans ce qui suit. Leonard de Vinci, par exemple, a été le premier à mentionner le phénomène de remontée capillaire dans ses *Carnets*. Des tentatives d'explication des causes de ce phénomène ont ensuite été données par exemple au XVII<sup>e</sup> par Rohault, par Montanari ou par Boricelli qui serait le premier à avoir donné la loi de remontée capillaire connue aujourd'hui sous le nom de loi de Jurin. Par la suite, à la fin de XVII<sup>e</sup> et au début du XVIII<sup>e</sup>, Hauksbee a étudié de façon systématique la remontée capillaire, en observant qu'elle se produit quelle que soit la géométrie (tube ou plaques parallèles) et quel que soit le solide et le liquide utilisés. De plus il montre que la remontée ne dépend pas de l'épaisseur du tube. C'est finalement Jurin [Jur19a, Jur19b] qui sera connu pour cette loi qui porte son nom. Cependant, toutes ces études ne sont que des observations du phénomène et les explications de la capillarité ne sont pas satisfaisantes.

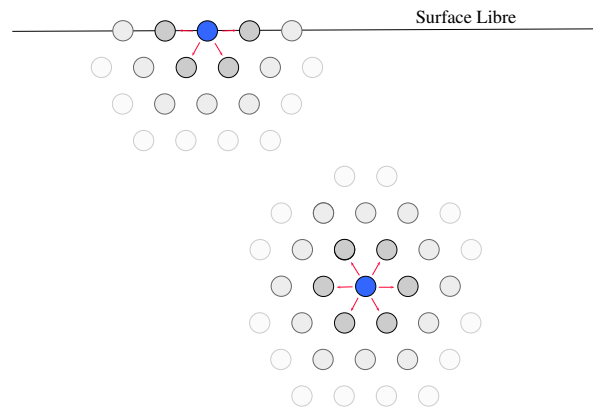
Des théories rendant compte des phénomènes de tension de surface sont apparues dès le XIX<sup>e</sup> siècle afin d'expliquer les observations de phénomènes capillaires connues depuis longtemps, comme l'ascension capillaire, par exemple, et qui n'était pas explicable par la physique newtonienne, apparue moins d'un siècle auparavant.

Laplace, en 1806, [Lap12a, Lap12b] fut l'un des premiers à poser une théorie de l'attraction capillaire, presque simultanément à Young [You05]. Bikerman [Bik77] donne une revue historique sur l'évolution des théories de la capillarité. La théorie de Laplace est plus tard complétée par Gauss<sup>1</sup> en 1830, qui démontre que l'angle de contact entre deux fluides sur une surface solide est constant.

La tension de surface est un phénomène se produisant à très petite échelle et entre plusieurs fluides non miscibles. Les molécules d'un fluide sont soumises aux interactions

1. Principia generalia theoriæ figuræ fluidorum in statu œquilibrii, 1830

mutuelles des autres molécules. Ces forces peuvent être des forces de Van Der Waals, des forces de type électrostatique dues aux liaisons hydrogènes (c'est le cas pour l'eau par exemple) ou ioniques ou des liaisons métalliques (comme on le trouve dans le cas du mercure par exemple) [LGP06, GHP01]. En moyenne, les forces d'interaction se compensent dans le fluide. Cependant, près de l'interface, les molécules sont soumises aux interactions de leurs voisines dans le même fluide mais aussi aux interactions dues aux molécules du second fluide. Cela introduit un déséquilibre dans la résultante des forces d'interactions. La situation est similaire dans le cas d'une surface libre (fig. 4.5). Ce déséquilibre est à l'origine de la force de tension de surface et de l'énergie de surface associée.

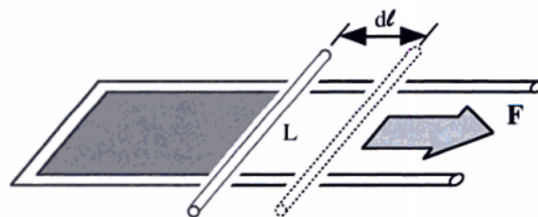


**FIGURE 4.5** – *Les interactions moléculaires dans un fluide. La résultante des forces (vecteurs rouges) est non nulle au niveau de la surface libre.*

### L'énergie de surface

On peut se représenter l'effet de la tension de surface dans le cas de l'expérience connue du film liquide supporté par un cadre dont l'un des côtés est mobile [GHP01] (figure 4.6). Le côté mobile va se déplacer de telle sorte que la surface du film soit minimale. De plus, pour déplacer le côté mobile, il faudrait dépenser une certaine quantité d'énergie, correspondant à l'énergie résultante de la force de tension de surface.

Afin de calculer l'énergie de surface, on peut adopter la représentation suivante [Qué03]. Le milieu condensé est un agglomérat d'atomes ou de molécules, qu'on représente comme des cubes de côtés  $a$ . Chacun de ces cubes va interagir avec ses voisins. Le potentiel



**FIGURE 4.6** – *Expérience du cadre mobile mettant en évidence le phénomène de tension de surface [GHP01].*

d'interaction attractive entre deux atomes donne une certaine énergie  $E_a$ . L'énergie de surface  $E_s$  correspond à l'énergie nécessaire pour créer une interface, c'est-à-dire l'énergie nécessaire pour séparer les atomes. Elle vaut donc :

$$E_s = 2n_s E_a \quad (4.9)$$

où  $n_s$  est le nombre d'atomes de la surface. On peut exprimer ce nombre d'atomes par le rapport entre la surface libre et la surface du cube représentant l'atome. Ainsi, on peut écrire :

$$E_s = 2 \frac{S_i}{a^2} E_a = \gamma S_i \quad (4.10)$$

où  $S_i$  est la surface de l'interface et  $\gamma$  est le coefficient de tension de surface. On voit donc ici que le coefficient de tension de surface a la dimension d'une énergie par unité de surface. Il s'exprimera donc en  $\text{J/m}^2$  ou en  $\text{N/m}$ .

### La loi de Laplace

Comme expliquée plus haut, la force de tension de surface est due à un déséquilibre dans les forces d'interactions moléculaires. Le système va donc se déplacer vers son état d'équilibre énergétique. Pour cela, il va tenter de minimiser la surface de son interface. Si on considère un liquide dans un second liquide, l'interface sera une surface fermée. La forme qui minimise la surface pour ce volume est donc la sphère. Ainsi, lorsqu'on considère une interface ou un film en équilibre, il aura forcément la forme qui minimisera son aire [GHP01].

Laplace donne sa loi dès 1805 en se penchant sur le phénomène de remontée capillaire. Il a pu montrer qu'il existait un saut de pression de part et d'autre de l'interface et que ce saut était directement lié à la courbure de l'interface. Il donne la loi suivante :

$$\Delta p = \gamma \left( \frac{1}{r'} + \frac{1}{r''} \right) = \kappa \gamma \quad (4.11)$$

où  $r'$  et  $r''$  sont les rayons de courbure principaux sur l'interface locale et  $\kappa$  la courbure locale. La figure 4.7 illustre la courbure d'une interface.

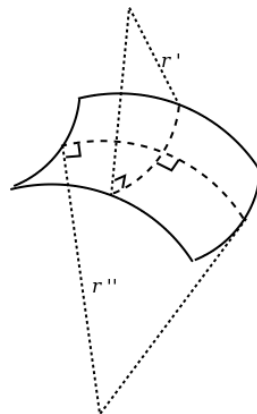


FIGURE 4.7 – Représentation des rayons principaux d'un élément de surface.

## 4.2.2 Prise en compte numérique de la tension de surface

### 4.2.2.1 La méthode Continuum Surface Force (CSF)

Dans le cas de méthodes lagrangiennes, l'interface est représentée par des nœuds du maillage. Ainsi, il est aisé de calculer une force surfacique s'appliquant sur les faces du maillage qui représentent l'interface. Par contre, dans le cas de méthodes eulériennes, le problème de la représentation de l'interface se pose, comme expliqué en 4.1 (page 111). En effet, dans ce cas, l'interface n'étant pas appuyée par des nœuds du maillage, il n'est pas possible de représenter directement une force surfacique.

Une solution a été apportée par Brackbill et al. [BKZ92], dans le cas d'une méthode de type VOF et qui peut être transposée simplement au cas d'une méthode Level Set. Les auteurs considèrent une force volumique  $F_v$  répartie sur une épaisseur  $h$  autour de l'interface (figure 4.8). Cette force doit donner la force surfacique  $F_s$  correcte lorsque

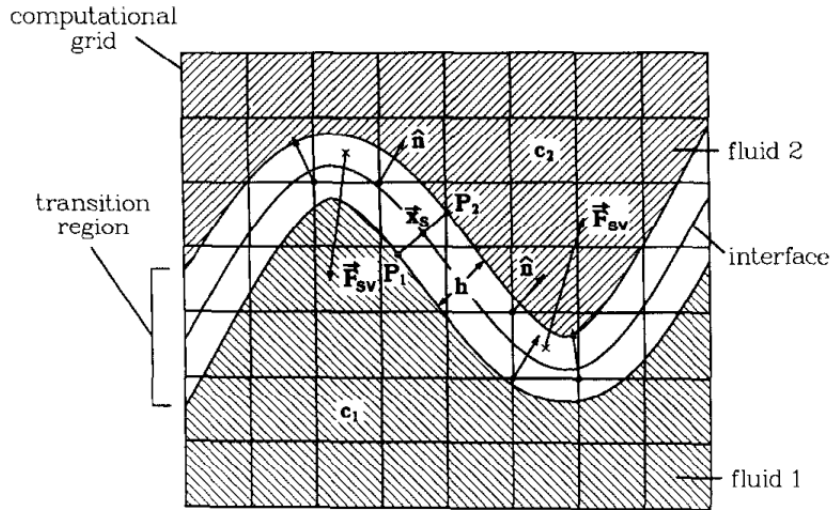


FIGURE 4.8 – Principe de la méthode CSF, tirée de [BKZ92]

l'épaisseur  $e$  tend vers 0 :

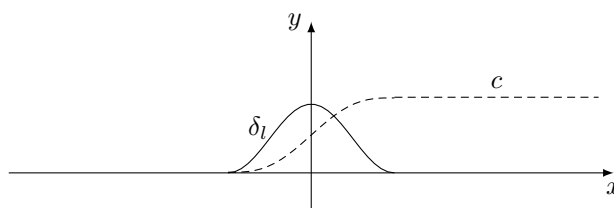
$$\lim_{e \rightarrow 0} \int_{\Omega} F_v = \int_{\Gamma} F_s \quad (4.12)$$

où  $\Gamma$  est l'interface. Pour obtenir cette force volumique, il suffit d'écrire qu'intégrer  $F_s$  sur l'interface est équivalent à intégrer sur le volume le produit  $F_s \delta$ , où  $\delta$  est un Dirac centré sur l'interface. En prenant une fonction de Dirac lissée  $\delta_l$ , (figure 4.9) on peut donc exprimer cette force surfacique en une force volumique. De plus, la fonction de Dirac lissée peut être écrite comme le produit scalaire de la normale à l'interface (dans l'épaisseur autour de l'interface) avec le gradient d'une fonction caractéristique, que les auteurs appellent une fonction *couleur*  $c$ . En prenant  $c$  comme une fonction de Heaviside lissée [BFD98], on peut écrire :

$$\delta_l \vec{n} = \nabla c \quad (4.13)$$

et ainsi la force volumique de tension de surface par unité de volume s'écrit :

$$F_v = \gamma \kappa(\vec{x}) \nabla c \quad (4.14)$$



**FIGURE 4.9** – Illustration d'un Dirac lissé  $\delta_l$  et de la fonction caractéristique  $c$  de la phase (appelée fonction couleur dans la terminologie VOF utilisée par Brackbill [BKZ92] ou loi de mélange dans ce manuscrit).

De plus, les auteurs de [BKZ92] donnent un moyen de calculer simplement la normale et la courbure de l'interface :

$$\vec{n}(\vec{x}) = \frac{\nabla c}{|\nabla c|} \quad (4.15)$$

$$\kappa(\vec{x}) = -(\nabla \cdot \vec{n}) \quad (4.16)$$

La force calculée avec les relations (4.13) à (4.16) est ajoutée au terme de force volumique de l'équation de Navier-Stokes ou de Stokes.

#### 4.2.2.2 La méthode Continuum Surface Stress (CSS)

Cette méthode a été développée par Lafaurie et al. [LNS<sup>+</sup>94] et aussi par [Jac96], qui, à partir d'une considération thermodynamique lui permettant d'écrire la tension de surface en fonction de la variation de l'énergie libre du système, obtient la même relation. Utiliser la thermodynamique pour ce genre de phénomène se retrouve davantage dans la méthode de Champ de Phase, sur laquelle il a également travaillé [Jac99]. Béliveau et al. [BFD98] développent en parallèle cette méthode de calcul numérique de la tension de surface.

Elle permet de ne pas avoir à calculer explicitement la courbure de l'interface, puisque l'on peut diminuer d'un ordre les dérivations par l'intégration par partie que l'on utilise pour écrire la forme faible du système à résoudre. Cette méthode est utilisée par Bruchon et al. [BFBB06] pour simuler l'expansion de bulles. Lorsqu'on écrit la formulation faible de l'équation de conservation de la quantité de mouvement, on remplace le terme de force de tension de surface (transformée en force volumique) de la manière suivante :

$$\int_{\Omega} \gamma \kappa \nabla c \cdot \vec{w} \, d\Omega = \int_{\Omega} \gamma \left( \frac{\nabla c \otimes \nabla c - |\nabla c|^2 \mathbb{I}}{|\nabla c|} \right) : \nabla \vec{w} \, d\Omega \quad (4.17)$$

où  $w$  est la fonction test sur la vitesse.

Le fait de ne pas avoir à calculer explicitement la courbure présente un avantage certain. En effet, pour notre formulation éléments finis linéaires, la Level Set est d'ordre 1 (définie aux nœuds). La normale, calculée à partir du gradient de la fonction distance ou de la loi de mélange avec l'équation (4.15), est donc d'ordre 0 (définie aux éléments). Pour utiliser cette normale, il est nécessaire de l'interpoler aux nœuds, ce qui est une première source d'erreurs. Lorsqu'on calcule la courbure avec l'équation (4.16), il est nécessaire de diverger cette normale. Les erreurs dues à l'interpolation sont donc amplifiées par la

divergence. Grâce à l'équation 4.17, nous évitons ces interpolations en ne calculant qu'un gradient. Nous résolvons donc l'équation suivante :

$$\int_{\Omega} 2\eta\epsilon(\vec{v}) : \epsilon(\vec{w}) - \int_{\Omega} p\nabla \cdot \vec{w} = \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{w} + \int_{\Omega} \gamma\mathbb{T} : \nabla\vec{w} \quad (4.18)$$

où  $\mathbb{T}$  est le tenseur d'extra-contrainte associé à la tension de surface, donné par :

$$\mathbb{T} = \frac{\nabla c \otimes \nabla c - |\nabla c|^2 \mathbb{I}}{|\nabla c|} \quad (4.19)$$

### 4.2.2.3 Le problème des courants parasites

Le principal problème rencontré, dans la simulation numérique d'écoulements multiphasiques lorsque la tension de surface est prépondérante sur l'écoulement, est l'apparition de courants parasites au niveau de l'interface (figures 4.10 et 4.11). Ils se rencontrent dans toutes les méthodes numériques basées sur une approche eulérienne avec prise en compte volumique de la tension de surface, que ce soit dans les méthode de différences finies (figure 4.10), les méthodes d'éléments finis, ou dans les méthodes Lattice Boltzmann (figure 4.11). Ces courants parasites sont la plupart du temps négligeables lorsque l'écoulement est régi par les forces visqueuses, puisque les vitesses mises en jeu sont bien plus importantes que les vitesses parasites. Ce n'est bien évidemment pas le cas lorsque les phénomènes capillaires sont les plus importants, puisque les vitesses mises en jeu sont faibles et que les pas de temps associés aux phénomènes capillaires sont souvent très faibles. Dans ce cas, les vitesses parasites vont provoquer un écoulement qui va déformer l'interface.

Bien que certaines publications traitant de la simulation numérique de phénomènes capillaires ne discutent pas de ce problème particulier [CKM09, LSH08, XLLZ06], beaucoup d'auteurs abordent de ce problème, ou tout simplement, testent la stabilité de leurs formulations en vérifiant l'amplitude de ces oscillations.

La principale explication concernant l'apparition de ces courants parasites est un déséquilibre dans le calcul des contraintes [LNS<sup>+</sup>94, SSA08, GFH09, MGCR07, TW07]. Ce déséquilibre provient d'erreurs numériques [JTB02]. Selon certains auteurs, elles portent sur la discrétisation de l'interface [Gun92, SSA08] et plus particulièrement sur le calcul de la normale et de la courbure [Bon05, Cou07, MGCR07, WKP98, OKZ07, SO06].

Ces courants parasites apparaissent principalement dans la phase de faible viscosité ou de plus faible densité. Ainsi, Couderc [Cou07] observe que l'intensité des courants parasites est plus importante dans le gaz que dans le fluide.

Ce problème était déjà connu pour la méthode Lattice Boltzmann [Gun92] et dans l'article traitant de la méthode CSF [BKZ92], les auteurs expliquent que les courants parasites apparaissent à cause des changements discontinus dans la localisation et l'orientation de l'interface, introduits par la méthode VOF.

Si beaucoup d'auteurs se contentent d'aborder le problème et de montrer l'efficacité de leurs méthodes pour diminuer les courants parasites, d'autres s'y sont plus attardés. Ainsi, Lafaurie et al. [LNS<sup>+</sup>94] ont étudié, pour la formulation CSS, les variations d'amplitude

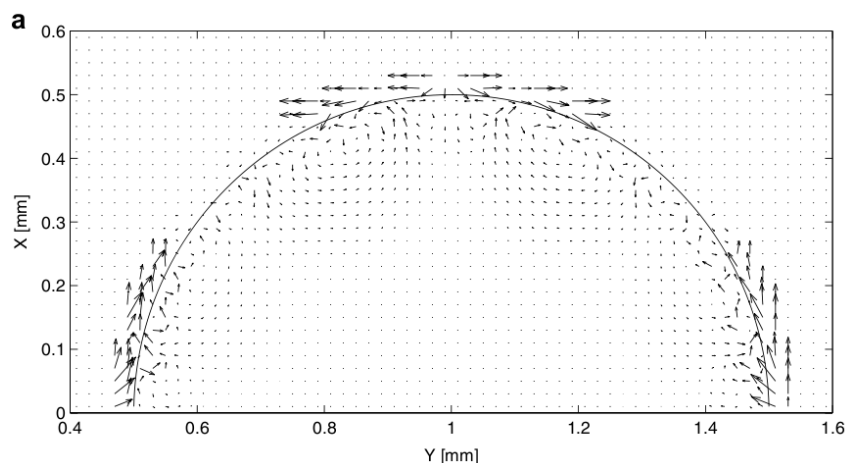


FIGURE 4.10 – Courants parasites apparaissant avec l'utilisation d'une méthode VOF et CSF [TW07].

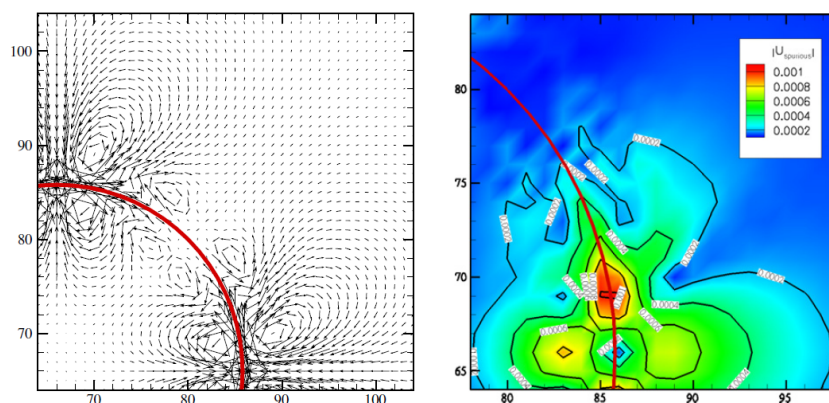


FIGURE 4.11 – Courants parasites apparaissant avec l'utilisation d'une méthode lattice Boltzmann [LLP07].

de ces courants parasites en fonction de la viscosité et du coefficient de tension de surface et ont proposé une relation linéaire entre la vitesse max des courants et le rapport  $\gamma/\eta$ . Dans sa thèse [Cou07], Couderc a fait le même travail pour la méthode Ghost-fluid, qui permet de prendre en compte les sauts en prolongeant de chaque côté de l'interface les variables discontinues sur des nœuds fantômes. Il trouve la même loi pour la norme  $L2$  de la vitesse des courants parasites :

$$\|u\|_{L2} = C \frac{\gamma}{\eta} \quad (4.20)$$

où  $C$  est une constante.

De nombreuses tentatives ont été menées pour réduire l'intensité de ces courants parasites. Couderc [Cou07] montre que l'utilisation de la méthode Ghost-fluid pour imposer les sauts au niveau de l'interface réduit de deux ordres de grandeur l'intensité des courants parasites par rapport à la méthode CSF appliquée à une Level Set. En effet, selon lui, une grande partie des problèmes viendraient de la difficulté à imposer des sauts dans

le repère de coordonnées local à l'interface, qui introduirait des erreurs sur le calcul du champ de pression. De plus, il a observé que l'utilisation d'une courbure exacte (dans le cas d'un cas test de validation dont la courbure peut être connue analytiquement) permettrait de réduire l'intensité des courants à l'ordre de grandeur des erreurs d'arrondis du calcul numérique.

Certains auteurs préfèrent travailler sur la précision de l'interface. Ainsi, Sussman et Ohta [SO06] utilisent une technique d'ordre élevé pour calculer la normale et la courbure. Seifollahi et al [SSA08] travaillent sur la reconstruction de l'interface dans la méthode VOF. Ils observent une diminution de deux ordres de grandeur de la précision des résultats par rapport aux méthodes classiques. Olsson et al. [OKZ07] utilisent une méthode Level Set quadratique et calculent la courbure en utilisant la relation  $\tilde{\kappa} - \varepsilon \Delta \tilde{\kappa} = \kappa$ . Cela permet d'améliorer la précision des résultats. L'ajout d'une diffusion sur le calcul de la courbure est également utilisé par Marchandise et al. [MGCR07].

Brackbill et al. [BKZ92] proposent de pondérer la force de tension de surface par le rapport  $\rho(x)/[\rho]$  où  $[\rho]$  est la différence de densité entre les deux phases. Cela permet de diminuer l'intensité des courants parasites dans la phase légère. Cependant, même si cela diminue l'erreur sur la vitesse, le saut de pression est moins bien calculé, puisque la force est diminuée par ce facteur de densité. Ce coefficient n'est pas pris en compte par les auteurs utilisant la méthode CSF.

Jamet et al. [JTB02] ajoutent une équation de conservation de l'énergie dans leur formulation. Cette équation vient du fait que les auteurs utilisent une approche thermodynamique pour obtenir une formulation semblable à la formulation CSS pour la tension de surface. Ils obtiennent donc naturellement une conservation de l'énergie. Sa prise en compte permet de diminuer fortement l'apparition de ces courants parasites. Cependant, la résolution de cette équation supplémentaire est coûteuse et alourdit la formulation.

Tong et Wang [TW07] introduisent la méthode PBM (Pressure Boundary Method), où un gradient de pression est imposé au niveau de l'interface pour la résolution des équations de Navier-Stokes. Ce gradient de pression est dépendant du gradient de pression capillaire. La pression est ensuite calculée, puis finalement la vitesse temporaire obtenue de la résolution de Navier-Stokes est corrigée avec le nouveau champ de pression. Cette méthode de projection en deux passes montre une importante réduction des courants parasites. Cependant, la formulation utilisée est lourde.

### 4.2.3 Les temps caractéristiques

Le choix du pas de temps dans les simulations numériques est très important. Ce choix dépend à la fois de la physique du problème et des limitations numériques. Pour déterminer les temps caractéristiques apparaissant dans la simulation numérique, il est nécessaire d'utiliser certains nombres sans dimension qui font intervenir les dimensions caractéristiques du problème. Smolianski [Smo01] donne une rapide introduction aux principales échelles de temps qui interviennent dans les phénomènes capillaires.

Nous allons présenter, dans la suite, quelques nombres sans dimension qui nous permettent de déterminer les temps caractéristiques correspondants aux phénomènes physiques que ces nombres représentent. Nous considérerons que le temps caractéristique est obtenu lorsque les différentes forces intervenant dans ces nombres sans dimension s'équilibrent, donc lorsque le nombre caractéristique vaut 1. Il est important de choisir un pas

de temps numérique inférieur au pas de temps caractéristique du phénomène physique que l'on souhaite considérer, sans quoi, il sera impossible de capturer les phénomènes qui y sont associés. En revanche, le non respect de ces pas de temps ne conduit pas forcément à un résultat erroné si l'on souhaite étudier les phénomènes ayant une échelle de temps caractéristique supérieure.

Lorsque la gravité entre en jeu dans la physique du problème considéré, nous pouvons utiliser le nombre de Froude  $Fr = \frac{U}{\sqrt{gL}}$ , où  $U$  est une vitesse caractéristique,  $g$  est l'accélération de la pesanteur et  $L$  une longueur caractéristique. Nous pouvons définir un temps caractéristique dû aux phénomènes de gravité  $\Delta t_g = \frac{L}{U}$ . Cela nous permet d'écrire le temps caractéristique aux phénomènes de gravité sous la forme suivante :

$$\Delta t_g = \sqrt{\frac{L}{g}} \quad (4.21)$$

En ce qui concerne les phénomènes de tension de surface, c'est le nombre capillaire qui intervient. Il s'écrit  $Ca = \frac{\eta U}{\gamma}$ , où  $\eta$  est la viscosité dynamique,  $\gamma$  le coefficient de tension de surface et  $U$  la vitesse caractéristique des phénomènes considérés. Nous pouvons ainsi déterminer le pas de temps caractéristique des phénomènes capillaires :

$$\Delta t_{Ca} = \frac{\eta L}{\gamma} \quad (4.22)$$

Pour les effets visqueux, nous pouvons utiliser le nombre de Reynolds  $Re = \frac{\rho U L}{\eta}$  qui donne le rapport entre les forces d'inertie et les forces visqueuses. De la même manière que précédemment, en prenant  $Re = 1$ , nous pouvons déterminer un pas de temps caractéristique des phénomènes visqueux :

$$\Delta t_\eta = \frac{\rho L^2}{\eta} \quad (4.23)$$

Le choix du pas de temps ne dépend pas que de la physique du problème. Des phénomènes d'instabilités numériques peuvent apparaître pour des pas de temps trop élevés. Il y a donc des conditions de stabilité sur les méthodes numériques utilisées. La plus connue est la condition CFL [CFL67] qui apparaît lorsque le schéma temporel est explicite. Cette condition doit être respectée lorsque la méthode Level Set est utilisée.

Brackbill [BKZ92] donne une condition sur le pas de temps dans le cas d'un écoulement modélisé par les équations de Navier-Stokes sous la forme suivante :

$$\Delta \tilde{t}_{Ca} = \sqrt{\frac{\langle \rho \rangle h^3}{2\pi\gamma}} \quad (4.24)$$

Les auteurs de [GV08, GV07] donnent la condition de stabilité suivante :

$$\Delta \tilde{t}_{Ca} = \frac{1}{2} \left( c_2 \frac{\eta}{\gamma} h + \sqrt{\left( c_2 \frac{\eta}{\gamma} h \right)^2 + 4c_1 \frac{\rho h^3}{\gamma}} \right) \quad (4.25)$$

où  $c_1$  et  $c_2$  sont des coefficients indépendants de la taille de maille. Lorsqu'on ne résout que l'équation de Stokes, nous pouvons utiliser :

$$\Delta \tilde{t}_{Ca_{Stokes}} = c_2 \frac{\eta}{\gamma} h \quad (4.26)$$

Les auteurs montrent que  $c_2 = 4$  est la limite au dessus de laquelle les instabilités apparaissent.

Le choix du pas de temps maximal pour la simulation sera ensuite simplement le minimum des différents pas de temps caractéristiques définis plus haut. Les phénomènes de tension de surface vont introduire des pas de temps très faibles. En pratique, il n'est pas toujours nécessaire de respecter strictement ce pas de temps critique.

### 4.3 Prise en compte de la tension de surface dans notre formulation éléments finis

Nous présentons dans cette partie la prise en compte des phénomènes de tension de surface dans nos calculs numériques. Dans un premier temps, nous détaillons notre utilisation de la méthode CSF et, dans un second temps, de la méthode CSS. Pour chacune d'entre elles, nous donnons les algorithmes d'un calcul en éléments finis.

#### 4.3.1 La méthode CSF

Cette méthode consiste à calculer la force de tension de surface d'un système à un temps  $t$  et à l'introduire en second membre des équations de Stokes pour obtenir une solution à  $t + dt$ . L'expression pour cette force est donnée par les relations (4.14) et (4.13) rappelées ci-dessous :

$$F_v = \gamma \kappa(\vec{x}) \nabla c \quad (4.14)$$

$$\delta_l \vec{n} = \nabla c \quad (4.13)$$

Cette fonction  $c$  nodale, valant 0 ou 1 selon que le nœud est dans une phase ou dans l'autre, peut être choisie lissée, en utilisant une méthode similaire à celle utilisée pour la viscosité dans la méthode d'immersion de domaines (section 2.1.1).

Il est ensuite possible de calculer le gradient de ce champ  $c$ , défini aux nœuds, pour obtenir un champ de normales définies aux éléments. Ensuite, une interpolation des éléments vers les nœuds permet de pouvoir diverger ce champ pour obtenir la courbure. Cette dernière, également définie aux éléments du fait de la divergence, peut ensuite être interpolée aux nœuds pour être introduite dans le calcul de force. Cependant, cette méthode apporte des erreurs numériques suite aux multiples interpolations entre les éléments et les nœuds.

En choisissant une loi de mélange pour cette fonction  $c$  sous la forme suivante :

$$c = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha < e \\ \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{\alpha}{e} + \frac{1}{\pi} \sin \left( \pi \frac{\alpha}{e} \right) \right] & \text{si } |\alpha| < e \\ 1 & \text{si } \alpha > e \end{cases} \quad (4.27)$$

Nous pouvons naturellement calculer analytiquement sa dérivée. En effet, puisque  $c$  dépend de  $\alpha$ , nous pouvons écrire :

$$\nabla c = \frac{dc}{d\alpha} \nabla \alpha \quad (4.28)$$

En utilisant les équations (4.15) et (4.13), nous pouvons en déduire la relation suivante :

$$\delta_l(\alpha) = \frac{dc}{d\alpha} \quad (4.29)$$

et ainsi :

$$\delta_l(\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha < -e \text{ ou } \alpha > e \\ \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{e} + \frac{1}{e} \cos \left( \pi \frac{\alpha}{e} \right) \right] & \text{si } |\alpha| < e \end{cases} \quad (4.30)$$

où  $e$  est la demi-épaisseur du Dirac et  $\alpha$  est la fonction distance à l'interface sur laquelle le Dirac est centré.

Le calcul de la normale et de la courbure se fait de la manière donnée par Brackbill [BKZ92], en utilisant les équations (4.15) et (4.16). Nous ne pouvons ainsi pas échapper aux deux interpolations des nœuds aux éléments.

Une fois obtenu le Dirac lissé  $\delta_l$ , les normales  $\vec{n}$  et la courbure  $\kappa$ , nous pouvons calculer la force de tension de surface.

L'algorithme d'un calcul d'écoulement avec tension de surface prise en compte avec la méthode CSF est le suivant :

1. Calcul du champ de normales  $\vec{n}$  à l'interface à partir de la fonction Level Set au temps  $t$  ;
  - (a) Calcul du gradient de la Level Set ;
  - (b) Interpolation du champ obtenu (défini aux éléments) sur les nœuds ;
  - (c) Normalisation des vecteurs normaux (au cas où la level-set ait perdue sa propriété de distance, notamment lorsque l'étape de réinitialisation n'est pas assez fréquente).
2. Calcul du champ de courbure  $\kappa$  de l'interface à partir du champ de normales  $\vec{n}$  calculé ;
  - (a) Calcul de la divergence du champ de vecteur  $\vec{n}$  et multiplication par  $-1$  ;
  - (b) Interpolation du champ obtenu (défini aux éléments) sur les nœuds ;
3. Calcul du Dirac lissé  $\delta_l$  en utilisant l'équation (4.30) ;
4. Calcul de la force de tension de surface en utilisant l'équation (4.14) ;
5. Calcul du champ de viscosité  $\eta$  en utilisant la Level Set ;
6. Résolution des équations de Stokes en utilisant le champ de viscosité  $\eta$  calculé et en introduisant la force de tension de surface en second membre ;
7. Calcul de la Level Set au temps  $t + dt$  avec le champ de vitesse au temps  $t$  calculé ;
8. Retour en 1.

### 4.3.2 La méthode CSS

La méthode CSS consiste à calculer un terme tensoriel contenant l'information de courbure, donné par l'équation (4.19), que nous rappelons ci-dessous :

$$\mathbb{T} = \frac{\nabla c \otimes \nabla c - |\nabla c|^2 \mathbb{I}}{|\nabla c|} \quad (4.19)$$

et que nous introduisons dans la formulation faible de Stokes :

$$\int_{\Omega} 2\eta \epsilon(\vec{v}) : \epsilon(\vec{w}) - \int_{\Omega} \gamma \mathbb{T} : \nabla \vec{w} - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \vec{w} = \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{w} \quad (4.31)$$

Nous avons donc un terme supplémentaire dans le terme  $A_{vv}$  de la forme matricielle (présentée section 2.2.1) donnée par l'équation (2.22). Le détail de l'implémentation est donnée en annexe A.

Ce terme ajouté doit également être pris en compte dans la stabilisation. Une étude rapide a montré que la formulation stabilisée que nous utilisons implique que le terme de stabilisation associé à ce tenseur soit nul si ce dernier est défini aux éléments. Il y a toutefois toujours des incertitudes concernant la stabilisation de ce terme. Une étude à ce sujet est en cours au laboratoire [FHC10].

Le déroulement d'un calcul d'écoulement avec prise en compte de la tension de surface par la méthode CSS est illustré par l'algorithme suivant :

1. Calcul du champ de normales  $\vec{n}$  à l'interface à partir de la fonction Level Set au temps  $t$  ;
  - (a) Calcul du gradient de la Level Set ;
  - (b) Interpolation du champ obtenu (défini aux éléments) sur les nœuds ;
  - (c) Normalisation des vecteurs normaux (au cas où la level-set ait perdue sa propriété de distance, notamment lorsque l'étape de réinitialisation n'est pas assez fréquente).
2. Calcul du Dirac lissé  $\delta_l$  en utilisant l'équation (4.30) ;
3. Calcul de  $\nabla c = \delta_l \vec{n}$  ;
4. Calcul du tenseur  $\mathbb{T}$  en utilisant  $\nabla c$  ;
5. Calcul du produit  $\gamma \mathbb{T}$  ;
6. Calcul du champ de viscosité  $\eta$  en utilisant la Level Set ;
7. Résolution des équations de Stokes en utilisant le solveur avec extra-contrainte  $\mathbb{T}$  ;
8. Calcul de la Level Set au temps  $t + dt$  avec le champ de vitesse au temps  $t$  calculé ;
9. Retour en 1.

## 4.4 Validation du solveur de Stokes avec plusieurs phases

Nous souhaitons valider l'utilisation du solveur de Stokes avec un champ de viscosité variable dans l'espace. Pour cela, nous allons utiliser un écoulement de Poiseuille constitué

de deux couches de viscosités différentes et dont la vitesse est parallèle à l'interface, comme présenté figure 4.12. Étant donné qu'il existe une solution analytique à ce problème, nous pourrions calculer l'erreur que nous faisons en fonction du maillage et de l'épaisseur de mélange de la viscosité

Les problèmes de transport d'interface ne sont pas traités ici, le transport de la Level Set ayant été validé à de nombreuses reprises dans l'équipe de recherche [Vil11].

Le cas traité ici est différent du cas utilisé en 2.3.1 pour la validation de la méthode d'immersion de domaines. Ici, la loi de mélange est centrée sur l'interface, et les deux phases sont en mouvement. Étant donné que nous sommes en présence de deux fluides, il n'y a pas de problème de stabilisation, et la viscosité de bulle correspond au champ de viscosité du domaine de calcul. Bien évidemment, nous pourrions simuler un écoulement diphasique dans la méthode d'immersion de domaine, avec les zones solides représentées par une seconde fonction distance. Dans ce cas, la viscosité attribuée à la bulle sera modifiée de la même manière que pour le cas à une seule phase, et correspondra à la viscosité du fluide au contact de chaque zone solide.

#### 4.4.1 Solution analytique de l'écoulement de Poiseuille diphasique

Nous considérons un écoulement entre deux plans parallèles infinis (figure 4.12). Cela nous permet de nous placer dans un cas 2D. Les plans sont placés en  $y = H$  et  $y = -H$ . L'interface est située en  $y = 0$ . Le fluide 1, de viscosité dynamique  $\eta_1$  est situé dans les  $y$  positifs et le fluide 2, de viscosité  $\eta_2$ , dans les  $y$  négatifs. Un différentiel de pression est imposé entre  $x = 0$  et  $x = L$ .

Du fait de la géométrie et des conditions aux limites, le champ de vitesse peut s'écrire :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x(y) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.32)$$

Ainsi, en utilisant les équations de Stokes, le problème s'écrit :

$$\eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \frac{\partial p}{\partial x} \quad (4.33)$$

Ainsi, le problème de Poiseuille diphasique s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{x1} = \frac{1}{2\eta_1} \frac{\Delta p}{L} y^2 + A_1 y + B_1 \\ v_{x2} = \frac{1}{2\eta_2} \frac{\Delta p}{L} y^2 + A_2 y + B_2 \\ v_{x1}(H) = v_{x2}(-H) = 0 \\ v_{x1}(0) = v_{x2}(0) \\ \eta_1 \left. \frac{\partial v_{x1}}{\partial y} \right|_0 = \eta_2 \left. \frac{\partial v_{x2}}{\partial y} \right|_0 \end{array} \right. \quad (4.34)$$

La condition de continuité de la vitesse nous permet d'écrire :

$$B_1 = B_2 = B \quad (4.35)$$

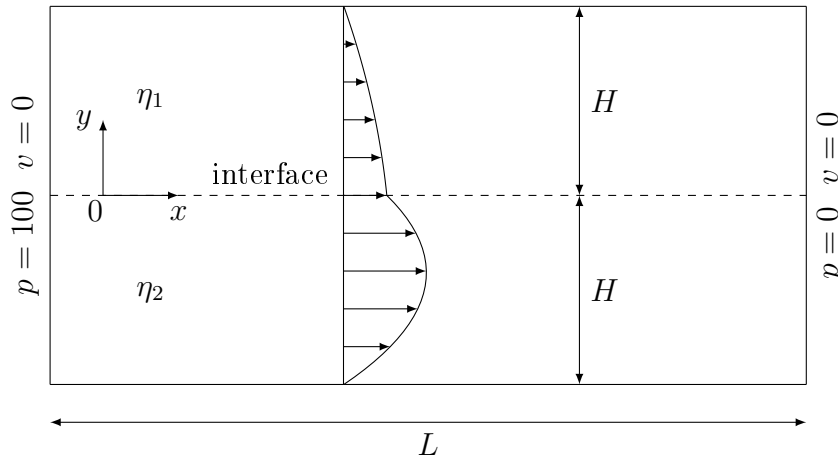


FIGURE 4.12 – Schéma de l'écoulement de Poiseuille diphasique considéré.

La condition de continuité de la contrainte tangentielle nous permet d'écrire :

$$\eta_1 A_1 = \eta_2 A_2 \quad (4.36)$$

Les deux autres conditions (non-glissement aux parois), nous permettent d'écrire :

$$A_1 = -\frac{H\Delta p}{2L} \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_1(\eta_1 + \eta_2)} \quad (4.37)$$

$$B = -\frac{1}{2} \left[ \frac{H^2\Delta p}{2L} \left( \frac{1}{\eta_1} + \frac{1}{\eta_2} \right) + H(A_1 - A_2) \right] \quad (4.38)$$

Nous avons ainsi parfaitement déterminé les équations des vitesses dans les deux fluides.

Les résultats des calculs effectués sont donnés dans la suite. Nous avons fait des tests de sensibilité au maillage, ainsi qu'à l'épaisseur du mélange de viscosité. Cette fois, pour le mélange P1 (c'est-à-dire pour un champ défini aux nœuds), nous rappelons qu'il n'y a pas de réelle raison de mélanger seulement d'un côté de l'interface. Nous avons donc fait un mélange linéaire de part et d'autre de l'interface.

#### 4.4.2 Les résultats numériques

Le domaine de calcul est un domaine carré de côté 1 (nous avons donc  $L = 2H$ ). Sur le plan d'entrée, une pression  $p = 100$  est imposée. En sortie, elle est imposée nulle. Sur ces faces, la composante verticale de la vitesse est nulle. Sur les parois, la vitesse est nulle. Nous définissons une interface horizontale entre les deux fluides en  $y = 0$ . Le fluide 1 sera placé au dessus de l'interface, le fluide 2 en dessous. Nous prendrons  $\eta_1 = 10$  et  $\eta_2 = 1$ . Avec ces paramètres, nous aurons les paramètres suivants pour la vitesse du Poiseuille diphasique :

$$A_1 = \frac{-45}{22} \quad A_2 = \frac{-225}{11} \quad B = \frac{-505}{44}$$

La figure 4.13 montre la vitesse le long d'une section verticale du domaine de simulation. Bien que pour un maillage très grossier le champ de vitesse calculé est très différent

du champ de vitesse analytique, nous voyons que très rapidement, une diminution de la taille de maille donne un résultat acceptable.

De plus, nous avons effectué des calculs pour des épaisseurs de mélange différentes. La figure 4.14 montre l'écart entre la vitesse analytique et la vitesse calculée, en pourcentage, pour trois épaisseurs de mélange.

Nous voyons que l'erreur se concentre au niveau de l'interface. Nous pouvons déduire de ce graphique que plus l'épaisseur du mélange est petite, plus l'erreur est faible. De plus, nous voyons que l'utilisation d'un mélange  $P0$ , c'est-à-dire pour un champ défini aux éléments, permet de diminuer fortement l'erreur obtenue sur la vitesse. Cependant, comme nous le verrons ensuite, l'erreur sur la pression est plus grande dans le cas d'un mélange discontinu. Nous observons que l'erreur sur la vitesse est principalement centrée sur son maximum et sur la zone de transition entre les fluides.

Nous remarquons également des oscillations de l'erreur. Ces oscillations sont dues à la différence entre discrétisation du problème et échantillonnage de la section. En effet, le nombre de points pris pour tracer la courbe est bien plus grand que le nombre de nœuds sur la verticale du domaine. Nous avons un rapport 100 entre ces deux valeurs. Ainsi, sur un élément, la solution calculée est linéaire entre deux points alors que la solution analytique a une forme quadratique. Ainsi, l'écart entre la solution numérique et la solution analytique est maximal au centre de l'élément. Ceci explique les cloches qui apparaissent à fréquence régulière sur le graphique. Nous devons également préciser que l'erreur augmente en  $y = -H$  et  $y = H$ . Ce sont des artefacts uniquement dus à la division par zéro dans le calcul de l'écart à la solution analytique, qui s'exprime par  $|\frac{v_{analy}-v_{calc}}{v_{analy}}|$ . En ce qui concerne la pression, comme nous pouvons le voir sur la figure 4.15, l'erreur est principalement centrée sur la zone de transition entre les fluides.

Nous présentons maintenant les résultats sur l'étude de sensibilité au maillage et à l'épaisseur de mélange de la viscosité. Les résultats sont présentés figure 4.16. Nous avons comparé les résultats pour des épaisseurs de mélange respectivement égales à une, deux et trois fois la taille de maille. Nous avons également calculé l'erreur pour un mélange discontinu  $P0$ . La taille de maille varie de  $h = 0.1$  à  $h = 0.004$ . Pour l'adaptation anisotrope, nous avons conservé une taille de maille de fond de  $h = 0.02$  et nous avons créé une bande de 20 éléments anisotropes autour de l'interface. La taille de maille donnée dans ce dernier cas correspond à la taille de maille locale au niveau de l'interface et dans la direction normale à cette dernière.

Les interprétations concernant la vitesse sont bien en accord avec les premières qui ont été faites précédemment, à savoir que l'erreur diminue avec l'épaisseur de la zone de mélange de la viscosité. De plus l'utilisation d'une adaptation anisotrope du maillage n'améliore pas la précision, mais le gain en coût de calcul permet d'avoir des maillages beaucoup plus fins localement. Cependant, pour la pression, les conclusions sont en contradiction avec la vitesse. En effet, l'erreur sur la pression est d'autant plus grande que l'épaisseur de la zone de mélange est petite. L'utilisation d'une loi de mélange  $P0$  donnera l'erreur maximale. De plus, l'utilisation d'un maillage anisotrope va légèrement diminuer la précision du calcul. Cela montre la grande sensibilité du champ de pression à la qualité du maillage. Nous pouvons également ajouter que dans le cas du maillage anisotrope, la direction de l'anisotropie est donnée en fonction de l'interface. Dans notre configuration, cette direction donne un maillage plus fin dans la direction de la variation de vitesse. Ce

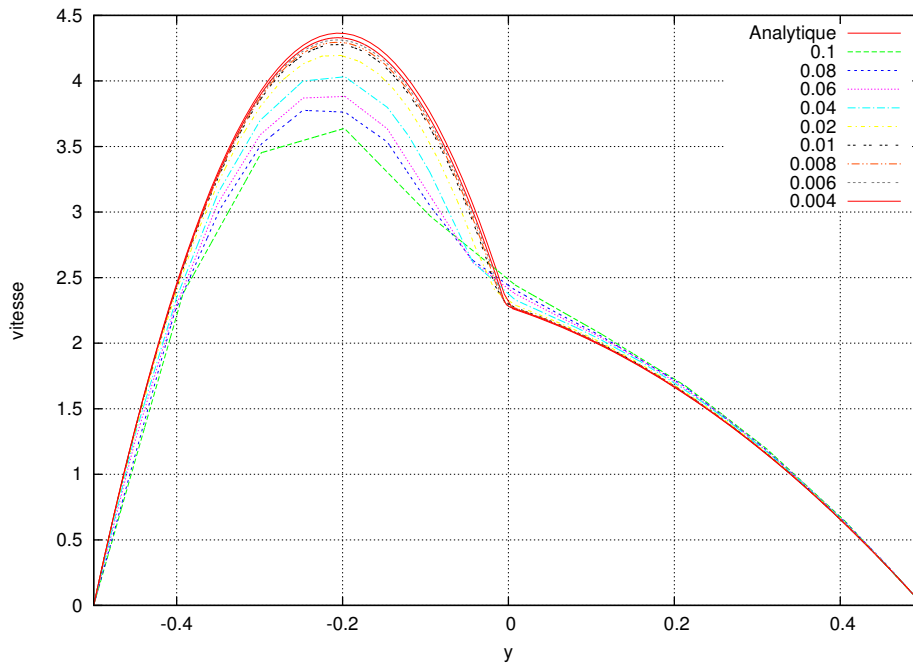


FIGURE 4.13 – Vitesse, extraite d'une section verticale de l'écoulement de Poiseuille à deux couches, tracée pour plusieurs tailles de maille et pour un mélange de viscosité effectué sur une épaisseur d'une taille de maille.

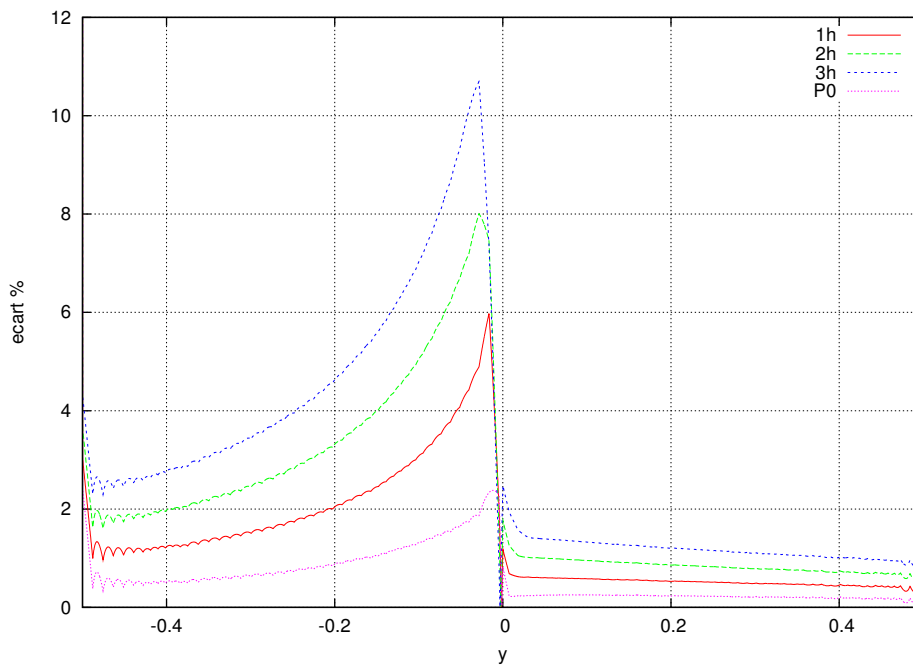
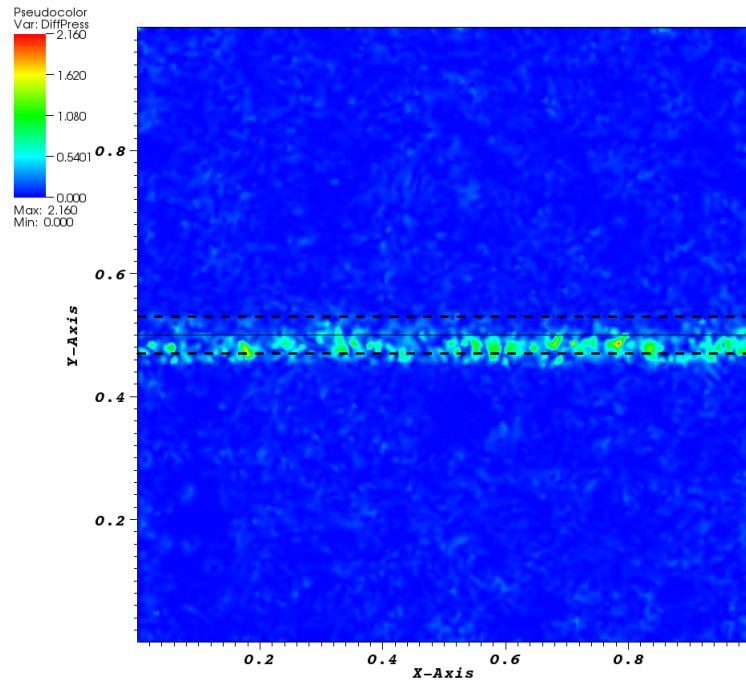


FIGURE 4.14 – Écart à la vitesse analytique  $|\frac{v_{analy}-v_{calc}}{v_{analy}}|$  pour différentes épaisseurs de mélange. La taille de maille est  $h = 0.02$ .



**FIGURE 4.15** – Écart à la pression analytique  $|p_{analy} - p_{calc}|$  pour une épaisseur de mélange de  $3h$  et une taille de maille de  $h = 0.01$ . L'interface entre les deux fluides est représentée par la ligne pleine et les limites de la zones de mélange par les lignes en tirets.

n'est pas le cas pour la pression. On le voit également par le fait que les courbes d'erreurs semblent un peu plus chahutées pour la pression.

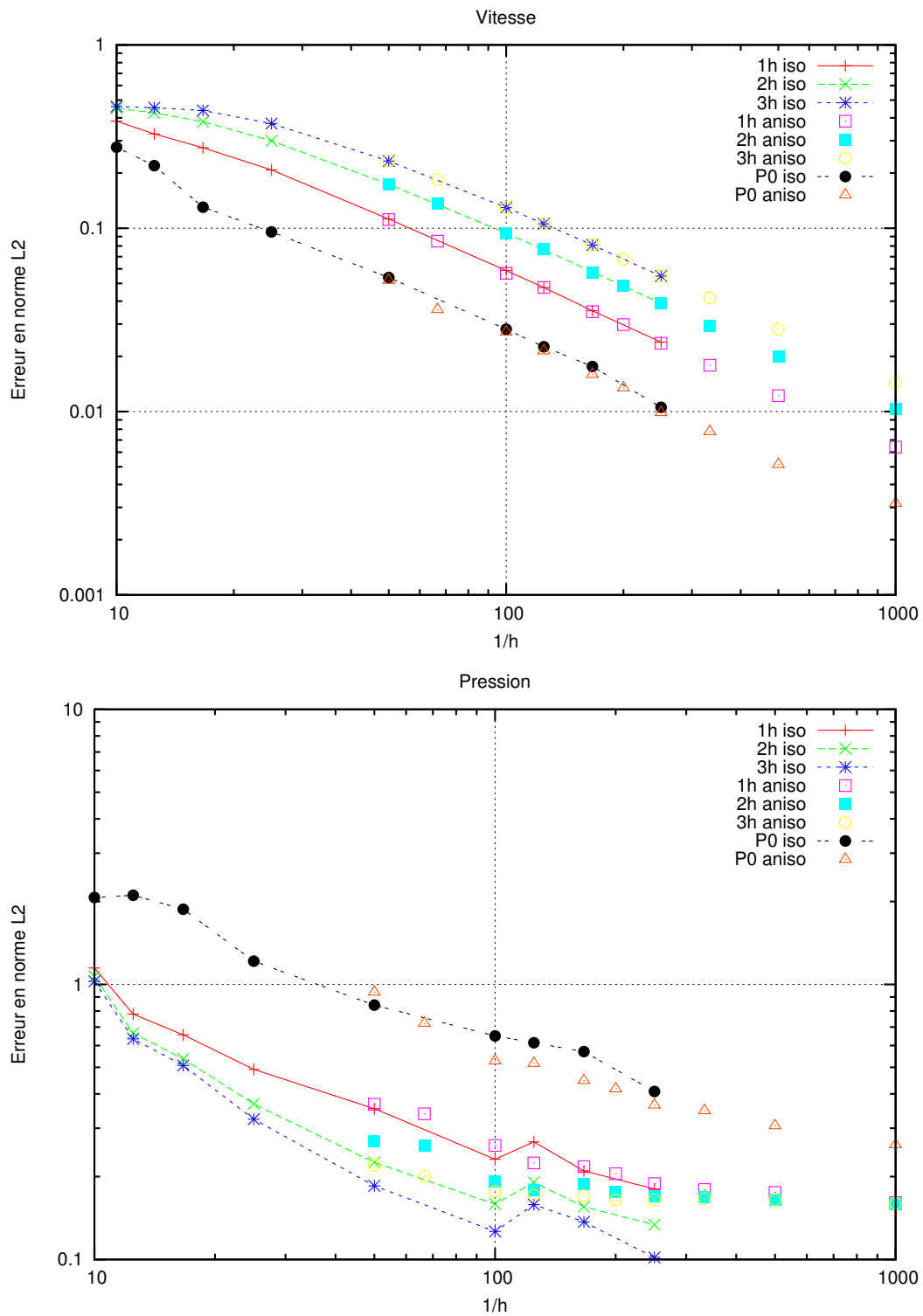
## 4.5 Validation de la prise en compte de la tension de surface

Le cas test de la loi de Laplace consiste à placer une bulle ou une goutte dans un fluide au repos. Il s'agit ensuite simplement de résoudre les équations de Stokes avec la force de tension de surface. La goutte ayant une forme circulaire (2D) ou sphérique (3D), elle doit être à l'équilibre et le résultat devrait donner un fluide au repos, avec une bulle statique et un saut de pression à l'interface.

La loi de Laplace (4.11) nous donne la relation suivante :

$$\begin{cases} p_{int} - p_{ext} = \frac{\gamma}{R} & \text{en 2D} \\ p_{int} - p_{ext} = \frac{2\gamma}{R} & \text{en 3D} \end{cases} \quad (4.39)$$

Afin de nous placer dans une configuration proche de notre centre d'intérêt, nous choisissons une bulle de 1 mm de diamètre dans un domaine global de 5 mm de longueur. Nous choisissons  $\eta_1 = 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$  et  $\eta_2 = 5 \cdot 10^{-2} \text{ Pa} \cdot \text{s}$  pour la viscosité du fluide intérieur et du fluide extérieur respectivement et un coefficient de tension de surface  $\gamma = 0.03 \text{ N/m}$ . Nous imposons une vitesse nulle sur toutes les frontières. D'après la loi de Laplace, nous devons obtenir  $\Delta p = 60 \text{ Pa}$ . Nous nous plaçons dans le système d'unité suivant : longueur



**FIGURE 4.16** – Norme L2 de l'erreur sur la vitesse (en haut) et la pression (en bas) en fonction de  $1/h$  et pour différentes épaisseurs de mélange. Les données pour des maillages isotropes et homogènes sont données par les traits. Les données obtenues sur des maillages adaptés de façon anisotrope autour de l'interface sont en points seulement avec une épaisseur de  $20h$  pour la bande anisotrope autour de l'interface et un maillage de fond de  $h = 0.02$ .

en mm, temps en s, masse en g, force en  $\mu\text{N}$ , pression en Pa, vitesse en mm/s et masse volumique en  $\text{g}/\text{mm}^3$ .

### 4.5.1 La méthode CSF

Certains paramètres des simulations ont une grande influence sur les calculs. Dans un premier temps, l'épaisseur du mélange de viscosité peut avoir un effet non négligeable sur la précision du calcul. Nous montrons section 4.4 page 128, que la meilleure précision sur la vitesse est obtenue pour une épaisseur de mélange de la viscosité la plus faible ou pour une viscosité discontinue. En revanche, les tendances sont opposées pour la pression.

Nous montrons, dans la suite, que les conclusions sur les résultats que nous obtenons dans le cas diphasique simple ne s'appliquent pas tout à fait lorsqu'on prend en compte les forces de tension de surface. En effet, il est couramment observé, dans la littérature, la présence de courants parasites (illustrés figures 4.17 et 4.18) autour de l'interface entre les deux phases. Ces courants parasites sont principalement dues à la discrétisation de cette interface. Lorsque l'épaisseur de la zone de mélange de viscosité augmente, le fluide de plus forte viscosité va donc avoir plus d'importance. Ainsi, les courants parasites vont diminuer puisque globalement le fluide sera plus visqueux.

Un autre paramètre à prendre en compte est l'épaisseur du Dirac lissé. En effet, une épaisseur trop faible va conduire à un Dirac mal discrétisé et ainsi à une mauvaise distribution volumique de la force. Nous obtenons ainsi des zones de l'interface sur lesquelles la force est plus importante qu'ailleurs et donc l'amplitude de ces courants parasites augmente. Dans la suite, en plus de l'étude de sensibilité à la taille de maille, nous étudions la sensibilité à l'épaisseur de mélange de la viscosité et à l'épaisseur du Dirac.

Le grand nombre de calculs effectués rend difficile sa représentation graphique. Tous les résultats sont donc présentés en annexe B et seule une sélection de quelques points est représentée dans la suite, figure 4.19 pour la vitesse et 4.20 pour la pression. Nous donnons cependant les conclusions que nous pouvons tirer de ces résultats.

En ce qui concerne la norme  $L2$  sur la vitesse, l'utilisation d'un mélange de viscosité défini aux éléments n'est pas souhaitable, car l'erreur obtenue dans ce cas est supérieure à un mélange défini aux nœuds. Pour ce dernier type de mélange, l'erreur minimale est obtenue lorsque l'épaisseur du mélange de viscosité est la même que l'épaisseur du Dirac. Pour un mélange de viscosité de demi-épaisseur  $2h$ ,  $4h$  et  $6h$ , l'erreur minimale est obtenue respectivement pour un Dirac de demi-épaisseur  $2h$ ,  $4h$  et  $6h$ . Pour un mélange de viscosité de  $10h$ , les conclusions sont plus difficiles à donner.

En ce qui concerne la pression, l'épaisseur du mélange de viscosité a peu d'effet. Cela semble normal, car la pression ne doit pas dépendre de la viscosité. Nous remarquons tout de même que l'erreur minimale en pression est obtenue pour une épaisseur de Dirac la plus faible. C'est tout à fait normal, étant donné qu'en augmentant l'épaisseur du Dirac, on augmente la zone de variation sur la pression, qui analytiquement est d'épaisseur nulle. Ainsi, la discontinuité est de plus en plus lissée, ce qui augmente l'erreur.

Les courants parasites sont des phénomènes numériques locaux qui vont déstabiliser l'interface très localement. Il est donc judicieux d'étudier l'erreur maximale obtenue sur

la vitesse. Il ne suffit pas que la norme  $L_2$  de l'erreur soit faible. En effet, si peu de courants parasites apparaissent, mais que très localement une vitesse parasite très forte est créée, l'interface peut être très déformée lors de son transport dans le cas de simulations non-stationnaires.

Les conclusions sur la norme maximale de l'erreur en vitesse sont les mêmes que celles sur la norme  $L_2$ . Pour la pression, aucune conclusion ne peut être donnée.

Nous pouvons donc conclure que les résultats les plus précis seront obtenus pour une épaisseur de Dirac égale à l'épaisseur de la zone de mélange de viscosité, et valant  $4h$ .

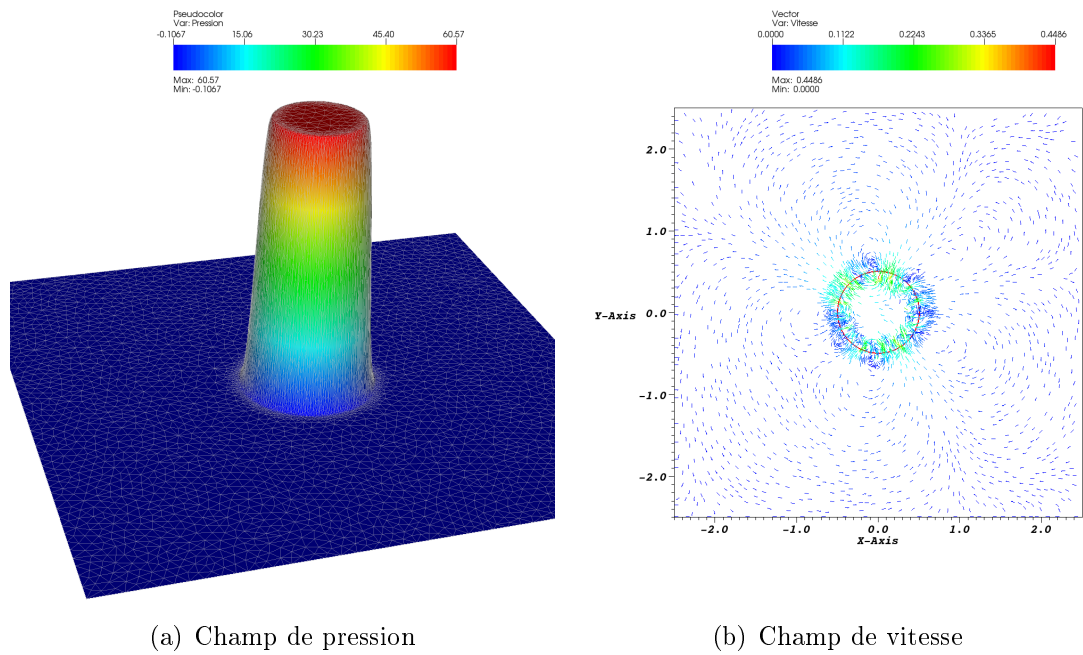


FIGURE 4.17 – Un résultat de calcul pour une bulle statique, en 2D, pour une taille de maille près de l'interface  $h = 0.02$  et pour une épaisseur de  $6h$  pour le Dirac et la viscosité.

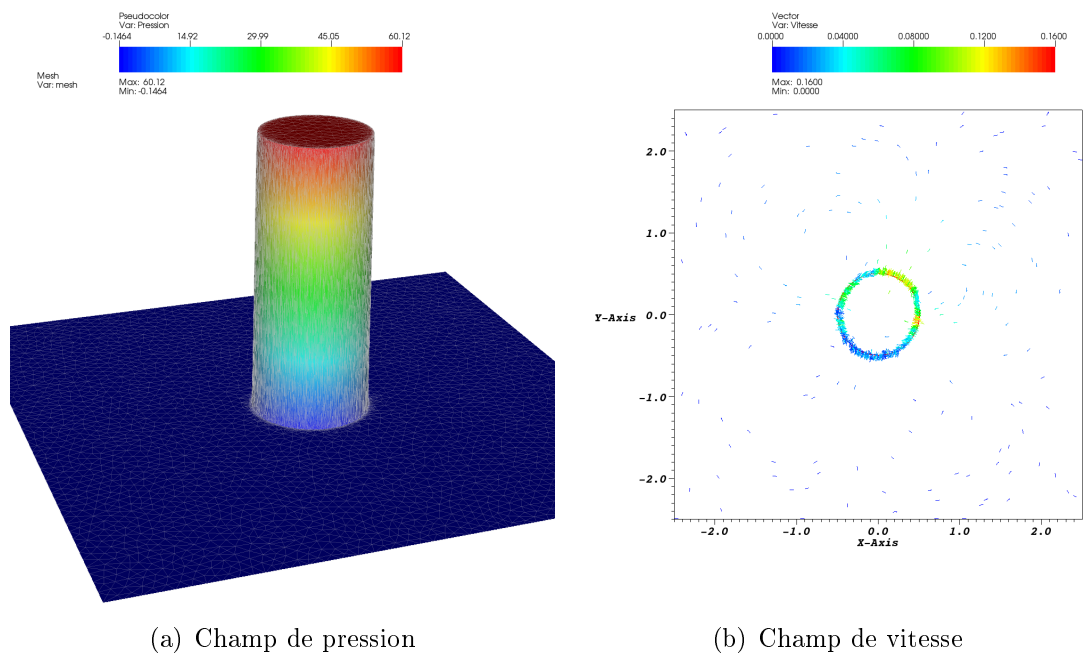


FIGURE 4.18 – Un résultat de calcul pour une bulle statique, en 2D, pour une taille de maille près de l'interface  $h = 0.006$  et pour une épaisseur de  $6h$  pour le Dirac et la viscosité.

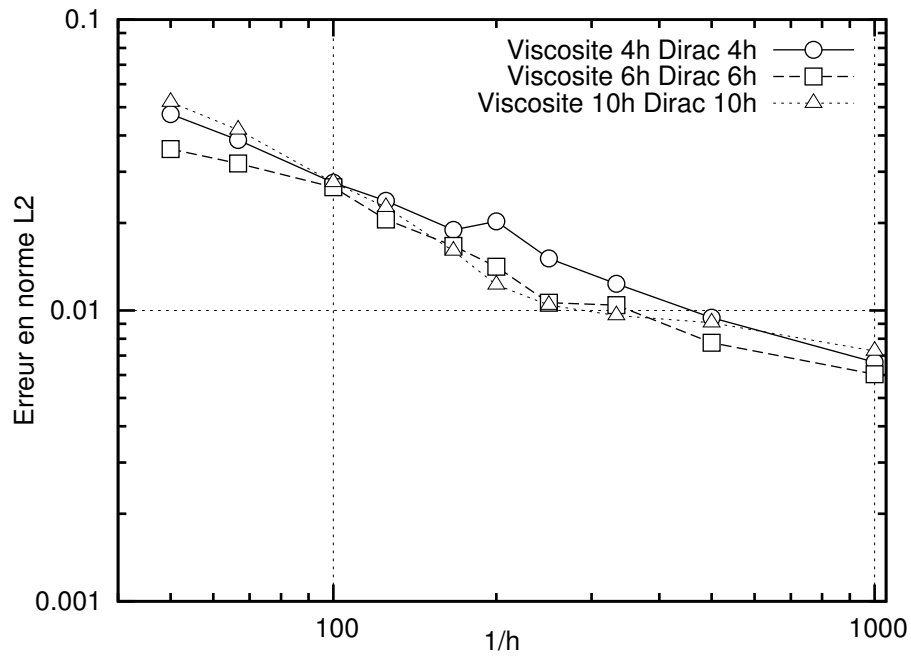


FIGURE 4.19 – Norme  $L_2$  de l'erreur sur la vitesse pour différentes demi-épaisseurs de mélange et demi-épaisseurs de Dirac, avec la méthode CSF.

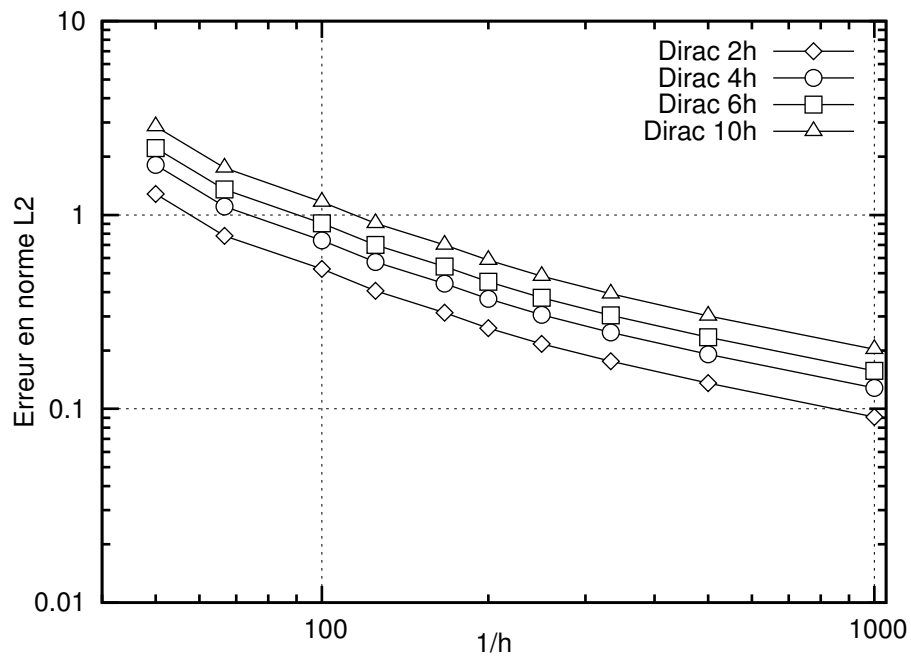


FIGURE 4.20 – Norme  $L_2$  de l'erreur sur la pression pour différentes demi-épaisseurs de Dirac et à demi-épaisseur de mélange de la viscosité de 4h, avec la méthode CSF.

### 4.5.2 La méthode CSS

Nous allons maintenant effectuer les mêmes tests en utilisant la méthode développée par Béliveau et al. [BFD98]. Pour cela le calcul de la force de tension de surface est remplacé par le calcul d'un tenseur, que nous pouvons rajouter comme un terme d'extra-contrainte à l'équation de Stokes. Cette méthode nous permet d'éviter le calcul explicite de la courbure et donc diminue l'erreur que l'on fait sur l'estimation de la force de tension de surface. Les résultats sont donnés dans les graphiques C.1 à C.4 de l'annexe C.

Les calculs de la norme  $L_2$  de l'erreur pour la vitesse sont donnés figure C.1. Les résultats montrent que l'erreur est minimale lorsque l'épaisseur du Dirac est égale ou légèrement inférieure à celle de la zone de mélange de viscosité, comme illustré sur la figure 4.21. Lorsque l'épaisseur du Dirac est plus grande, l'erreur devient plus importante. De plus, l'erreur minimale est globalement obtenue pour une épaisseur de mélange de viscosité très grande. Cela implique donc d'avoir un maillage très fin près de l'interface.

Les résultats pour la pression sont donnés figure C.2. Comme pour la méthode CSF, l'erreur n'est pas sensible à la viscosité mais seulement à l'épaisseur du Dirac (figure 4.22). Plus le Dirac est faible, plus l'erreur est faible, avec une limite inférieure à  $4h$  pour la demi-épaisseur du Dirac.

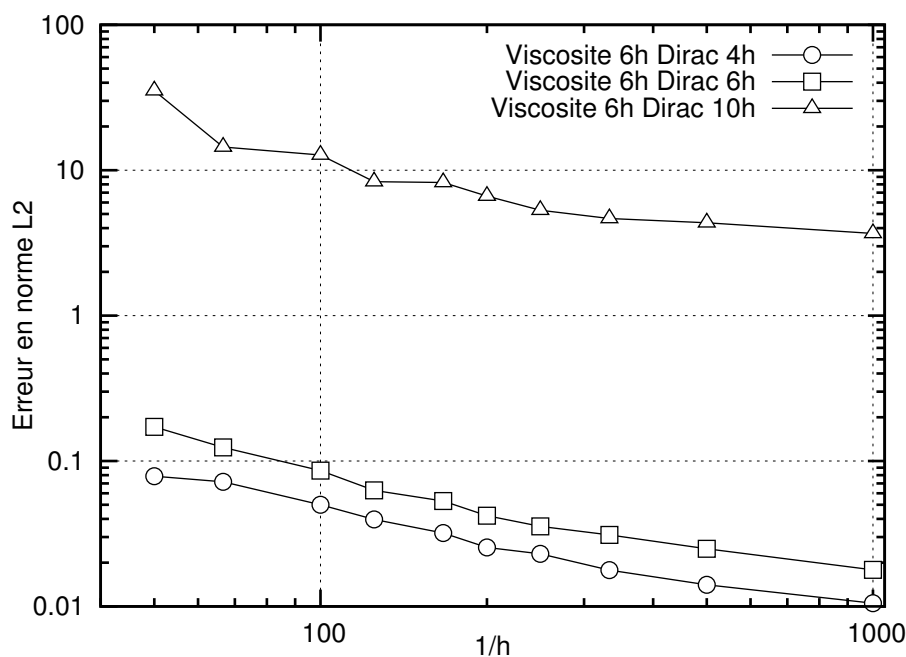
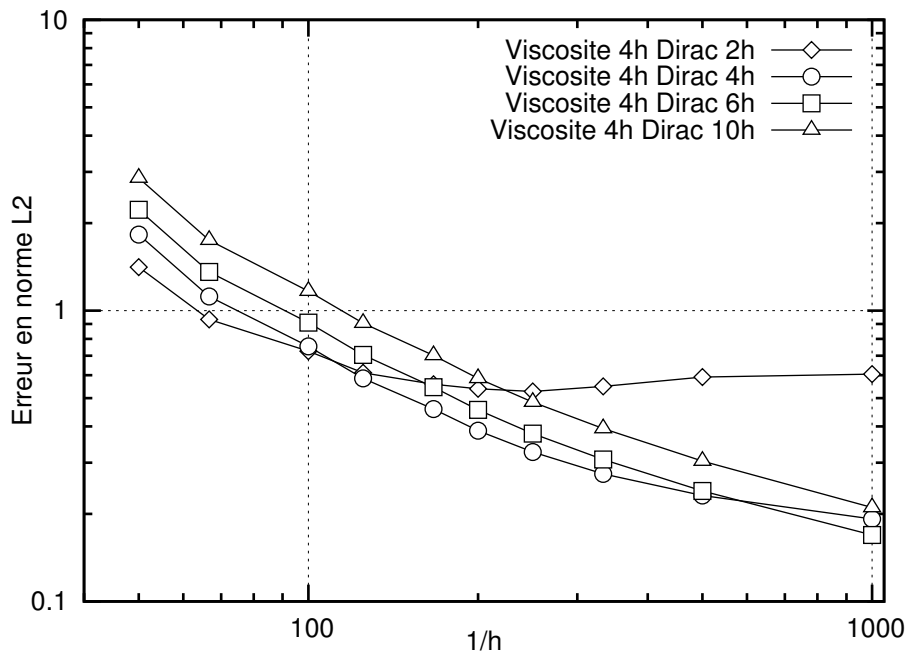


FIGURE 4.21 – Norme  $L_2$  de l'erreur sur la vitesse pour différentes épaisseurs de Dirac et pour une demi-épaisseur de mélange de la viscosité de  $6h$ , avec la méthode CSS.

En ce qui concerne l'erreur maximale (figure C.3 et C.4), les conclusions sont différentes de la méthode CSF. En effet, l'erreur varie peu avec la taille de maille, et peut même augmenter dans certains cas lorsque la taille de maille diminue. De même, pour la pression, l'erreur augmente lorsque la taille de maille diminue. Ce problème est probablement dû à des difficultés de stabilisation que nous avons rencontré lors de nos calculs, et que nous n'avons pu éviter.

Dufour [Duf99] a observé, lui aussi, que l'amplitude des oscillations ne dépend ni de



**FIGURE 4.22** – Norme  $L_2$  de l'erreur sur la pression pour différentes demi-épaisseurs de Dirac et à demi-épaisseur de mélange de la viscosité de  $4h$ , avec la méthode CSS.

la taille de maille ni de l'épaisseur de la zone de transition. De plus, il précise que cette méthode est efficace dans les cas instationnaires et que la pression se stabilise au bout de quelques pas de temps. Nous n'avons pas eu le temps de tester plus profondément cette hypothèse.

## 4.6 Conclusion

Ce chapitre nous permet d'introduire les phénomènes de tension de surface. Nous avons présenté une recherche bibliographique sur les méthodes de modélisation des interfaces en mouvement nécessaires pour représenter les interfaces entre deux fluides non miscibles dans le cas des méthodes numériques de type eulériennes.

Nous avons exposé deux méthodes permettant de modéliser les phénomènes capillaires, en prenant en compte ces forces surfaciques sur des interfaces diffuses. Elles consistent à transformer ces forces de surface en des forces réparties sur un volume de part et d'autre de l'interface.

Nous avons ensuite exposé la manière dont nous utilisons ces méthodes en donnant, pour chacune d'entre elles, l'algorithme d'une simulation d'écoulement avec prise en compte de la tension de surface. La méthode CSF consiste à calculer la normale et la courbure à partir de la fonction Level Set et de calculer le Dirac par l'expression analytique de la dérivée d'une loi de mélange d'un champ valant 1 dans une phase et 0 dans l'autre. La force de tension de surface est calculée en utilisant ces différentes grandeurs et est introduite en second membre de la formulation. La méthode CSS remplace le calcul de la courbure par la prise en compte dans la formulation d'un tenseur utilisant seulement la normale

et le gradient de la loi de mélange. Sans le calcul de la courbure, une partie des erreurs numériques est éliminée. Cependant, la stabilisation de cette méthode n'a pas été clarifiée lors d'une première étude dans cette thèse et les travaux se sont poursuivis par le travail d'une doctorante au laboratoire [FHC10] sur une autre application.

Nous avons finalement donné les résultats d'une étude de validation et de sensibilité aux paramètres numériques pour chacune de ces deux méthodes. Cette étude nous a permis de donner les valeurs des paramètres principaux à utiliser pour mettre en place les simulations, à savoir l'épaisseur de la zone de mélange de la viscosité et l'épaisseur du Dirac lissé permettant d'étaler en volume la force surfacique de tension de surface.

Nous avons également montré qu'en l'état actuel de nos formulations, l'utilisation de la méthode CSS est à éviter. En effet, les erreurs maximales observées ne sont pas négligeables et perturbent fortement les écoulements.

Il existe d'autres méthodes qui n'ont pas été exposées dans ce travail et qui permettent de prendre en compte des sauts au niveau des interfaces, comme la méthode Ghost-Fluid par exemple. Il serait intéressant d'en étudier les possibilités car elle permettrait probablement de réduire les erreurs dues aux mélanges des différentes grandeurs physiques autour des interfaces et à l'utilisation d'un Dirac lissé pour la prise en compte des forces de tension de surface.

Un travail sur la stabilisation d'une formulation avec un terme d'extra-contrainte est mené au laboratoire et il serait intéressant de reprendre la méthode CSS avec ce type de formulation stabilisée afin de vérifier si la stabilisation est bien à l'origine des erreurs observées et si la méthode donne de meilleurs résultats que la méthode CSF.



# Chapitre 5

## Angle de contact et déplacement de la ligne triple

Cette partie traite des phénomènes qui apparaissent lorsque une phase solide vient s'ajouter aux deux phases fluides. Nous commençons par introduire le phénomène de mouillage. Nous faisons une étude bibliographique sur sa prise en compte numérique avec l'angle de contact et le déplacement de la ligne triple. Nous présentons ensuite les méthodes numériques que nous avons implémentés, pour finir par une validation de ces méthodes.

### 5.1 Bibliographie

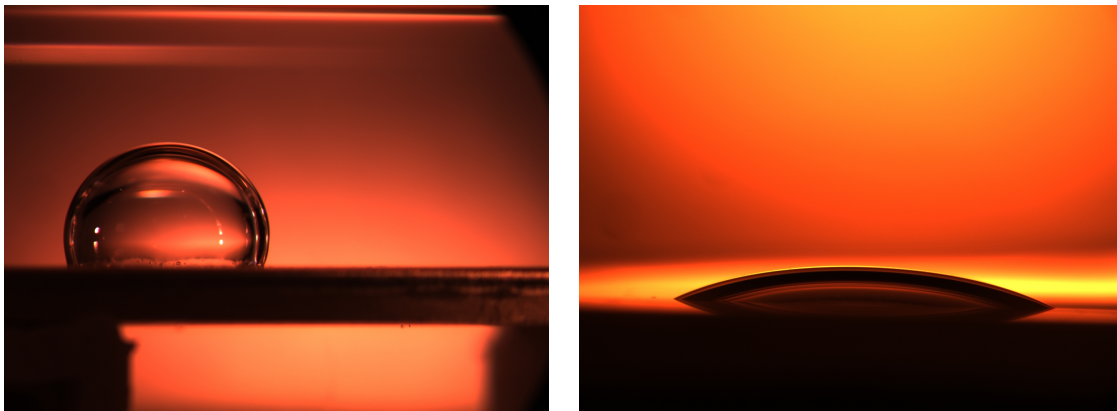
#### 5.1.1 Introduction au mouillage

##### 5.1.1.1 Le mouillage

Lorsque l'on place une goutte de liquide sur une surface solide, on se trouve en présence de trois phases. Il existe donc trois interfaces : l'interface fluide-solide, l'interface fluide-gaz et l'interface solide-gaz. Au niveau de la ligne de contact, qui est la ligne séparant les trois phases, nous devons tenir compte des énergies de surface de chacune des phases. Nous définissons donc un paramètre d'étalement  $S_e$  dépendant de ces énergies de surface :

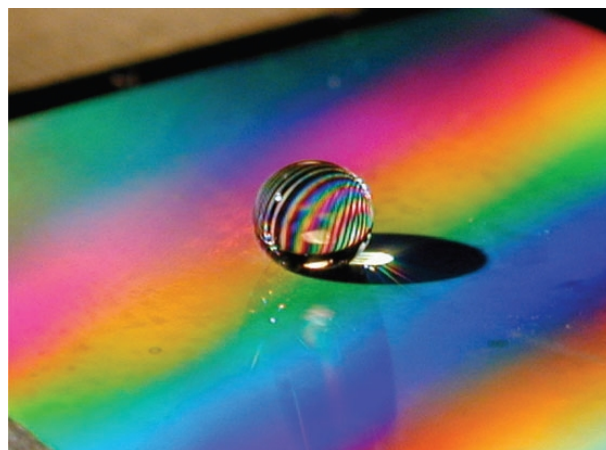
$$S_e = \gamma_{sg} - \gamma_{sl} - \gamma_{lg} \quad (5.1)$$

où les indices  $s$ ,  $l$  et  $g$  renvoient respectivement aux phases solide, liquide et gaz. Lorsque ce paramètre d'étalement est positif, l'énergie superficielle de l'interface solide-gaz est plus faible que l'énergie des deux autres interfaces (liquide-solide et liquide-gaz). Le fluide va donc s'étaler sur toute la surface pour diminuer l'énergie totale du système. On est dans le cas d'un mouillage total. En revanche, si le paramètre d'étalement  $S_e$  est négatif, on est dans un cas de mouillage partiel (figures 5.1(a) et 5.1(b)) et une goutte se forme. Il faut cependant préciser que de manière générale, il est énergétiquement peu intéressant de créer deux interfaces, ce qui fait que la situation de mouillage total se rencontre beaucoup moins fréquemment que la situation de mouillage partiel. Il en est de même pour le mouillage nul, c'est-à-dire que l'angle de contact est très proche de  $180^\circ$ , situation que l'on peut retrouver sur les matériaux dits super-hydrophobes des surfaces texturées particulières (figure 5.2).



(a) Goutte d'eau immergée dans de l'huile et posée sur une plaque de cuivre. (b) Goutte d'eau immergée dans de l'huile et posée sur une plaque de verre.

**FIGURE 5.1** – *Illustration du mouillage partiel et effet du substrat. Auteur : Guro Aspenes, SINTEF Petroleum Research, Source : Research at SINTEF Petroleum Research, Bergen, Norway. [http://en.wikipedia.org/wiki/File:Water\\_droplet\\_in\\_oil\\_on\\_brass\\_surface.JPG](http://en.wikipedia.org/wiki/File:Water_droplet_in_oil_on_brass_surface.JPG) et [http://en.wikipedia.org/wiki/File:Water\\_droplet\\_in\\_oil\\_on\\_glass\\_surface.JPG](http://en.wikipedia.org/wiki/File:Water_droplet_in_oil_on_glass_surface.JPG), accès le 7 décembre 2010. Fichiers sous licence Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.*



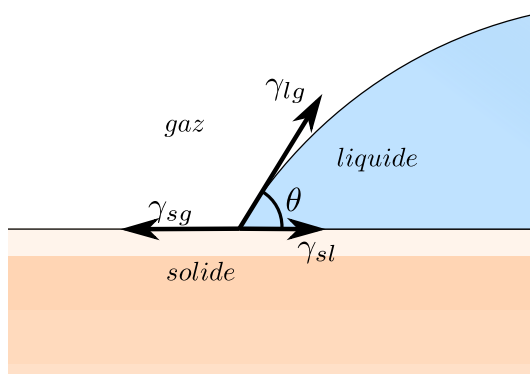
**FIGURE 5.2** – *Goutte sur un réseau régulier de plots micrométriques qui rend la surface superhydrophobe. L'angle de contact de la goutte est de  $160^\circ$  [Qué08].*

Nous allons donc nous concentrer sur le mouillage partiel. Dans ce cas, une goutte (ou une bulle) se forme à la surface du solide. Il est évident que l'interface entre le liquide et l'air, au niveau de la ligne de contact, va faire un angle avec la surface solide. Selon la valeur de cet angle, la courbure locale au niveau de la ligne de contact va être différente, ce qui va influencer sur la valeur de la différence de pression de part et d'autre de l'interface et ainsi modifier la dynamique de l'écoulement [DV79]. C'est, par exemple, la valeur de cet angle de contact qui va modifier la hauteur de remontée capillaire dans la cas de l'expérience du tube de Jurin. Il est donc important de comprendre pourquoi cet angle se forme.

Il semble évident que les tensions interfaciales des trois phases vont intervenir dans la valeur de l'angle de contact  $\theta$ . Ce dernier peut être déterminé par la relation de Young :

$$\cos \theta = \frac{\gamma_{sg} - \gamma_{sl}}{\gamma_{lg}} \quad (5.2)$$

Cette relation est obtenue en équilibrant les composantes tangentielles à la surface du solide des forces capillaires entre chacune des phases. À l'équilibre, il faut également que les composantes normales à la surface du solide s'annulent mutuellement. On a donc une force de traction du solide au niveau de la ligne de contact. La déformation qu'elle induit est en général négligeable pour un solide. Cependant, si on est dans le cas d'une goutte de fluide posée sur un autre fluide, la déformation n'est plus négligeable et on obtient une lentille plutôt qu'une goutte (figure 5.4).



**FIGURE 5.3** – Représentation des forces capillaires agissant sur la ligne de contact. Les forces par unité de longueur sont les tensions interfaciales entre chacun des couples de phases (inspiré de [DGBWQ02]).

### 5.1.1.2 La dynamique du mouillage

#### L'hystérésis de l'angle de contact

Comme il est expliqué précédemment, pour chaque ensemble de deux phases fluides posées sur une phase solide, nous pouvons calculer un angle de contact théorique. Cependant, une surface possède des défauts chimiques et une certaine rugosité. L'angle de contact est très dépendant de l'état de surface du support. Il n'y a donc plus une valeur unique de l'angle de contact mais plutôt une plage de valeurs. Par exemple [Qué03], si nous posons

une goutte sur une surface solide et que nous lui ajoutons du liquide, son volume va varier mais la ligne de contact va rester fixée sur le solide. L'angle de contact va donc augmenter, jusqu'à une certaine valeur  $\theta_a$ , à partir de laquelle la ligne de contact va se déplacer. Cet angle est appelé *angle d'avancée*. De même, si on retire du fluide de la goutte, l'angle de contact va diminuer jusqu'à l'*angle de reculée*  $\theta_r$ . C'est ce que l'on appelle l'*hystérésis* de l'angle de contact.

C'est l'existence de cette hystérésis qui explique qu'une goutte puisse rester fixe sur un plan incliné (figure 5.5). En effet, soumise à la gravité, elle devrait se déplacer sur la paroi. En réalité, la goutte est déformée, ce qui modifie les angles de contact tout le long de la ligne de contact. Tant que ces angles gardent des valeurs comprises entre les angles d'avancée et de reculée, la goutte ne se déplace pas sur le solide. D'après [Qué03], il n'existe pas aujourd'hui de théorie complète qui permette de prédire, pour une surface réelle donnée, quelle sera l'hystérésis que l'on y observera.

### L'angle de contact dynamique

Lorsque la variation de l'angle de contact devient plus grande que l'hystérésis, la ligne de contact est mise en mouvement. L'angle dynamique formé alors par l'interface  $\theta_d$  est lié à la vitesse  $U$  de la ligne de contact. Une relation simple [DV79] permet de calculer l'angle en fonction de la vitesse :

$$\theta_d - \theta_s = H(U) \quad (5.3)$$

où  $\theta_s$  est l'angle de contact statique et  $H$  est une fonction de la vitesse déterminée expérimentalement. Dans [HLW04], les auteurs utilisent la relation suivante, obtenue par la littérature :

$$\theta_d - \theta_s = C_f U \quad (5.4)$$

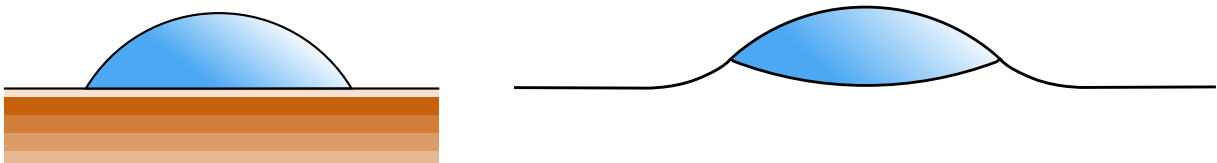
où  $C_f$  est un paramètre de friction dépendant de paramètres moléculaires du système.

Plusieurs relations entre la vitesse de la ligne de contact et l'angle de contact ont été données dans la littérature. Les auteurs de [JOS79] proposent de lier l'angle de contact dynamique  $\theta_d$  au nombre capillaire  $Ca$  et à l'angle statique  $\theta_s$  par la relation expérimentale suivante :

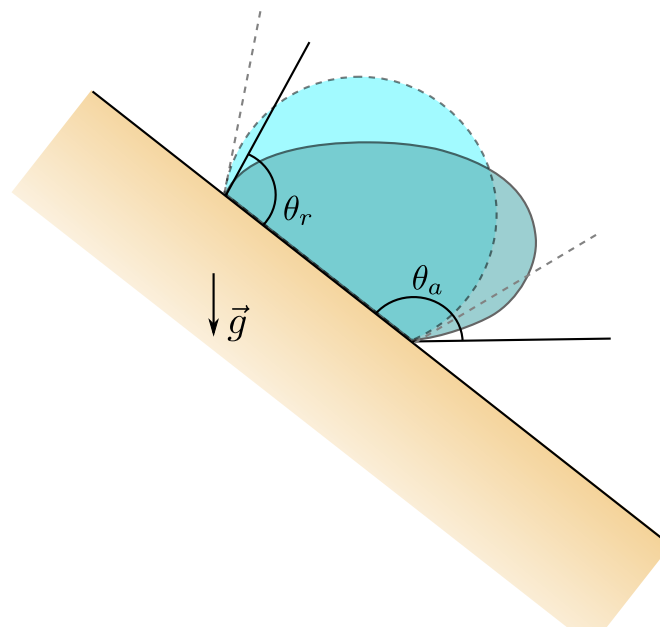
$$\frac{\cos \theta_s - \cos \theta_d}{\cos \theta_s + 1} = \tanh(4.96 Ca^{0.702}) \quad (5.5)$$

Xiao et al. [XYP06] expriment l'angle de contact sous la forme suivante :

$$\cos \theta_d = \cos \theta_s (1 - e^{-\gamma t / \eta M}) \quad (5.6)$$



**FIGURE 5.4** – À gauche, goutte posée sur un substrat solide (la déformation du solide due à la composante verticale de force de tension de surface est négligeable). À droite, goutte posée sur un autre liquide (la composante verticale de la force de tension de surface va déformer la surface du substrat liquide).



**FIGURE 5.5** – Goutte posée sur un plan incliné. Sans gravité, la goutte serait à l'équilibre (ce qui est représenté par la ligne en tirets). La gravité va provoquer la déformation de la goutte (en trait plein). La ligne triple restera fixe tant que l'angle de l'interface n'atteindra pas les angles d'avancée  $\theta_a$  et de reculée  $\theta_r$ .

où  $\eta$  est la viscosité dynamique et  $M$  une constante empirique dépendant du couple solide-fluide.

### Les conditions limites

En général, lorsque l'on modélise un écoulement, on impose une condition de non-glissement à la surface du solide. Cependant, l'imposition d'une telle condition aux limites empêchera le déplacement de la ligne de contact, puisque le fluide au contact de la surface solide a une vitesse nulle. On se trouve alors en présence d'une singularité au niveau de la ligne de contact.

En fait, la nature des conditions aux limites à appliquer aux écoulements est un point débattu au XIX<sup>e</sup> [Gol69] et de nombreux scientifiques très importants dans le monde de l'hydrodynamique ont donné leur avis sur ce point. Bien que les expériences ont été en faveur de la condition de non-glissement, qui est aujourd'hui généralement acceptée, les applications en micro-fluidiques, qui deviennent de plus en plus importantes, nécessitent que l'on s'attarde un peu plus sur ce problème de glissement au niveau de la ligne de contact. De nombreux auteurs ont observés expérimentalement l'existence de phénomènes de glissement comme par exemple [NCW03] qui montre l'existence d'un phénomène de glissement, pour les fluides newtoniens, qui dépend de la viscosité et du taux de cisaillement, et d'autres que l'on retrouve cités dans [LBS07, NEB<sup>+</sup>05].

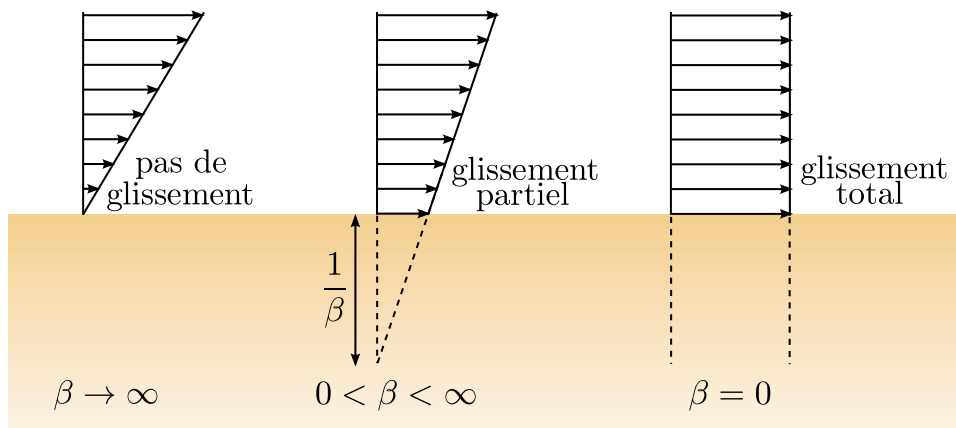
Dans la littérature relevée par Dussan [DV79], la plupart des auteurs suppriment cette singularité en modifiant la condition de non-glissement. Loin de la ligne de contact, une condition de non-glissement est imposée, tandis qu'au niveau de la ligne de contact, elle est transformée en une condition du type glissement de Navier, introduite par Navier en

1823 [Nav22] :

$$v_\tau = \frac{1}{\beta} \frac{\partial v_\tau}{\partial n} \quad (5.7)$$

où  $v_\tau$  est la vitesse tangentielle à la surface solide et  $\beta$  un coefficient de glissement qui a la dimension de l'inverse d'une longueur (figure 5.6).

Certains auteurs proposent une explication physique à l'utilisation de cette condition aux limites. Au niveau de l'interface gaz-liquide, lorsque les molécules de liquide entrent en contact avec la surface solide, elles ont besoin d'un certain temps  $t_m$  pendant lequel elles ne subiront pas d'interaction avec la surface solide. Au bout de ce temps  $t_m$ , elles se sont orientées et s'attachent à la paroi. A partir de ce moment, elles sont en condition de non-glissement. Ainsi, la condition de non-glissement sera valable à partir d'une distance  $l$  à la ligne de contact définie par  $l = Ut_m$  [DV79].



**FIGURE 5.6** – Schématisation de la condition de glissement de Navier, en comparaison avec le glissement total et le non-glissement (inspiré de [LBS07]).

Les auteurs de [LBS07] donnent une bonne revue de nombreuses expériences visant à mesurer des longueurs de glissement, dont le coefficient de glissement  $\beta$  est directement dépendant. Ils introduisent également rapidement la simulation numérique par dynamique moléculaire qui permet d'obtenir des informations sur les paramètres intervenant dans le mouvement de la ligne triple.

Le coefficient de glissement dépend de nombreux paramètres et les mécanismes physiques intervenant dans le glissement ne sont aujourd'hui toujours pas entièrement déterminés. Nous pouvons toutefois donner certains de ces paramètres ([LBS07, NEB<sup>+</sup>05]) qui sont les propriétés de mouillage du fluide sur la surface et l'angle de contact, les propriétés thermodynamiques et chimiques de la surface (présence d'espèces adsorbées, homogénéité chimique de la surface) et du fluide (gaz dissous, présence de charges électrostatiques dans le fluide ou sur la surface, polarité des molécules du fluide), la stabilité des micro-gouttelettes et des micro-bulles sur la surface (la super-hydrophobicité peut être due à la capacité des milieux très rugueux à capturer des couches de gaz sous la goutte de fluide) et surtout à la rugosité de la surface.

La rugosité de la surface est importante car elle intervient dans de nombreux paramètres dont dépend le glissement. En effet, comme expliquée plus tôt, la rugosité permet de piéger des micro-bulles dans les cavités de la surface, ce qui influence à la fois la mouillabilité du fluide (dont le coefficient de glissement peut dépendre) et le coefficient de glissement lui-même. La rugosité joue également sur les écoulements locaux au niveau de la surface. Elle provoque une dissipation de l'énergie mécanique, ce qui modifie localement la viscosité du fluide. Elle modifie également le taux de cisaillement local, ce qui influence le glissement puisque la condition de Navier en dépend. Les auteurs de [LBS07] et de [NEB<sup>+</sup>05] citent ces phénomènes et donnent de nombreuses références pour chacun d'entre eux.

Les auteurs de [NEB<sup>+</sup>05] définissent deux types de glissement, un glissement réel, à l'échelle moléculaire, où les molécules du fluide glissent sur les molécules du solide et un glissement apparent, où une couche de fluide est accrochée à la surface du solide et le fluide glisse sur cette couche qui peut avoir une épaisseur d'échelle moléculaire.

En ce qui concerne le glissement réel, plusieurs effets interviendraient. Si la friction visqueuse entre les molécules des fluides est plus importante que celle entre les molécules de fluide et de solide, un glissement apparaît. De plus, si la dimension des molécules est de l'ordre de la rugosité, il n'y a pas de glissement, alors que si elles sont plus petites ou plus grosses, un glissement apparaît.

En ce qui concerne le glissement apparent, la formation de la couche de fluide pourrait être la conséquence de plusieurs phénomènes. Lorsque le taux de cisaillement devient localement très important (par exemple à cause de la rugosité), de la turbulence pourrait apparaître, ce qui modifierait la viscosité de la couche et permettrait un glissement entre les deux fluides. De plus, le contact entre les molécules du fluide et la surface du solide induirait un arrangement des molécules, ce qui faciliterait le glissement des couches de molécules entre elles. Enfin, les forts taux de cisaillement près de la surface pourraient entraîner un phénomène de cavitation des gaz dissous dans le fluide, ce qui produirait des micro-bulles qui adhèreraient à la surface et formeraient une couche sur laquelle le fluide peut glisser.

Cela montre à quel point la détermination de ce coefficient de glissement  $\beta$  peut être difficile, puisque la physique intervenant dans le glissement peut être différente selon la configuration et l'échelle du problème. De plus, on peut citer [EPL90] qui ajoute une dépendance du coefficient de glissement à la courbure de la surface solide.

### 5.1.2 La prise en compte numérique de l'angle de contact

La prise en compte de l'angle de contact dans les modèles numériques n'est pas simple. Tout d'abord parce que cet angle dépend de nombreux paramètres, les premiers étant les matériaux qui composent les trois phases et l'état de surface du solide. Ainsi, l'angle de contact est une condition aux limites de la simulation puisque les phénomènes qu'il faudrait prendre en compte dans les modèles de prédiction de l'angle de contact ont une échelle très inférieure à celle que l'on étudie généralement. L'utilisation de méthodes SPH (Smooth Particle Hydrodynamics) [DD10] ou de dynamique moléculaires [HHB09] permettent de calculer ces angles de contact. Cependant, l'échelle étudiée est celle de l'atome, ce qui rend impossible l'utilisation de ces méthodes pour des écoulements à

l'échelle nanométrique ou supérieure.

### 5.1.2.1 L'angle statique

Comme nous l'avons vu en 5.1.1.1 et 5.1.1.2, l'angle de contact est déterminé à la fois par les propriétés interfaciales de chaque couple de phase et par l'état de surface (en termes de rugosité et de chimie) du substrat solide, s'il est présent dans le système. L'une des méthodes utilisées pour tenir compte de cet angle de contact est de l'imposer au niveau de la ligne de contact. C'est ce qui est fait dans le logiciel Fluent [Flu06] où l'orientation de la normale est imposée dans la première couche d'éléments touchant la paroi, en utilisant :

$$\vec{n} = \vec{n}_w \cos \theta + \vec{t}_w \sin \theta \quad (5.8)$$

où  $\vec{n}_w$  et  $\vec{t}_w$  sont respectivement la normale et la tangente à la surface solide. Ainsi, la normale calculée tient directement compte de l'angle de contact et la courbure est correctement calculée. C'est également le cas dans [AB08a, AB08b, BKZ92, SM09]. Pour ces premiers articles cités, c'est une méthode VOF qui est utilisée. C'est ce qui rend simple l'imposition de l'angle de contact. En effet, dans cette méthode, l'interface est reconstruite à partir du champ de pseudo-concentration, mais sa position n'est pas précisément définie et dépend du modèle de reconstruction utilisé. De plus, il n'est pas forcément nécessaire de connaître précisément l'interface pour calculer sa normale, puisque cette dernière peut être calculée directement en prenant le gradient de la fonction de pseudo-concentration.

C'est plus compliqué lorsque l'on utilise une méthode Level Set. En effet, dans ce cas, la position de l'interface est définie par la fonction distance. Ainsi, l'angle effectif de l'interface avec la paroi n'est pas forcément le même que l'angle de contact que l'on souhaite imposer. Calculer une normale en tenant compte de cet angle de contact ne permet pas de modifier directement la fonction distance localement et donc la position de l'interface.

L'une des méthodes est l'imposition de l'angle de contact directement dans l'équation de transport de la Level Set, lorsque celle-ci est d'ordre 2 [CS08, LAD07, SH05] en utilisant l'équation suivante en condition aux limites :

$$\vec{n} \cdot \nabla \alpha = \cos \theta \quad (5.9)$$

La plupart des articles traitent cependant de cas 2D et aucune explication n'est donnée en ce qui concerne le problème de l'orientation par rapport au repère global (voir en 5.2.1, p.152).

### 5.1.2.2 L'angle dynamique et l'hystérésis

Huang et al. [HLW04], en plus de la force de tension de surface agissant sur l'interface modélisée par une Level Set, ajoutent une force agissant sur la ligne de contact. Elle dépend de l'angle de contact statique et de la vitesse de la ligne de contact. Lorsque l'angle de contact atteint l'angle de contact dynamique, on est en situation d'équilibre dynamique et ainsi, cette force devient nulle. Cela permet d'imposer l'angle de contact dynamique, en le calculant à partir de la vitesse de la ligne de contact. Il ne semble pas y avoir de prise en compte d'un hystérésis de l'angle de contact statique.

Van Mourik et al. [vMVD05] testent différents modèles pour l'angle de contact dynamique avec une méthode VOF. Chen et al. [CMK09] n'expliquent pas comment ils imposent la condition aux limites en angle de contact, mais ils le calculent en fonction de la vitesse de l'interface :

$$\theta = \begin{cases} \theta_r & \text{si } v_{lc} < -v_{lc,max} \\ \theta_r + (\theta_a - \theta_r) \frac{v_{lc} + v_{lc,max}}{2v_{lc,max}} & \text{si } v_{lc} < -v_{lc,max} \\ \theta_a & \text{si } v_{lc} > v_{lc,max} \end{cases} \quad (5.10)$$

où  $v_{lc}$  et  $v_{lc,max}$  sont respectivement la vitesse de la ligne de contact et une vitesse max que la ligne de contact ne peut dépasser. Dans ce modèle,  $v_{lc,max}$  est un paramètre indéterminé du problème et il est nécessaire de faire des hypothèses sur sa valeur. Une méthode similaire est utilisée par Dupont et Legendre [DL10] sur une méthode VOF où les auteurs calculent l'angle de contact, puis en fonction de sa comparaison avec les angles d'avancée ou de reculée, vont annuler la vitesse ou la calculer en utilisant une relation entre l'angle de contact et la vitesse de la ligne de contact. Son et Hur [SH05] utilisent également un modèle similaire avec une méthode Level Set.

Saha et Mitra [SM09] comparent différents modèles d'angles de contact dynamiques sur une méthode VOF pour simuler le remplissage de canaux micro-fluidiques. Ils observent des structures différentes dans la formation des vides selon les angles de contacts et les fluides choisis. Choi et Son [CS08] font une étude similaire pour des micro-canaux utilisés dans les piles à combustible, en utilisant une méthode Level Set.

L'étude bibliographique concernant l'angle de contact dynamique n'est pas plus développée car nous n'avons pas eu le temps d'aborder ce point au niveau des développements numériques. Cependant, tous les ingrédients sont mis en place pour être capable de simuler des écoulements à angles de contact dynamiques.

### 5.1.3 Simulation numérique du déplacement de la ligne de contact

Comme expliquée dans la partie 5.1.1.2, la condition de non-glissement imposée à la paroi implique qu'une force infinie est requise pour déplacer la ligne de contact [DV79]. Plusieurs méthodes sont utilisées dans la littérature. Dans des méthodes de volumes finis [AB08a, AB08b], il est possible d'imposer une condition de non-glissement sans problème, puisque les vitesses normales sont calculées aux faces des éléments. On impose donc implicitement une longueur de glissement d'une demi-taille de maille sur les frontières ayant un contact collant. Il n'est ainsi pas nécessaire de s'occuper de l'implémentation de cette condition aux limites. Cependant, étant donné que le coefficient de glissement est directement lié à la taille de maille, le seul moyen de le contrôler est de modifier la taille de maille locale au niveau de l'interface. Cependant, la taille de maille locale nécessaire pour le calcul peut être bien plus faible que la taille de maille désirée pour donner la valeur choisie au coefficient de glissement, ce qui peut poser problème. Certains auteurs ont cependant choisi d'implémenter cette condition limite avec la méthode VOF pour l'écoulement à plusieurs phases [AZB09].

Une méthode est d'utiliser la condition de glissement de Navier [DV79] donnée par l'équation (5.7). Huang et al. [HLW04] remplacent complètement la condition de non-

glissement sur le substrat solide par cette condition de Navier et font une étude de sensibilité à ce paramètre  $\beta$  inconnu. Aucun de leurs résultats n'est comparé à une valeur analytique ou expérimentale. Les résultats sont simplement analysés de manière qualitative.

Yokoi et al. [YVHH09] utilisent une méthode couplée VOF et Level Set pour représenter l'interface dans le cas d'écoulements avec prise en compte de l'angle de contact dynamique. Ils proposent de relaxer la singularité au niveau de la ligne de contact en définissant une longueur de glissement qui leur permet de calculer la vitesse au niveau du solide. Cependant, ils précisent ensuite qu'ils n'utilisent pas la longueur de glissement puisque la méthode VOF implique que la ligne de contact va se déplacer malgré l'imposition de la condition de non-glissement.

Madasu [Mad05] applique la condition de Navier sur deux éléments autour de l'interface et une condition de non-glissement loin de l'interface. Cela lui permet de faire se déplacer la ligne de contact dans le cadre d'une formulation ALE. Gerbeau et Lelièvre [GL09] introduisent une condition aux limites de Navier généralisée, c'est-à-dire qu'un terme supplémentaire intervient, contenant le coefficient de tension de surface et l'angle de contact statique. John [Joh02] détaille la prise en compte de la condition de Navier en éléments finis sans jamais dire qu'il s'agit de la condition de Navier. Il parle simplement d'un glissement avec résistance.

Les auteurs de [RE07] ont utilisé la dynamique moléculaire pour vérifier la validité des conditions aux limites à appliquer dans le cas du déplacement de la ligne de contact. Leurs calculs montrent que la condition de Navier doit être appliquée sur les frontières loin de la ligne de contact et qu'une condition s'approchant de la condition aux limites de Navier généralisée doit être appliquée au niveau de la ligne de contact. Cela peut sembler étrange, néanmoins, il faut quand même garder à l'esprit que les simulations en dynamique moléculaire concernent plutôt les systèmes à l'échelle moléculaire et qu'à plus grande échelle, il n'est pas évident que ce type d'application de conditions aux limites soit correct.

## 5.2 Méthodes numériques implémentées

Nous présentons dans ce qui suit les méthodes numériques que nous avons implémenté concernant le problème de mouillage. Dans un premier temps, nous décrivons la méthode que nous avons mis en place pour imposer l'angle de contact. Cependant, cela ne suffit pas. Il est nécessaire que la ligne triple puisse se déplacer sur le substrat solide. Nous décrivons donc, dans un second temps, l'implémentation que nous avons faite de la condition aux limites de Navier.

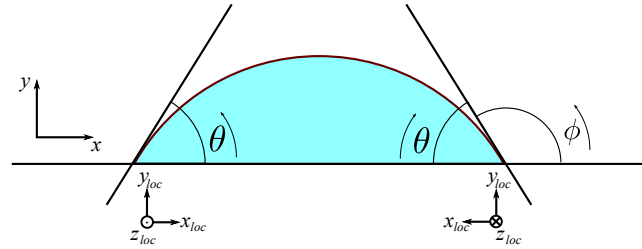
### 5.2.1 Prise en compte de l'angle de contact statique dans Cimlib

#### 5.2.1.1 Le calcul de l'angle de contact

En ce qui concerne l'imposition de l'angle de contact, nous choisissons la solution la plus simple, qui est d'imposer la direction de la normale à l'interface aux noeuds de la frontière, près de la ligne de contact. Ainsi, localement, la normale imposée ne correspond pas à la vraie normale de la Level Set. On utilise cette normale modifiée pour calculer

la force de tension de surface, qui ainsi va déplacer l'interface de telle manière que sa normale soit égale à la normale imposée. L'imposition de l'angle de contact se fait donc de manière explicite et non de manière implicite en modifiant directement la valeur de la Level Set localement. Ainsi, contrairement à la méthode VOF où l'interface calculée prenait immédiatement en compte l'angle de contact imposé, l'interface définie par la level-set a une normale réelle différente de la normale modifiée pour imposer l'angle de contact. Il faut attendre le calcul des forces de tension de surface pour déplacer la Level Set et ainsi avoir un angle avec la surface qui corresponde à l'angle imposé.

La normale que l'on va imposer sera calculée à partir de la normale à la frontière. En effet, nous connaissons l'angle entre l'interface et le substrat solide, donc l'angle entre la normale  $\vec{n}_\Gamma$  à l'interface et la normale  $\vec{n}_s$  au solide. Ainsi,  $\vec{n}_\Gamma$  au niveau du point triple sera obtenue par rotation de  $\vec{n}_s$ . L'un des problèmes à résoudre est de s'orienter par rapport au fluide. En effet, l'angle est mesuré à l'intérieur d'un des deux fluides. Dans le cas d'une bulle 2D, si on est à gauche ou à droite, la normale aura un angle  $\theta$  ou  $\pi - \theta$  dans le repère global (figure 5.7).



**FIGURE 5.7** – Schéma illustrant le problème de l'orientation pour l'imposition de l'angle de contact. Dans le repère global, l'angle de contact est donné par  $\theta$  à gauche de la bulle et par  $\phi = \pi - \theta$  à droite. On voit donc la nécessité de se placer dans le repère local  $(x_{loc}, y_{loc}, z_{loc})$ .

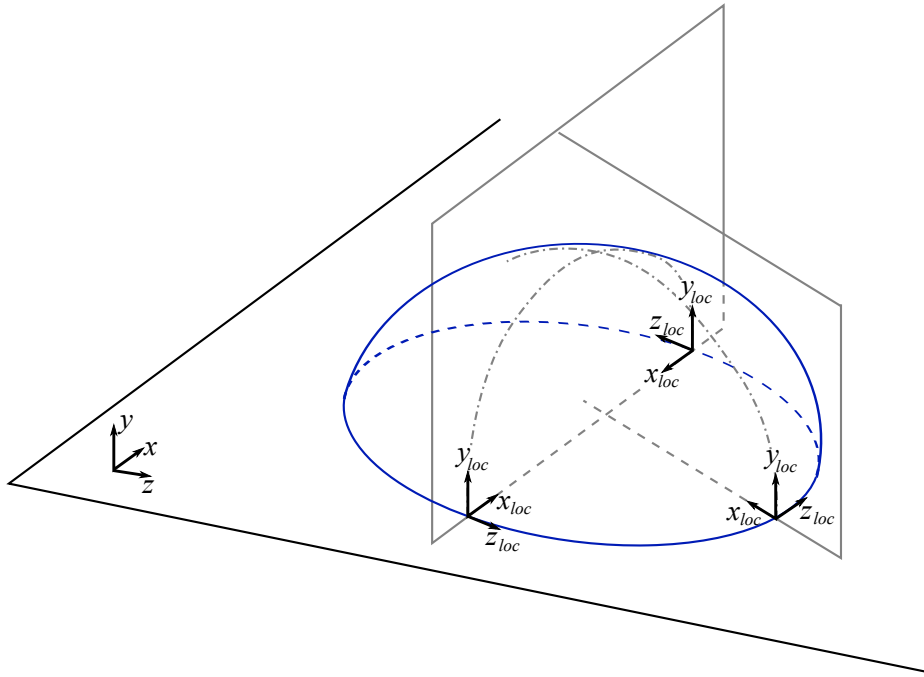
Le moyen le plus simple au niveau du code, valable à la fois en 2D et en 3D, est de se placer dans un repère local (figure 5.8). On utilisera donc des matrices de rotation pour obtenir la normale modifiée à l'interface en fonction de la normale à la surface solide. Dans un premier temps, il est nécessaire de déterminer l'axe de rotation  $\vec{\Omega}$  de la normale à la surface solide. On le calcule de la manière suivante (figure 5.9) :

$$\vec{\Omega} = \frac{\vec{n}_s \wedge \vec{n}_\Gamma}{\|\vec{n}_s \wedge \vec{n}_\Gamma\|} \quad (5.11)$$

On calcule ensuite la matrice de rotation  $R$  à partir de l'axe  $\vec{\Omega}$  et d'un angle  $\psi$  :

$$R = \begin{bmatrix} \Omega_x^2 + (1 - \Omega_x^2)c & \Omega_x\Omega_y(1 - c) - \Omega_zs & \Omega_x\Omega_z(1 - c) + \Omega_ys \\ \Omega_x\Omega_y(1 - c) + \Omega_zs & \Omega_y^2 + (1 - \Omega_y^2)c & \Omega_y\Omega_z(1 - c) - \Omega_xs \\ \Omega_x\Omega_z(1 - c) - \Omega_ys & \Omega_y\Omega_z(1 - c) + \Omega_xs & \Omega_z^2 + (1 - \Omega_z^2)c \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

avec  $c = \cos \psi$  et  $s = \sin \psi$ . Il faut bien remarquer qu'ici  $\psi$  n'est pas l'angle de contact mais l'angle de rotation. Étant donné que l'angle de contact est l'angle de la tangente à



**FIGURE 5.8** – Schéma illustrant le problème de l'orientation pour l'imposition de l'angle de contact. Le repère local  $(x_{loc}, y_{loc}, z_{loc})$  est placé en plusieurs points de la ligne de contact 3D.

l'interface par rapport à la surface solide, on a  $\psi = \pi - \theta$ . Dans le cas d'une géométrie 2D, pour faire les calculs, on va ajouter une troisième composante nulle aux vecteurs normaux aux interface. Ainsi, l'axe de rotation calculé sera toujours orienté selon  $\pm Z$ .

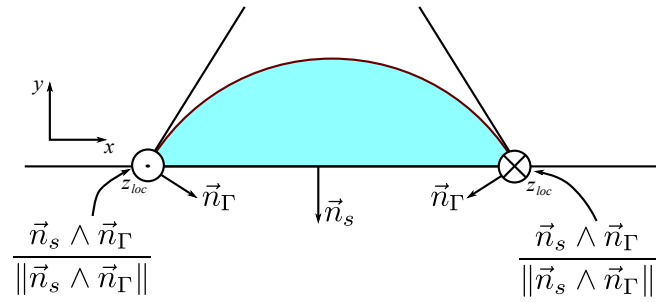
Cette méthode décrite ci-dessus nous donne un champ vectoriel correspondant à la normale à l'interface, dont la direction est localement modifiée pour correspondre à l'angle de contact imposé. Dans la suite, nous donnons l'algorithme d'un calcul avec angle de contact imposé.

### 5.2.1.2 Algorithme de calcul avec angle de contact imposé

Comme expliqué précédemment, nous possédons un champ de vecteur nodal correspondant à la normale à l'interface localement modifiée pour avoir l'angle de contact imposé. Ainsi, dans ces zones de contact, la direction du vecteur normal n'est pas la direction de la normale effective à l'interface, mais elle correspond à la direction qu'aurait le vecteur normal si l'interface respectait l'angle de contact imposé (vecteur rouge sur la figure 5.10).

Cette variation locale de la normale va entraîner une variation locale de la courbure de l'interface, puisque cette dernière est obtenue par divergence du champ de vecteur modifié. Le calcul de la force de tension de surface va donc donner un champ de force dont l'effet est de diminuer cette variation de courbure. Après résolution des équations de Stokes contenant les forces de tension de surface, le champ de vitesse obtenu va déplacer l'interface près de la ligne de contact de manière à ce que son angle de contact s'approche de l'angle de contact imposé.

Ainsi, lorsque l'angle de contact n'est pas respecté, une force va déplacer l'interface



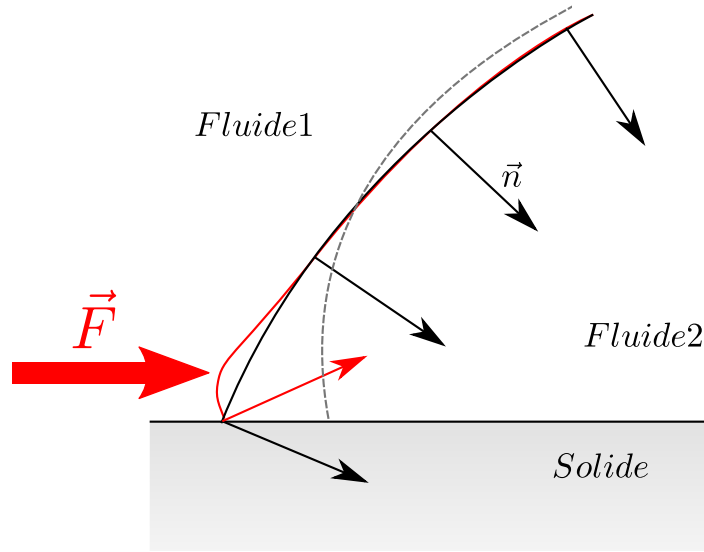
**FIGURE 5.9** – Schéma illustrant le calcul de l'axe de rotation utilisé pour calculer l'angle de contact. C'est la normale à la surface du solide  $\vec{n}_s$ , à laquelle la rotation est appliquée, qui donnera la normale modifiée à l'interface.

pour que l'écart à cet angle diminue. Lorsque cet écart devient suffisamment faible pour que la force qu'il provoque soit quasiment nulle, l'interface ne se déplace plus et l'angle de contact est respecté. Cette méthode est donc une méthode itérative, ce qui implique de contrôler le pas de temps, de manière à ce que la force provoquée par l'écart entre l'angle réel et l'angle imposé ne donne pas des déplacements de l'interface trop importants.

L'algorithme d'utilisation de cette méthode est le suivant :

1. Calcul du champ de normales  $\vec{n}_s$  à la frontière ;
2. Calcul du champ de normales  $\vec{n}_\Gamma$  à l'interface à partir de la fonction Level Set au temps  $t$  ;
3. Modification de la normale  $\vec{n}_\Gamma$  en fonction de l'angle de contact  $\theta$  et de  $\vec{n}_s$  sur les nœuds frontières ;
4. Calcul du champ de courbure  $\kappa$  de l'interface à partir du champ de normales  $\vec{n}_\Gamma$  modifié ;
5. Calcul du Dirac lissé  $\delta_l$  en utilisant l'équation (4.30) ;
6. Calcul de la force de tension de surface en utilisant l'équation (4.14) ;
7. Calcul du champ de viscosité  $\eta$  en utilisant la Level Set ;
8. Résolution des équations de Stokes en utilisant le champ de viscosité  $\eta$  calculé, en introduisant la force de tension de surface en second membre, et en imposant les conditions aux limites adéquates pour que l'interface puisse se déplacer sur la frontière ;
9. Déplacement de l'interface pour obtenir l'interface en  $t + dt$  ;
10. Retour en 2.

L'implémentation de cette méthode est validée en 5.3.1 pour les cas 2D et 3D, pour plusieurs angles de contact (c'est-à-dire pour un fluide à forte mouillabilité avec  $\theta = 30^\circ$  et pour un fluide à faible mouillabilité avec  $\theta = 120^\circ$ ).



**FIGURE 5.10** – Interface entre deux fluides, avec un angle de contact inférieur à  $90^\circ$  avec la surface solide. L'angle de contact imposé est supérieur à  $90^\circ$ . La normale à l'interface est représentée par les vecteurs. Le vecteur rouge correspond à la normale modifiée pour tenir compte de l'angle de contact. L'interface rouge correspond à l'interface équivalente à la courbure correspondant au champ de vecteurs modifié localement. Cela fait apparaître une force de tension de surface (flèche rouge épaisse) qui va déplacer l'interface pour donner celle en tirets gris.

## 5.2.2 Implémentation de la condition de Navier

Afin d'introduire la condition aux limites de Navier dans la formulation éléments finis, nous allons revenir à l'équation d'équilibre mécanique suivante :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \sigma = \vec{F} \\ \nabla \cdot \vec{v} = 0 \end{cases} \quad (5.13)$$

où le tenseur des contraintes s'écrit  $\sigma = -p\mathbb{I} + 2\eta\epsilon(\vec{v})$  et  $\epsilon(\vec{v}) = \frac{1}{2}(\nabla\vec{v} + {}^T\nabla\vec{v})$  et  $\vec{F}$  est la somme des forces volumiques. Des conditions aux limites de type Dirichlet et Neumann s'écrivent :

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \vec{g} & \text{sur } \Gamma_D \\ \sigma \cdot \vec{n} &= \vec{h} & \text{sur } \Gamma_N \end{aligned} \quad (5.14)$$

où  $\Gamma_D$  et  $\Gamma_N$  sont respectivement la frontière sur laquelle la condition aux limites imposée est de type Dirichlet et la frontière sur laquelle elle est de type Neumann.

En écrivant la formulation faible de ce problème et en intégrant par partie, sans supprimer les termes de surface, nous obtenons :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} 2\eta\epsilon(\vec{v}) : \epsilon(\vec{w}) \, d\Omega - \int_{\Omega} p\nabla \cdot \vec{w} \, d\Omega = \int_{\Omega} \vec{F} \cdot \vec{w} \, d\Omega + \int_{\Gamma} (\sigma \cdot \vec{n}) \cdot \vec{w} \, d\Gamma \\ \int_{\Omega} q\nabla \cdot \vec{v} \, d\Omega = 0 \end{cases} \quad (5.15)$$

La contrainte normale, dans le dernier terme du membre de droite de la première équation du système (5.15) se développe de la façon suivante :

$$\sigma \cdot \vec{n} = [(\sigma \cdot \vec{n}) \cdot \vec{n}] \vec{n} + [(\sigma \cdot \vec{n}) \cdot \vec{t}] \vec{t} \quad (5.16)$$

La condition aux limites de Navier (5.7) est une condition aux limites de type Robin, ou encore, une combinaison des conditions aux limites de Dirichlet et de Neumann. Elle permet d'imposer un glissement avec un frottement qui dépend de la valeur de  $\beta$ .

La condition de Navier donnée par l'équation (5.7) peut se réécrire sous la forme suivante :

$$\beta(\vec{v} \cdot \vec{t}) \vec{t} = -[(\sigma \cdot \vec{n}) \cdot \vec{t}] \cdot \vec{t} \quad (5.17)$$

En la réintroduisant dans l'équation (5.16), nous obtenons finalement :

$$\sigma \cdot \vec{n} = [(\sigma \cdot \vec{n}) \cdot \vec{n}] \vec{n} - \beta(\vec{v} \cdot \vec{t}) \vec{t} \quad (5.18)$$

Il est aisé de déterminer le vecteur tangent  $\vec{t}$  en 2D. Cependant, cela l'est beaucoup moins en 3D. Afin d'éviter d'avoir à déterminer ce vecteur, nous allons écrire :

$$(\vec{v} \cdot \vec{t}) \vec{t} = \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{n}) \vec{n} \quad (5.19)$$

De plus, il faut ajouter à la condition de Navier, qui nous donne le glissement à la paroi, la condition de non pénétration. Celle-ci est donnée par :

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = 0 \quad (5.20)$$

Étant donné que nous avons une condition aux limites sur la vitesse normale, nous ne pouvons appliquer de condition aux limites sur la composante normale de la contrainte normale. Nous pourrions donc supprimer le terme  $[(\sigma \cdot \vec{n}) \cdot \vec{n}] \vec{n}$  de la formulation faible.

La prise en compte de la condition de non pénétration pourrait se faire de manière forte, en imposant directement la composante normale de la vitesse. Cependant, dans le cas où la normale à la frontière n'est pas colinéaire à l'un des axes du repère, l'imposition de la condition aux limites n'est plus triviale. Une méthode simple est d'utiliser une méthode de pénalisation pour imposer notre condition de Dirichlet [ESG82, Joh02]. Cela nous évite d'avoir à opérer des rotation à nos matrices locales pour l'imposition de notre condition. Ainsi, l'application de cette pénalisation et l'utilisation des équations (5.18) et (5.19) dans le second membre surfacique de (5.15), nous obtenons :

$$\int_{\Gamma_{\text{slip}}} (\sigma \cdot \vec{n}) \cdot \vec{w} \, d\Gamma = \int_{\Gamma_{\text{slip}}} A_p [(\vec{v} \cdot \vec{n})] \vec{n} \cdot \vec{w} \, d\Gamma - \int_{\Gamma_{\text{slip}}} \beta (\vec{v} - [(\vec{v} \cdot \vec{n})] \vec{n}) \cdot \vec{w} \, d\Gamma \quad (5.21)$$

où  $A_p$  est le coefficient de pénalisation qui permet d'imposer la condition de non pénétration. Lorsque  $A_p \rightarrow \infty$ , le dernier terme de (5.21) donne la condition (5.20), puisque la composante normale de la contrainte normale doit rester finie sur la frontière.

En supposant que nous n'avons que des conditions de Dirichlet et de Navier dans notre problème, la première équation du système (5.15) s'écrit finalement :

$$\int_{\Omega} 2\eta\epsilon(\vec{v}) : \epsilon(\vec{w}) \, d\Omega - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \vec{w} \, d\Omega + \int_{\Gamma_{\text{slip}}} \beta \vec{v} \cdot \vec{w} \, d\Gamma - \int_{\Gamma_{\text{slip}}} (A_p + \beta) [(\vec{v} \cdot \vec{n})] \vec{n} \cdot \vec{w} \, d\Gamma = \int_{\Omega} \vec{F} \cdot \vec{w} \, d\Omega \quad (5.22)$$

Dans la pratique, nous faisons l'évaluation de la condition aux limites sur les éléments de la frontière. Nous ajoutons ensuite cette contribution aux nœuds correspondants de la matrice globale, avant la résolution du système linéaire.

## 5.3 Validations numériques

Dans cette partie, nous validons les deux méthodes décrites précédemment. Nous commençons par valider la prise en compte de l'angle de contact. Pour autoriser le déplacement de la ligne triple, nous imposons, sur la frontière correspondante, une condition de glissement total.

Nous validons ensuite la condition de Navier sur un écoulement monophasique. Cela nous permet de comparer nos résultats avec la solution analytique de l'écoulement correspondant.

### 5.3.1 Validation de la prise en compte de l'angle de contact statique

Nous allons, dans cette partie, donner les résultats de validation de la méthode d'imposition d'un angle de contact. Nous allons nous inspirer de la validation proposée pour une formulation lagrangienne, donnée par Bellet [Bel01]. Nous allons calculer la hauteur d'une bulle en fonction de son angle de contact. En effet, étant donné que nous considérons des écoulements incompressibles, le volume de la bulle doit être conservé entre sa forme initiale et sa forme après modification de l'angle de contact. Nous commencerons toujours nos simulations avec une bulle hémisphérique (en 3D) ou avec un demi-disque (en 2D), donc avec un angle de contact  $\theta = 90^\circ$ .

#### 5.3.1.1 Le cas 2D

##### Calcul analytique de la hauteur

Dans un premier temps, nous considérons le cas 2D. La surface initiale est donnée par :

$$S_{init} = \frac{\pi R_{init}^2}{2} \quad (5.23)$$

La surface de la portion grisée du schéma donné figure 5.11 s'écrit :

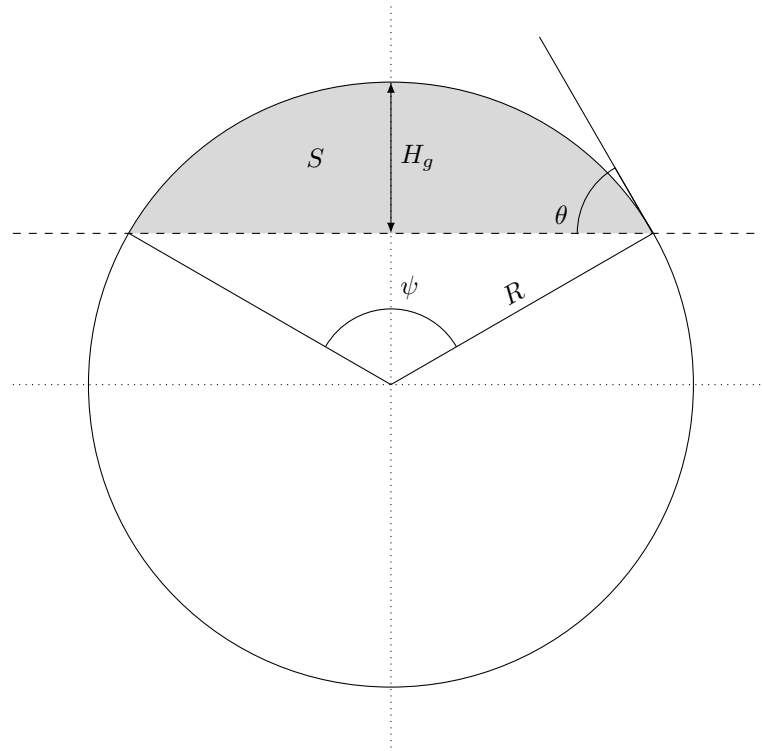
$$S = \frac{R^2}{2}(\psi - \sin \psi) \quad (5.24)$$

Lorsque l'angle de contact est inférieur à  $\pi/2$ , nous avons  $\psi = 2\theta$ . Nous pouvons écrire l'aire de la goutte en fonction de l'angle de contact :

$$S_{\theta < \pi/2} = R^2(\theta - \sin \theta \cos \theta) \quad (5.25)$$

Pour un angle de contact supérieur à  $\pi/2$  nous avons  $\psi = 2\pi - 2\theta$  et ainsi l'aire de la surface grisée s'écrit  $R^2(\pi - \theta + \sin \theta \cos \theta)$ . La surface de la bulle s'écrit :

$$S_{\theta > \pi/2} = \pi R^2 - R^2(\pi - \theta + \sin \theta \cos \theta) \quad (5.26)$$



**FIGURE 5.11** – Calcul de l'aire  $S$  et de la hauteur  $H_g$  de la section grisée d'un cercle.

ce qui donne

$$S_{\theta > \pi/2} = S_{\theta < \pi/2} \quad (5.27)$$

Nous souhaitons calculer la hauteur  $H_g$  de la bulle. Pour cela, nous écrivons l'égalité des volumes entre la goutte initiale et la goutte finale pour exprimer  $R = f(R_{init})$ . Elle nous donne :

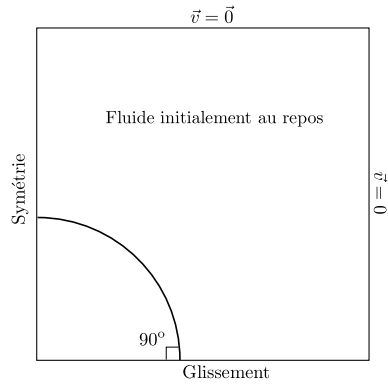
$$R^2 = \frac{\pi R_{init}^2}{2(\theta - \sin \theta \cos \theta)} \quad (5.28)$$

Nous avons  $H_g = R(1 - \cos \theta)$ . Nous pouvons ainsi donner une expression pour la hauteur de bulle en fonction de l'angle de contact et du rayon initial de la bulle :

$$H_{\theta < \pi/2} = (1 - \cos \theta) \left( \frac{\pi R_{init}^2}{2(\theta - \sin \theta \cos \theta)} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.29)$$

### Les résultats numériques

Nous présentons maintenant les résultats numériques issus de l'imposition de l'angle de contact. Pour cela, nous avons pris un domaine carré de dimensions  $5 \times 5$  mm (figure 5.12). Une bulle circulaire de rayon  $R_0 = 2$  mm est centrée sur le point inférieur gauche du domaine de calcul. Le substrat est placé en  $y = 0$ . C'est sur cette frontière que sera imposé l'angle de contact, qui a pour valeur initiale  $90^\circ$  (étant donné la forme de la Level Set initiale). Nous imposons un glissement en  $y = 0$ , une condition de symétrie (ce qui est équivalent au glissement) en  $x = 0$  et une vitesse nulle sur les autres frontières. Nous allons donc, pour différents angles de contact, comparer la hauteur de la bulle obtenue par simulation numérique et la hauteur analytique.



**FIGURE 5.12** – Représentation schématique du domaine de calcul pour la validation de l'imposition de l'angle de contact, à l'état initial.

Les résultats sont donnés figures 5.13 et 5.14 et les calculs d'erreurs sont donnés figure 5.15. Nous voyons que l'erreur diminue fortement lors des premiers pas de temps, puisque nous imposons brusquement un angle de contact à une interface qui avait au départ un angle de contact de  $90^\circ$ . Nous trouvons ensuite une évolution régulière de l'erreur, qui est due principalement aux problèmes de conservation de la masse inhérente à la méthode Level Set. Les oscillations de l'erreur sont dues aux étapes de ré-initialisation de la Level Set.

Les figures 5.13 et 5.14 montrent l'interface pour différents temps. La Level Set initiale forme toujours un angle de  $90^\circ$  avec la surface solide. Nous voyons que l'amplitude de la vitesse est la plus forte pour les premiers pas de temps, car c'est à ce moment que l'interface respecte le moins l'angle de contact imposé. Ainsi, le système va tendre à s'approcher de l'angle de contact imposé. C'est pour cela que la vitesse va progressivement diminuer au cours du temps. Ensuite, à l'équilibre, c'est-à-dire lorsque l'angle de contact ne varie plus, les vitesses que nous observons sont les courants parasites, systématiquement observés lors de simulations eulériennes de phénomènes capillaires.

### 5.3.1.2 Le cas 3D

Nous considérons maintenant le cas 3D. Le volume initial est donné par :

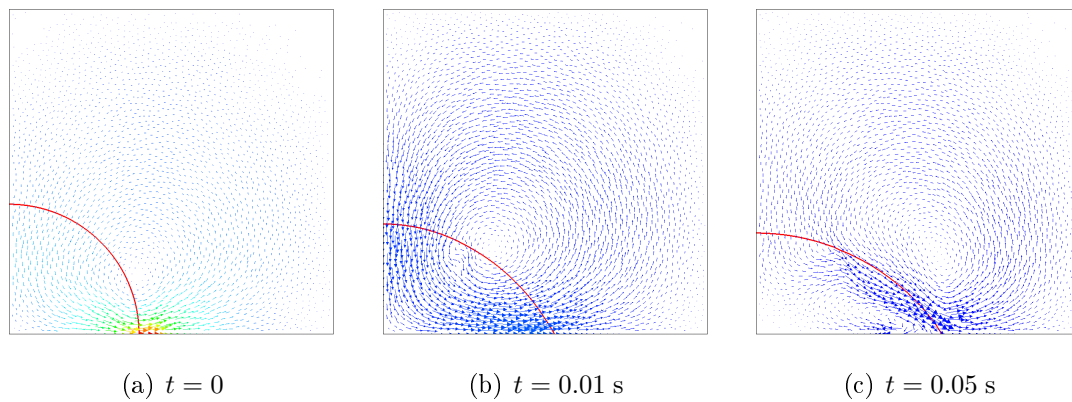
$$V_{init} = \frac{2}{3}\pi R_{init}^3 \quad (5.30)$$

Le volume de la calotte sphérique grisée (dont la figure 5.11 peut représenter une section) est donnée par :

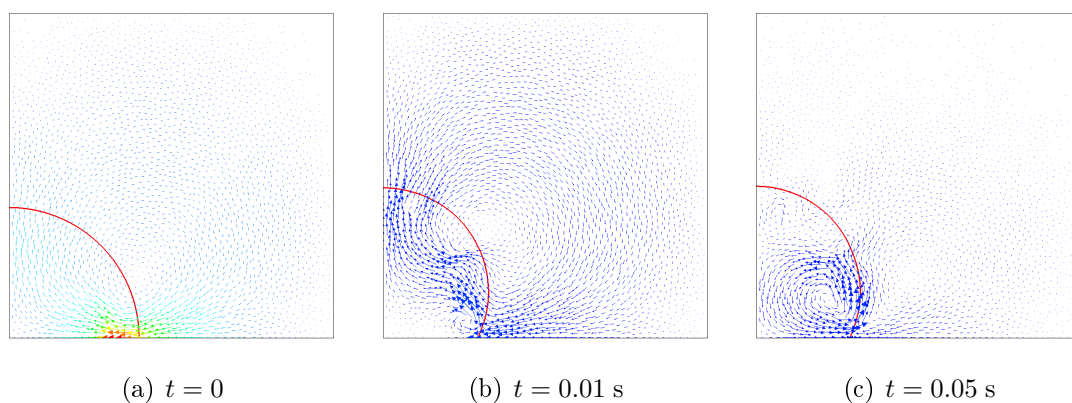
$$V = \frac{\pi}{3}H_g^2(3R - H_g) \quad (5.31)$$

En exprimant  $R$  en fonction de  $H_g$  et en faisant l'égalité des volumes, nous obtenons l'expression de la hauteur  $H_h$  de la bulle en fonction de l'angle de contact et du rayon initial :

$$H_g = (1 - \cos \theta) \sqrt[3]{\frac{4\pi R_{init}^3}{3(1 - \cos \theta)^2(2 + \cos \theta)}} \quad (5.32)$$

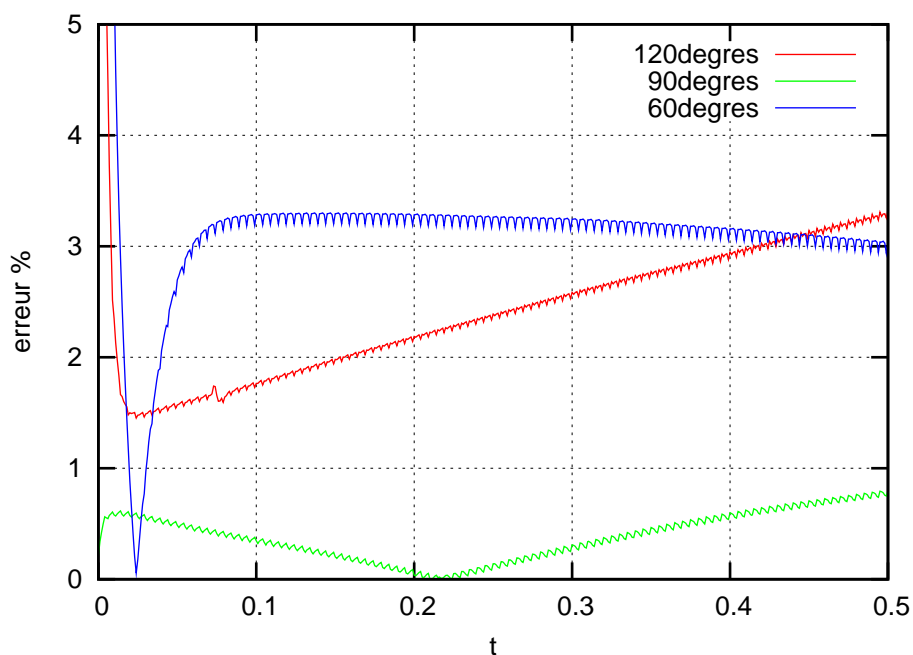


**FIGURE 5.13** – Évolution de l'interface pour une goutte dont on a imposé un angle de contact de  $60^\circ$  (calcul 2D). Les vecteurs vitesse sont donnés pour illustrer l'effet de l'imposition de l'angle de contact sur l'écoulement. L'échelle de couleur des vecteurs est fixée en fonction des minimum et maximum pour la simulation complète. La vitesse maximale est de 0.26 mm/s. L'échelle de taille des vecteur varie à chaque temps.

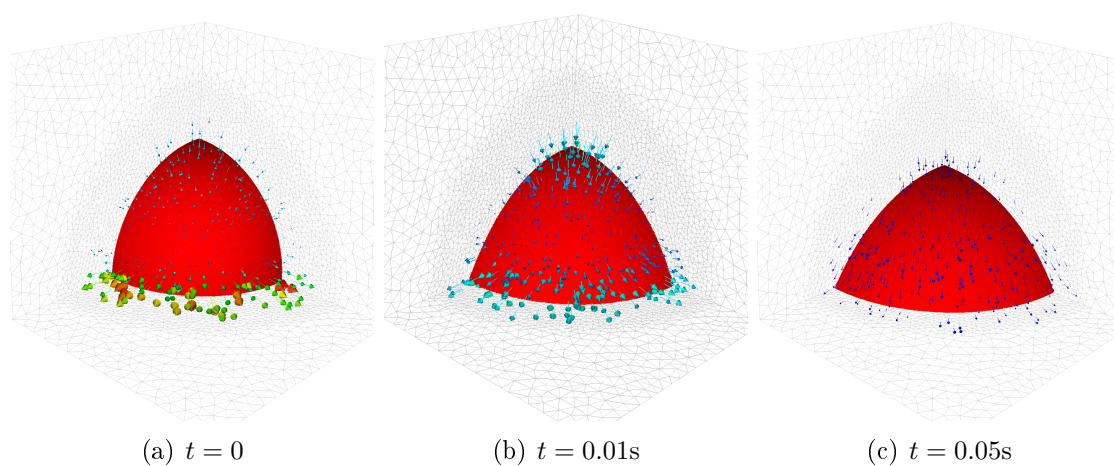


**FIGURE 5.14** – Évolution de l'interface pour une goutte dont on a imposé un angle de contact de  $120^\circ$  (calcul 2D). Les vecteurs vitesse sont donnés pour illustrer l'effet de l'imposition de l'angle de contact sur l'écoulement. L'échelle de couleur des vecteurs est fixée en fonction des minimum et maximum pour la simulation complète. La vitesse maximale est de 0.25 mm/s. L'échelle de taille des vecteur varie à chaque temps.

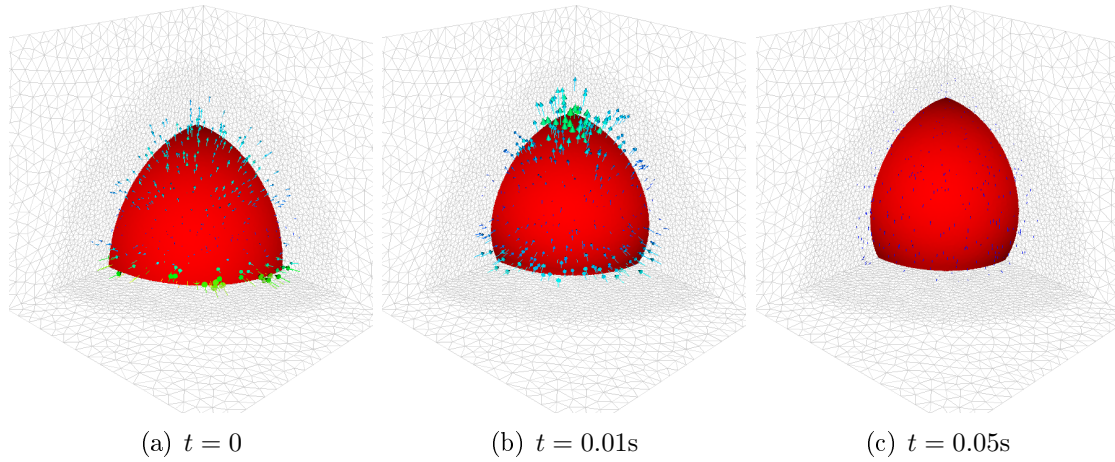
Les résultats sont donnés figures 5.16 et 5.17 et les calculs d'erreurs sont donnés figure 5.18. Comme pour le cas 2D, nous voyons une forte diminution de l'erreur lors des premiers pas de temps. Les oscillations de l'erreur sont dues aux étapes de ré-initialisation de la Level Set.



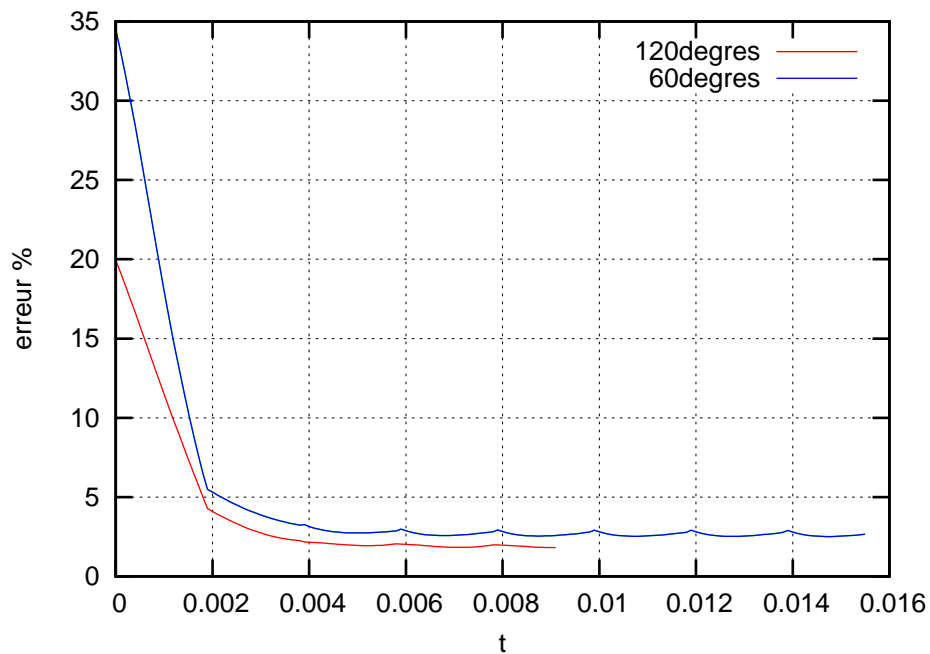
**FIGURE 5.15** – Erreur sur la hauteur analytique d'une bulle en fonction de l'angle de contact pour un calcul 2D.



**FIGURE 5.16** – Évolution de l'interface pour une goutte dont on a imposé un angle de contact de  $60^\circ$  (calcul 3D). Les vecteurs vitesse sont donnés pour illustrer l'effet de l'imposition de l'angle de contact sur l'écoulement. L'échelle de couleur des vecteurs est fixée en fonction des minimum et maximum pour la simulation complète. La vitesse maximale est de 0.17 mm/s. L'échelle de taille des vecteur varie à chaque temps.



**FIGURE 5.17** – Évolution de l'interface pour une goutte dont on a imposé un angle de contact de  $120^\circ$  (calcul 3D). Les vecteurs vitesse sont donnés pour illustrer l'effet de l'imposition de l'angle de contact sur l'écoulement. L'échelle de couleur des vecteurs est fixée en fonction des minimum et maximum pour la simulation complète. La vitesse maximale est de  $0.17\text{ m/s}$ . L'échelle de taille des vecteur varie à chaque temps.



**FIGURE 5.18** – Erreur sur la hauteur analytique d'une bulle en fonction de l'angle de contact pour un calcul 3D.

## 5.3.2 Validation de la condition de Navier

### 5.3.2.1 Cisaillement simple

Dans le but d'évaluer la précision et la validité de l'implémentation de la condition de Navier telle qu'elle est donnée en 5.2.2 (p.156), plusieurs calculs d'erreurs vont être effectués. Étant donné que la solution analytique du cisaillement avec condition de Navier est connue, nous définissons la quantité suivante :  $e_h = \tilde{u} - u_h$  sur  $\Omega_h$  qui est la différence entre la solution analytique  $\tilde{u}$  et la solution calculée  $u_h$ , où  $u$  est soit la vitesse soit la pression. La norme  $L^2$  discrète est calculée sur  $\Omega_h$  de la manière suivante :

$$\|e_h\|_{L^2(\Omega_h)} = \sqrt{\frac{1}{|\Omega_h|} \int_{\Omega_h} e_h^2 d\Omega_h} \quad (5.33)$$

La norme max est donnée par la relation suivante :

$$\|e_h\|_{\infty} = \max_{\Omega_h} e_h \quad (5.34)$$

Nous définissons un domaine de calcul carré de côté  $H$ . La vitesse est imposée sur la frontière supérieure tandis qu'une condition de Navier est définie sur la frontière inférieure. Dans ce cas, la normale à l'interface, sur laquelle le glissement de Navier est imposé, est donnée par  $\vec{n} = (0, -1)$  et la condition aux limites s'écrit :

$$v_x(x, H) = v_0 \quad (5.35)$$

$$-\eta \frac{\partial v_x}{\partial y}(x, 0) = \beta v_x \quad (5.36)$$

La solution analytique est la suivante :

$$v_x(x, y) = \frac{v_0}{\beta \frac{H}{\eta} - 1} \left( \frac{\beta}{\eta} y - 1 \right) \quad (5.37)$$

Si  $\beta \rightarrow \infty$ , nous retrouvons un écoulement de Couette classique. Notons que la solution diverge lorsque  $\beta = \eta/H$ .

Pour les paramètres suivants,  $\eta = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $u_0 = 1$  et  $H = 1$ , la vitesse analytique sur la frontière de Navier vaut  $v_x(0) = 0.5$ . La figure 5.19 montre la solution numérique sur un maillage simple. Nous trouvons une valeur de 0.5 pour la composante  $x$  de la vitesse, sur la frontière de Navier. La composante  $y$  a une valeur proche de  $10^{-8}$ .

Pour ce cas de validation, la frontière est plane. De plus, la solution de ce problème est linéaire. En la résolvant en utilisant des éléments finis  $P1$ , nous pouvons trouver une solution exacte, aux erreurs d'arrondis près. Ainsi, les résultats de calculs d'erreurs donnés figure 5.20 montrent une erreur très faible, qui varie de moins d'une décade en fonction de la valeur de  $\beta$ . Nous remarquons une augmentation régulière de l'erreur avec l'inverse de la taille de maille. Cela est simplement dû au fait qu'en diminuant la taille de maille, la taille du système à résoudre augmente. Pour des matrices relativement petites, une itération suffit pour converger et la convergence se fait avec un résidu très faible, de l'ordre de

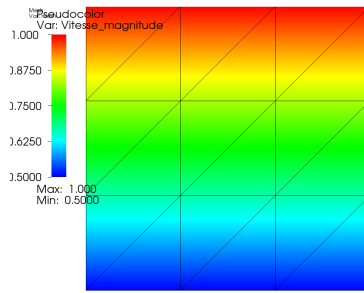


FIGURE 5.19 – Champ de vitesse calculé pour  $\beta = 1$ .

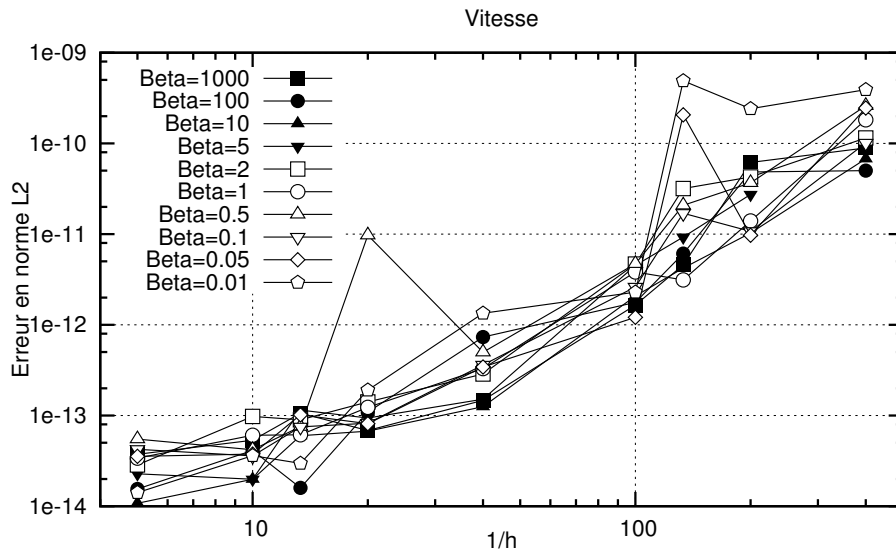


FIGURE 5.20 – Norme  $L_2$  de l'erreur sur la vitesse pour un écoulement de Couette avec glissement de Navier.

$10^{-12}$ . Lorsque la taille du système augmente, le nombre d'itérations nécessaires pour le résoudre augmente. Le système itératif ayant un critère d'arrêt correspondant à une valeur de résidu minimal, il s'arrête lorsque ce dernier est vérifié. Ainsi, il peut s'arrêter pour un résidu plus grand, alors qu'une itération supplémentaire aurait probablement permis de diminuer le résidu. Cette augmentation de l'erreur n'a donc pas d'importance significative. Étant donné que la composante  $y$  de la vitesse est imposée nulle sur toutes les frontières autres que celle possédant la condition de Navier, la composante verticale est nulle dans tout le domaine. Ainsi, dans le cas de l'écoulement de Couette, la pénalisation de la composante de la vitesse normale au solide est inutile. Ainsi, il n'est pas pertinent d'étudier l'effet du coefficient de pénalisation sur le calcul, puisque la pénalisation agit sur une grandeur qui est toujours nulle (ou tout au moins d'une valeur proche de la valeur du résidu).

### 5.3.2.2 Écoulement de Couette cylindrique avec une condition de Navier

Le cylindre intérieur tourne avec une vitesse angulaire  $R_i\omega_i$ . La condition de Navier est appliquée sur le cylindre extérieur. L'écoulement est purement axisymétrique, ce qui nous permet d'écrire, dans le système de coordonnées cylindriques  $\vec{v} = (0, v_\theta(r), 0)$  et  $\vec{n} = \vec{e}_r$ . Plus précisément, la forme générale de  $v$  est donnée par :

$$v_\theta = Ar + \frac{B}{r} \quad ; \quad \sigma \cdot \vec{n} = \left( 0, -2\eta \frac{B}{r^2}, 0 \right) \quad (5.38)$$

Les constantes  $A$  et  $B$  sont données par :

$$A = \frac{R_i^2 \omega_i (\beta R_o - 2\eta)}{-\beta R_o^3 + \beta R_o R_i^2 - 2\eta R_i^2} \quad ; \quad B = \frac{-R_i^2 \omega_i \beta R_o^3}{-\beta R_o^3 + \beta R_o R_i^2 - 2\eta R_i^2} \quad (5.39)$$

Pour  $\beta \rightarrow \infty$  nous obtenons la solution de l'écoulement de Couette cylindrique classique :

$$A = \frac{R_i^2 \omega_i}{-R_o^2 + R_i^2} \quad ; \quad B = \frac{-R_i^2 R_o^2 \omega_i}{-R_o^2 + R_i^2} \quad (5.40)$$

alors que  $\beta = 0$  nous donne un mouvement de corps solide :

$$A = \omega_i \quad ; \quad B = 0 \quad (5.41)$$

Nous avons cette fois une frontière courbe. Dans ce cas, la discrétisation de la frontière est importante pour la précision des résultats. Nous pourrions donc étudier l'effet de la taille de maille sur l'erreur de calcul.

Comme pour l'écoulement de Couette, l'imposition de la vitesse angulaire en condition limite va naturellement donner pour solution un champ de vitesse angulaire. Ainsi, il n'y a pas de composante normale de la vitesse, et le terme de pénalisation est inutile.

Nous n'avons donc maintenant plus à étudier l'effet du coefficient de pénalisation pour l'écoulement de Couette cylindrique. Les résultats de l'évolution de l'erreur en fonction de la valeur de  $\beta$  pour un coefficient de pénalisation nul sont présentés figures 5.21 et 5.22. Les résultats montrent que l'erreur augmente avec  $\beta$ . Cela peut s'expliquer par le fait que plus  $\beta$  est grand, plus la vitesse de glissement est faible. Ainsi, plus la vitesse est faible, plus l'erreur rapportée à la vitesse est grande.

La norme  $L2$  de l'erreur sur la vitesse est faible. Cela montre la validité de la condition aux limites de Navier, lorsque celle-ci est appliquée à une frontière du domaine. Il manque toutefois une validation du terme de pénalisation, que nous n'avons pas eu le temps de mener.

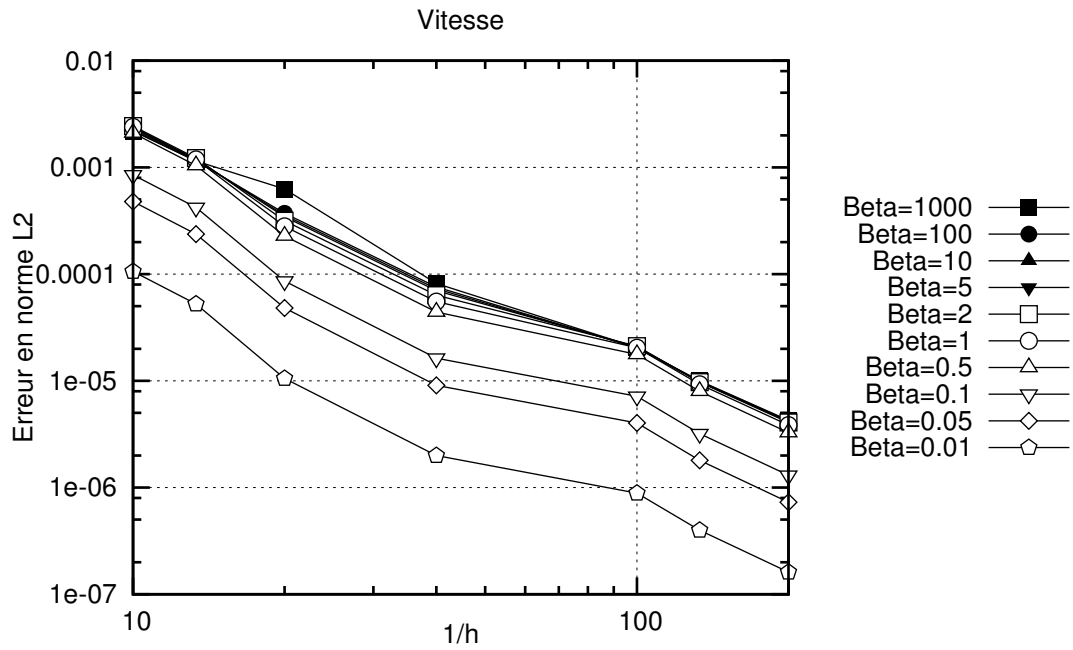


FIGURE 5.21 – Norme  $L_2$  de l'erreur sur la vitesse pour un écoulement de Couette cylindrique avec glissement de Navier pour  $A_p = 0$ .

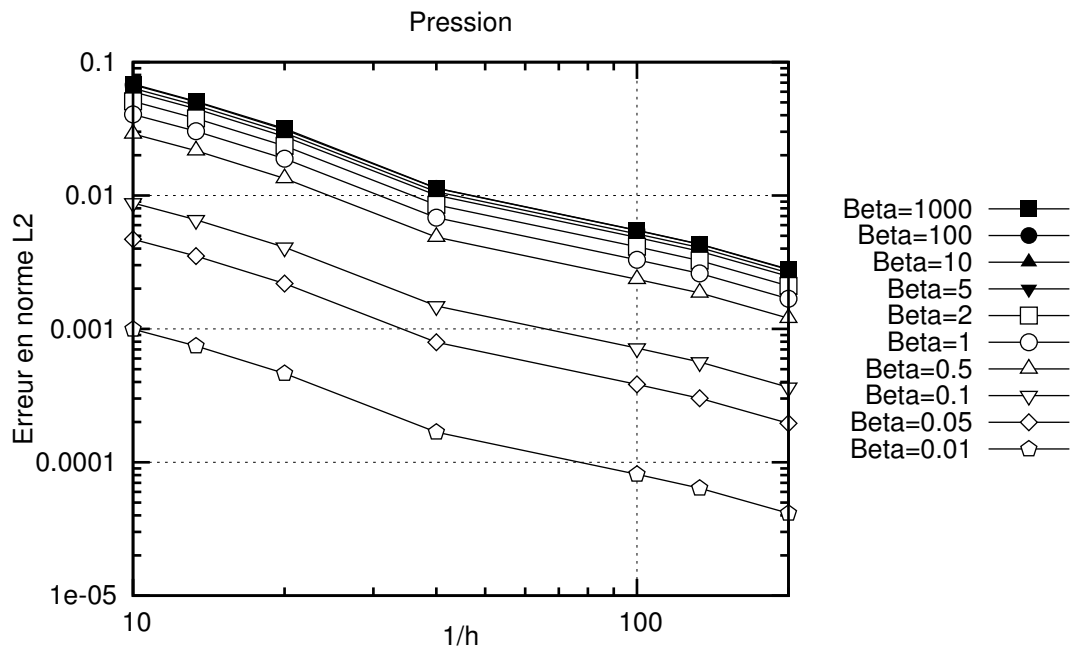


FIGURE 5.22 – Norme  $L_2$  de l'erreur sur la pression pour un écoulement de Couette cylindrique avec glissement de Navier pour  $A_p = 0$ .

## 5.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons abordé le phénomène de mouillage en débutant par une rapide introduction bibliographique. Les difficultés concernant le déplacement de la ligne de contact ont été présentées après avoir donné quelques références sur la prise en compte des angles de contact.

Les méthodes numériques implémentées ont ensuite été présentées. La première est la prise en compte des angles de contact. Étant donné que nous utilisons une méthode Level Set linéaire, il n'est pas possible d'imposer directement son gradient en condition limite. La normale à l'interface étant calculée à partir du gradient de la Level Set, cela nous aurait permis d'imposer l'angle de contact. Nous avons donc choisi de fixer l'angle de contact en modifiant la normale locale à l'interface, sans modifier l'interface elle-même. Lorsque sa normale est différente de la normale imposée, une force due à la tension de surface va apparaître. Sa prise en compte dans l'écoulement va provoquer un déplacement de l'interface afin qu'elle respecte l'angle prescrit. Cette méthode a été validée par la suite, en imposant un angle de contact  $\theta$  à une interface faisant initialement un angle de  $90^\circ$  avec la frontière.

La seconde méthode implémentée est la prise en compte de la condition aux limites de Navier. Cette condition correspond à un glissement, contrôlé par un coefficient  $\beta$ , sur l'interface et à une non-pénétration à travers cette interface. Nous avons imposé cette vitesse normale nulle par une méthode de non pénétration, que nous n'avons pourtant pas eu le temps de valider.

Ces deux méthodes n'ont pas été utilisées simultanément durant cette thèse. Cependant, elles sont totalement compatibles entre elles, puisque la première est utilisée pour obtenir un terme de force qui est ajouté au second membre de l'équation de Stokes et la seconde est une condition aux limite.

Concernant l'angle de contact dynamique que nous avons présentés dans la bibliographie, il est étroitement lié à la vitesse de glissement de la ligne triple. Un travail est actuellement en cours au laboratoire concernant le couplage de la prise en compte de l'angle de contact dynamique avec la condition de Navier. Pour cela, la condition de Navier est remplacée par la condition de Navier généralisée [GL09], qui s'écrit sous la forme :

$$\beta \vec{v} \cdot \vec{t}_s + (\sigma \cdot \vec{n}_s) \cdot \vec{t}_s + \gamma (\cos(\theta_d) - \cos(\theta)) (\vec{n}_s \wedge \vec{t}_{\partial\Gamma}) \cdot \vec{t}_s \delta_l = 0 \quad (5.42)$$

où  $\vec{n}_s$  et  $\vec{t}_s$  sont la normale et la tangente à la surface solide,  $\theta$  et  $\theta_d$  sont l'angle de contact effectif et l'angle de contact dynamique, et  $\vec{t}_{\partial\Gamma}$  est le vecteur tangent à l'interface au niveau de la ligne de contact, et dans le plan de la surface solide.

L'angle de contact intervenant directement dans la condition de Navier, il aura une influence directe sur la vitesse de la ligne triple, et inversement, la vitesse de la ligne triple aura une influence sur l'angle de contact dynamique. De plus, cette méthode ne nécessitera pas l'utilisation de la méthode d'imposition de l'angle de contact statique, décrite dans ce chapitre.

L'objectif visé au laboratoire est de pouvoir imposer l'angle de contact et le glissement de Navier sur une interface décrite par une level-set. Grâce à ce travail, nous avons posé les premières briques des méthodes qui seront implémentées et utilisées.

Dans le cas de l'imposition d'un angle statique (pas de prise en compte d'un angle dynamique), la méthode exposée dans ce chapitre est directement utilisable sur une interface floue. En effet, les nœuds de la frontière sont marqués par un champ qui vaut 1 ou 0, selon que l'on veuille modifier ou non la normale à l'interface. Si ce champ prend une valeur intermédiaire, la normale modifiée à l'interface sera une moyenne pondérée entre la normale effective de l'interface, et la normale que l'on souhaite imposer. Ce champ peut prendre une valeur non nulle sur des nœuds n'appartenant pas à la frontière. Dans ce cas, l'imposition de l'angle de contact peut être appliqué sur une couche de nœuds autour d'une interface diffuse.

Dans le cas de l'imposition d'une condition de Navier sur une interface floue, un premier travail à déjà été effectué, inspiré de la méthode CFS, en utilisant une fonction Dirac lissée pour imposer la condition sur un volume. La condition aux limites est ainsi prise en compte par un terme supplémentaire, introduit dans la formulation faible des équations de Stokes. Cependant, la formulation éléments finis utilisée ne nous permet pas d'obtenir un saut de vitesse entre le fluide et le solide, et nous ne pouvons qu'obtenir un déplacement de corps rigide dans le solide. Pour cette méthode, des travaux sont également en cours au laboratoire. Ils consistent à définir une zone de transition, dans laquelle la viscosité tend vers zéro, entre le liquide et le solide, qui permet de passer linéairement de la vitesse définie par la condition de Navier à une vitesse nulle pour le solide. En pratique, cette méthode permettrait d'imposer également un saut de vitesse entre deux fluides.

# Conclusion

Ce travail de thèse est centré sur deux problématiques. La première est la détermination de la perméabilité des renforts fibreux pour des écoulements aux échelles microscopique et mésoscopique. La seconde est la prise en compte des phénomènes de tension de surface et de mouillabilité, dans les écoulements à petite échelle, qui interviennent dans la partie non saturée du renfort en cours d'imprégnation.

Le calcul de perméabilité est un point très étudié à l'heure actuelle. En effet, les logiciels disponibles sur le marché permettent de simuler les écoulements en considérant la cavité du moule, contenant le renfort, comme un milieu poreux. Mais ces logiciels nécessitent la connaissance de la perméabilité du renfort, qu'il n'est pas aisé d'obtenir. Les mesures expérimentales sont parfois complexes et les lois analytiques permettant de calculer cette perméabilité n'existent que pour des configurations particulières. Il est difficile de les obtenir pour des mèches tissées, dont la géométrie est très complexe. En effet, elles sont déformées lors du tissage, cisailées et compressées lors de la mise en place dans le moule. De plus, le taux de fibres varie le long de chaque mèche.

Cette thèse se place dans la thématique d'estimation de la perméabilité par la simulation numérique qui permet de calculer la perméabilité d'un renfort quelle qu'en soit la géométrie, pour peu que l'on soit capable de la représenter numériquement. Elle est également capable de calculer la perméabilité d'une mèche par la représentation des fibres qu'elle contient.

L'apparition de micro-vides et de macro-vides dans le matériau composite final se produit principalement entre la zone sèche et la zone saturée du renfort en cours d'imprégnation. La compréhension des phénomènes physiques qui interviennent dans cette zone est nécessaire pour maîtriser les paramètres procédés qui permettraient de diminuer, voir d'empêcher, l'apparition de ces défauts. La simulation numérique est un moyen de comprendre ce qui se passe au niveau de la zone partiellement saturée, dans laquelle les écoulements sont soumis aux phénomènes capillaires. Cette thèse apporte les premiers éléments pour simuler ces phénomènes avec la méthode des éléments finis.

En ce qui concerne le calcul de perméabilité, nous avons développé une méthode d'homogénéisation des champs de vitesse et de pression dans le cadre d'une méthode d'immersion de domaines, ce qui est nouveau pour les simulations d'écoulement dans les milieux poreux. Cela rend plus simple la mise en place des modèles, en permettant l'utilisation des méthodes d'immersion de maillage. Cela permet également de plus facilement gérer la déformation, induite par l'écoulement, des mèches ou des fibres, si l'on souhaite complexifier le modèle en donnant une loi de comportement mécanique aux objets solides. Des tests

ont été faits au laboratoire pour explorer les possibilités offertes par ce type de calcul pour les thématiques d'interaction fluide-structure.

La méthode de calcul développée a été validée en comparant la perméabilité calculée à la perméabilité analytique pour des arrangements réguliers de fibres unidirectionnelles et cylindriques. Ainsi, la comparaison des calculs de perméabilité transverse a été faite en 2D, puis en 3D et a montré une très bonne corrélation avec les différentes lois de la littérature, bien que les résultats pour les calculs 3D aient été moins nombreux, étant donné le coût de calcul plus important que pour le cas 2D. Après avoir montré la validité du modèle en 3D, des comparaisons ont été faites pour des calculs de perméabilité longitudinale. Cette fois la corrélation avec les lois analytiques est moins bonne, mais elle peut être due à une importante différence entre le profil de vitesse supposé dans le cas analytique et le champ de vitesse réel. Bien que les tendances d'évolution de la perméabilité en fonction du taux de fibres soient légèrement différentes, les ordres de grandeur sont bien les mêmes, ce qui conforte la validité du modèle.

Avant cela, les premières validations de la méthode ont consisté à introduire, dans la loi de Darcy, les champs de vitesse et de pression correspondants à un écoulement de type Poiseuille, afin de relier la perte de charge au terme de perméabilité. Il a été ainsi possible d'obtenir une loi analytique sans hypothèse forte, comme c'est le cas pour les lois de calculs de perméabilité d'arrangements réguliers de fibres. Cela nous a permis d'étudier les différents paramètres numériques entrant en jeu dans la simulation, à savoir la taille de maille et l'épaisseur de la zone de mélange des viscosités. Cette épaisseur de mélange est directement liée à la taille de maille locale au voisinage de l'interface. Le principal résultat est que la perméabilité est assez peu sensible à l'épaisseur de la zone de mélange des viscosités choisies. Cela est principalement dû au fait que la différence de viscosité étant très importante, la viscosité suffisante pour représenter un solide est obtenue très tôt sur l'épaisseur du mélange.

Nous avons également fait une première étude rapide de l'influence de la forme des fibres sur la perméabilité, en faisant varier le facteur de forme. La variation de perméabilité est assez importante lorsque le facteur de forme évolue. Cela peut également montrer l'influence de la direction de l'écoulement, puisqu'une ellipse est la section de la fibre vue par un écoulement qui ne serait pas transverse, mais décalé d'un certain angle par rapport à l'axe de la fibre.

Cette méthode de calcul de perméabilité est par la suite destinée à des calculs à l'échelle mésoscopique, c'est-à-dire à l'échelle du motif du renfort. Une première étude a été faite, en fin de thèse, sur le calcul de la perméabilité à l'échelle mésoscopique. Elle a consisté à calculer la perméabilité d'un VER contenant le motif d'un renfort de type G986 non déformé, en faisant varier la perméabilité des mèches. Cette étude a nécessité le développement d'un couplage entre les équations de Stokes, modélisant l'écoulement libre du fluide, et des équations de Darcy, modélisant l'écoulement dans le milieu poreux, qui représente les mèches.

Nous avons choisi de résoudre la loi de Brinkman pour faire ce couplage. La loi de Brinkman correspond en fait à l'équation de conservation de la quantité de mouvement présente dans les équations de Stokes mais avec un terme supplémentaire en vitesse. Ainsi, en jouant sur le coefficient lié à ce terme de vitesse, il est possible de modéliser soit un écoulement libre, soit un écoulement en milieu poreux. De plus, l'utilisation de cette loi

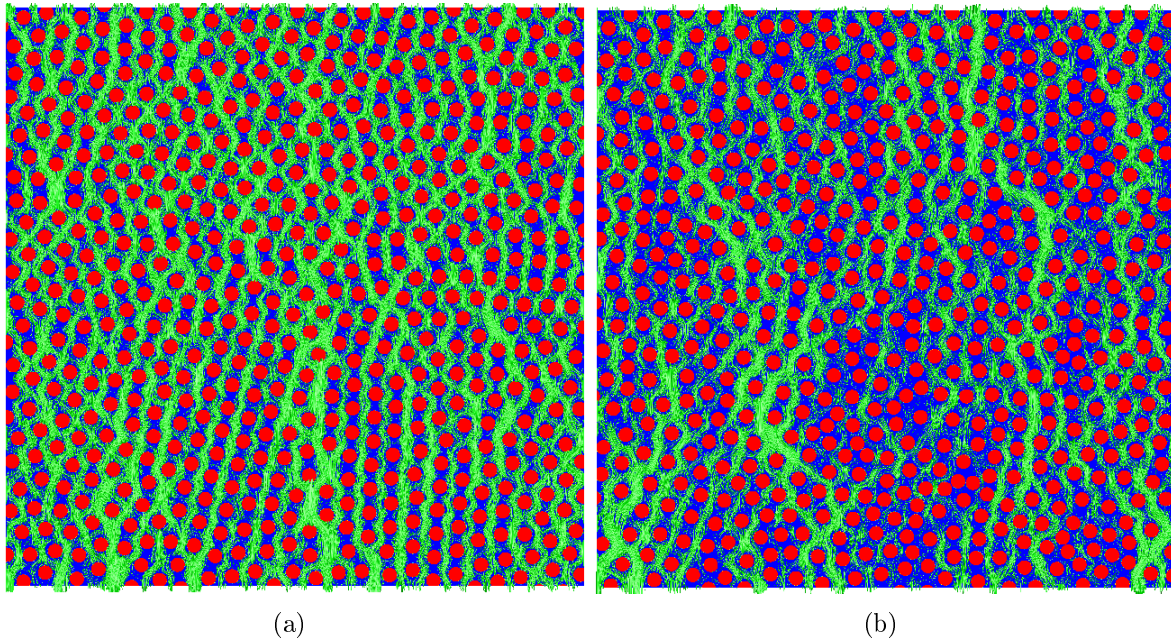
permet de prendre en compte directement la continuité des vitesses et des contraintes. Cela évite donc d'avoir à ajouter des conditions aux limites supplémentaires, de type Beaver-Joseph-Saffman, qui sont difficiles à imposer dans le cas de l'immersion de domaines, puisque les interfaces ne sont pas maillées mais représentées par la fonction Level Set. Il faut cependant préciser que la condition citée précédemment permet de prendre en compte un glissement entre le fluide et le milieu poreux, ce qui est impossible dans le modèle tel que nous l'avons créé. Une solution serait de s'inspirer de la condition aux limites de Navier, codée pour la prise en compte du glissement de la ligne triple en tension de surface et qui a finalement la même forme que le terme de glissement de la condition BJS. Mais ceci est simplement une ouverture pour des études futures.

Ce solveur pour l'équation de Brinkman a été validé en comparant la solution numérique avec la solution analytique. Nous avons également comparé les résultats avec la solution des équations de Stokes, pour déterminer la valeur de la perméabilité qui permet de représenter un écoulement de Poiseuille. Enfin, nous avons modélisé un cas contenant à la fois un domaine fluide et un domaine poreux et nous avons comparé les résultats numériques avec une solution analytique. Cela nous a permis de montrer la validité de l'utilisation de cette équation pour représenter le couplage Stokes-Darcy. Cependant, il faut tout de même garder à l'esprit que cette étude fait partie des dernières études effectuées durant cette thèse et que le temps nous a manqué pour faire une validation beaucoup plus sérieuse, en faisant varier les différents paramètres numériques comme la taille de maille, l'épaisseur de la zone de mélange et d'autres paramètres numériques pour déterminer la précision du solveur.

Le calcul numérique de perméabilité est fait dans le cadre d'une méthode d'immersion de domaines. Ainsi, les interfaces ne sont pas directement représentées par le maillage, mais sont représentées à travers une fonction distance qui permet de se positionner dans le domaine en fonction de cette interface. C'est une méthode nouvelle pour ce type d'étude. De plus, dans le cas mésoscopique, nous avons utilisé la méthode d'immersion de maillage pour représenter le milieu poreux. Ce dernier nous est donné sous forme de maillage des mèches, que nous introduisons dans le domaine de calcul. Ces maillages ne sont utilisés que pour nous permettre de déterminer les différentes zones dans le domaine de calcul et aucun calcul n'est effectué dessus. Tous les calculs sont faits sur le domaine global dans lequel les maillages des fibres ont été immergés.

Pour cette technique d'immersion de domaines, nous avons donné quelques conseils d'utilisation afin d'accélérer l'adaptation du maillage. D'autres techniques existent, comme l'adaptation par estimateur d'erreur a posteriori qui permet de bien contrôler la taille de maille et son anisotropie en fonction de l'erreur calculée sur une grandeur donnée. Cette méthode est en cours de développement au laboratoire.

Nous avons dû travailler sur la stabilisation de la formulation. En effet, cette formulation éléments finis est utilisée depuis des années au laboratoire pour des simulations de remplissage, d'injection, etc. Cependant, pour tous ces procédés, le champ de pression a une importance assez relative dans les études numériques. Ainsi, le laboratoire s'est concentré sur le champ de vitesse obtenu par éléments finis et la stabilisation utilisée permettait d'avoir de bons champs de vitesse. Dans cette étude, le champ de pression est de première importance, puisque son gradient est utilisé pour le calcul de la perméabilité. Ainsi, un bon champ de pression permet d'obtenir de bons résultats, tandis qu'un champ de pression légèrement perturbé par des problèmes de stabilisation conduira à des varia-



**FIGURE 5.23** – *Champ de vecteurs vitesse (en vert) pour un écoulement à travers des arrangements aléatoires de fibres. La porosité est la même pour les deux figures et vaut  $\Phi = 0.7$ . L'arrangement en (a) est plus ordonné qu'en (b). Figures de K. Hitti.*

tions importantes de son gradient qui vont énormément perturber les résultats obtenus pour le calcul de la perméabilité.

Nous avons donc finalement mis en place une méthode efficace et simple à mettre en œuvre pour le calcul de la perméabilité, moyennant quelques précautions sur la stabilisation de la formulation éléments finis, afin d'obtenir un champ de pression correct. Nous avons validé cette méthode dans des calculs à l'échelle microscopique, en comparant les résultats numériques avec des résultats analytiques pour des arrangements simples. Nous avons également montré que cette méthode fonctionne à l'échelle mésoscopique, en l'utilisant avec un couplage Stokes-Darcy. Ce travail a donc permis de mettre en place une méthode de calcul de perméabilité, maintenant utilisée dans une autre étude au laboratoire, qui consiste à calculer la perméabilité d'un arrangement aléatoire de fibres (figure 5.23) dont le nombre peut aller jusqu'à plusieurs milliers. Cet arrangement aléatoire est généré de manière automatique, sans recouvrement et avec une distribution de taille et une porosité maîtrisées. Les fibres sont représentées par une fonction distance et utilisent la méthode d'immersion de domaines. Cela permet d'étudier l'effet du nombre de fibres et de leur distribution sur la perméabilité. L'exemple donné figure 5.23 correspond au champ de vitesse obtenu pour une même porosité mais pour des distributions de fibres différentes.

La seconde thématique de cette thèse concerne la modélisation de la tension de surface. Nous avons cependant mis en place des méthodes dont les études sont poursuivies actuellement au laboratoire, notamment en ce qui concerne le déplacement de la ligne triple et la prise en compte des angles de contact.

Nous avons commencé par une étude bibliographique montrant la complexité physique du phénomène de tension de surface. De nombreuses difficultés sont apparues aux scientifiques qui ont étudié les phénomènes de tension de surface, notamment le problème de déplacement de la ligne de contact qui provoque un paradoxe avec la condition de non-glissement pourtant acceptée par la majorité. Les phénomènes moléculaires conduisant à ce déplacement et à la formation des angles de contact ne sont pas encore complètement compris. Cela explique la grande quantité de papiers disponibles dans la littérature. De plus, il est impossible de découpler les différents milieux du système, puisque les phénomènes capillaires sont directement dépendant de la nature des trois phases fluides ou des deux phases fluides et de la phase solide ainsi que de l'état de surface de cette dernière. Cela a donc grandement augmenté les difficultés concernant l'étude de ces phénomènes.

Leur simulation numérique est également très complexe. En effet, il est habituel, en simulation de mécanique des fluides, de se placer du point de vue eulérien de la mécanique, ce qui conduit naturellement à utiliser un maillage dit eulérien pour la résolution du problème numérique. Ce maillage eulérien implique la nécessité de représenter les interfaces autrement que par des nœuds du maillage. L'utilisation de la méthode Level Set permet de représenter ces interfaces et de les déplacer en fonction du champ de vitesse de l'écoulement. C'est une méthode utilisée depuis maintenant quelques années au laboratoire.

Une autre difficulté, et peut-être la difficulté principale, est la représentation, sur ces interfaces non maillées, des forces surfaciques introduites par les phénomènes capillaires. Nous avons comparé deux méthodes qui consistent à appliquer cette force sur une zone d'une certaine épaisseur, centrée sur l'interface. L'utilisation d'une fonction Dirac lissée permet de faire tendre cette force vers zéro près des limites de cette zone et de la rendre maximale sur l'interface. La première méthode nécessite d'avoir les normales et les courbures des interfaces, ce qui pose également une difficulté, puisque ces champs sont calculés à partir de la fonction distance linéaire et nécessitent jusqu'à deux ordres de dérivation. Leur représentation sur les nœuds nécessite donc un traitement particulier. La seconde méthode permet de ne dériver qu'une fois, en évitant de calculer la courbure qui est obtenue directement dans la formulation faible du problème. Cependant, cette méthode nécessite d'ajouter un terme d'extracontrainte à l'équation de conservation de la quantité de mouvement. Des incertitudes sur la stabilisation de la formulation avec extracontrainte, ainsi que les tests de validation ont montré que la première méthode donnait des résultats plus satisfaisants. Il est cependant possible que la seconde méthode soit privilégiée dans le futur, étant donné que l'utilisation d'un solveur de Stokes avec extracontrainte est étudiée dans le laboratoire dans une autre thèse et pour une autre problématique ne concernant pas les problèmes de tension de surface.

Dans un premier temps, les phénomènes de tension de surface n'ont concerné que deux fluides. Cela a permis de mettre en place les méthodes de prise en compte de ces forces. La célèbre loi de Laplace a été utilisée pour valider la méthode de tension de surface pour des écoulements à deux phases. Cette validation nous a permis d'étudier l'effet de la taille de maille, de l'épaisseur de la zone de mélange de la viscosité et de l'épaisseur de la zone volumique, sous la forme d'un Dirac lissé. Ces deux épaisseurs sont directement liées à la taille de maille et sont surtout liées entre elles, puisque la force appliquée dans cette zone de Dirac est appliquée dans une zone où la viscosité du fluide varie. Nous avons ainsi pu montrer que l'erreur est minimale lorsque l'épaisseur de la zone de mélange de viscosité

et l'épaisseur du Dirac sont égales l'une à l'autre et sont égales à  $4h$ ,  $h$  étant la taille de maille locale près de l'interface. Cela montre la nécessité d'adaptation de maillage efficace, pour que cette zone soit la plus fine possible par rapport aux dimensions du système.

La prise en compte de l'angle de contact, lorsqu'une phase solide est présente, a nécessité le développement de deux modèles. Étant donné que l'angle est défini en fonction du milieu dans lequel on se trouve, pour un angle de contact  $\theta$  donné, cet angle, exprimé dans le référentiel du domaine de calcul, aura pour valeur  $\theta$  d'un côté de la bulle et  $\pi - \theta$  de l'autre côté de la bulle, si on est en 2D. En 3D, la chose est encore plus complexe, puisqu'il faut connaître l'orientation de l'interface par rapport au repère global. Une méthode de calcul de cette orientation a été développée

Une fois l'angle de contact défini, il faut l'imposer. Nous nous sommes inspirés de la technique couramment employée dans la méthode VOF. Elle consiste à modifier directement la position et l'orientation de l'interface calculée. Étant donné qu'avec la méthode Level Set, l'interface n'est pas reconstruite à chaque incrément mais convectée par le champ de vitesse, nous avons décidé d'imposer de manière un peu plus *physique* l'orientation de cette interface en calculant la force nécessaire pour que l'interface, une fois déplacée, respecte cet angle de contact. Nous avons montré la validité de cette méthode par les calculs de validation. Cependant, il est nécessaire d'avoir un pas de temps suffisamment petit pour que l'interface respecte l'angle de contact avec cette méthode.

Le glissement des gouttes ou des bulles est un point important qu'il est difficile de modéliser, étant donné l'utilisation courante de la condition de non-glissement sur les surfaces solides. L'implémentation de la condition de glissement de Navier permet de prendre en compte le déplacement de la ligne de contact.

Par ces deux méthodes précédentes nous avons posé les premières briques de la prise en compte de la mouillabilité dans la librairie CIMLIB. Des travaux sont actuellement poursuivis au laboratoire sur ces problématiques. L'utilisation d'une condition de Navier généralisée qui contient un terme contenant les angles de contact statique et dynamique, est utilisée pour prendre en compte les angles de contact dynamiques. De plus, cela permettrait de coupler directement l'angle de contact et la vitesse de la ligne triple.

Des travaux sont également effectués pour appliquer la condition de Navier sur une interface diffuse. La principale difficulté est que la formulation éléments finis utilisée n'autorise pas de saut de vitesse à l'interface. L'idée est de créer une zone de transition la plus fine possible afin d'obtenir une variation linéaire entre la vitesse obtenue par la condition de Navier sur l'interface et la vitesse du solide.

Ce travail de thèse a donc finalement permis de mettre en place une grande partie des méthodes nécessaires aux calculs d'écoulement dans les renforts et au calcul de la perméabilité à l'échelle microscopique et à l'échelle mésoscopique, pour nourrir respectivement des codes de simulation mésoscopiques et macroscopiques. Un travail est nécessaire afin d'obtenir un champ d'orientation des fibres dans la mèche pour pouvoir prendre en compte correctement le tenseur de perméabilité dans le solveur de Brinkman qui doit être modifié en conséquence. Ce travail ouvre ainsi des perspectives intéressantes pour entrer dans le domaine de la simulation numérique d'injection dans les renforts tissés, où PAM-RTM est actuellement l'un des logiciels leader sur le marché. La prise en compte des phénomènes capillaires permettrait de prédire l'apparition de défauts dans la pièce et ainsi d'optimiser

le procédé afin de les éviter.

De plus, la simulation des phénomènes de tension de surface ouvre vers l'étude de nouveaux procédés, centrés sur les technologies microscopiques et nanoscopiques, de plus en plus courantes.



# Annexe A

## Formulation éléments finis et stabilisation de la méthode CSS

### A.1 Formulation éléments finis

La formulation éléments finis de Stokes a déjà été développée précédemment (section 2.2.1 page 40). Nous allons donc seulement développer ce terme de second membre tensoriel sur l'élément de référence :

$$\int_{\Omega} \mathbb{T} : \nabla \vec{w} \, d\Omega = \int_{\hat{\Omega}} \mathbb{T} : \nabla \vec{w} \mathbb{J}^{-1} |\mathbb{J}| \, d\hat{\Omega} \quad (\text{A.1})$$

où  $\hat{\Omega}$  est l'élément de référence et  $\mathbb{J}$  est le jacobien de la transformation de l'espace de référence vers l'espace réel.

Dans la suite, nous écrivons  $\partial_x, \partial_y, \partial_\xi$  et  $\partial_\zeta$  pour respectivement  $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial \xi}$  et  $\frac{\partial}{\partial \zeta}$ . Nous n'utilisons pas la notation d'Einstein. Ainsi, lorsque nous écrivons  $T_{11,3}$  cela signifie que nous prenons la valeur au nœud 3 de la composante  $T_{11}$  du tenseur  $\mathbb{T}$ .

Le produit doublement contracté s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mathbb{T} : \nabla \vec{w} &= \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \partial_x w_x & \partial_y w_x \\ \partial_x w_y & \partial_y w_y \end{pmatrix} \\ &= T_{11} \partial_x w_x + T_{12} \partial_y w_x + T_{21} \partial_x w_y + T_{22} \partial_y w_y \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

en l'exprimant par composante, nous devons calculer :

$$\begin{aligned} T_{11} \partial_x w_x + T_{12} \partial_y w_x \\ T_{21} \partial_x w_y + T_{22} \partial_y w_y \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Nous allons nous concentrer, dans la suite, sur la première composante :

$$T_{11} \partial_x w_x + T_{12} \partial_y w_x \quad (\text{A.4})$$

que nous écrivons sous forme discrète, en utilisant les fonctions de formes :

$$w_x = \sum_{j=1}^{nbne} \phi_j \quad (\text{A.5})$$

où  $nbne$  est le nombre de nœuds par élément. On obtient donc :

$$T_{11,i}\partial_x\phi_j + T_{12,i}\partial_y\phi_j \quad (\text{A.6})$$

ou encore :

$$\begin{pmatrix} T_{11,1}\partial_x\phi_1 + T_{12,1}\partial_y\phi_1 \\ T_{11,2}\partial_x\phi_2 + T_{12,2}\partial_y\phi_2 \\ T_{11,3}\partial_x\phi_3 + T_{12,3}\partial_y\phi_3 \end{pmatrix} \quad (\text{A.7})$$

Étant donné que nous utilisons le gradient  $\nabla c$ , le tenseur d'extra-contrainte est constant sur l'élément. Dans ce cas, nous avons :

$$\begin{pmatrix} T_{11}\partial_x\phi_1 + T_{12}\partial_y\phi_1 \\ T_{11}\partial_x\phi_2 + T_{12}\partial_y\phi_2 \\ T_{11}\partial_x\phi_3 + T_{12}\partial_y\phi_3 \end{pmatrix} \quad (\text{A.8})$$

La forme faible de ce terme s'écrit donc :

$$\int_{\Omega} T_{11}\partial_x w_x + T_{12}\partial_y w_x \, d\Omega = \int_{\hat{\Omega}} (T_{11}\partial_{\xi} w_x J_{11}^{-1} + T_{11}\partial_{\eta} w_x J_{21}^{-1} + T_{12}\partial_{\xi} w_x J_{12}^{-1} + T_{12}\partial_{\eta} w_x J_{22}^{-1}) |J| \, d\hat{\Omega} \quad (\text{A.9})$$

Sous sa forme discrète :

$$= \sum_i^{nbne} \int_{\hat{\Omega}} (T_{11,i}\partial_{\xi}\phi_i J_{11}^{-1} + T_{11,i}\partial_{\eta}\phi_i J_{21}^{-1} + T_{12,i}\partial_{\xi}\phi_i J_{12}^{-1} + T_{12,i}\partial_{\eta}\phi_i J_{22}^{-1}) |J| \, d\hat{\Omega} \quad (\text{A.10})$$

Et en approximant les intégrales :

$$= \sum_{i=1}^{nbne} \sum_{g=1}^{nbpie} \omega_g \left( T_{11,ig} \partial_{\xi}\phi_i|_g J_{11}^{-1} + T_{11,ig} \partial_{\eta}\phi_i|_g J_{21}^{-1} + T_{12,ig} \partial_{\xi}\phi_i|_g J_{12}^{-1} + T_{12,ig} \partial_{\eta}\phi_i|_g J_{22}^{-1} \right) |J| \, d\hat{\Omega} \quad (\text{A.11})$$

où  $nbpie$  est le nombre de points d'intégration par éléments.

## A.2 Stabilisation de la formulation

Le second membre de l'équation (4.18) s'écrit :

$$\int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{w} + \int_{\Omega} \mathbb{T} : \nabla \vec{w} \quad (\text{A.12})$$

Pour le terme de bulle, nous aurons donc :

$$\int_{\Omega} f \tilde{w}_h^b \, dV + \int_{\Omega} \mathbb{T} : \nabla \tilde{w}_h^b \quad (\text{A.13})$$

C'est ce second terme que nous allons développer. Lorsqu'on intègre le terme d'extra-contrainte sur la bulle :

$$\int_{\Omega} \mathbb{T} : \nabla w_h^b = \int_{\hat{\Omega}} \mathbb{T} : \nabla w_h^b J^{-1} |J| \quad (\text{A.14})$$

Comme précédemment, on écrit pour une composante :

$$\int_{\hat{\Omega}} [T_{11} (\partial_{\xi} N_{\beta} J_{11}^{-1} + \partial_{\eta} N_{\beta} J_{21}^{-1}) + T_{12} (\partial_{\xi} N_{\beta} J_{12}^{-1} + \partial_{\eta} N_{\beta} J_{22}^{-1})] |\mathbb{J}| \quad (\text{A.15})$$

La bulle est P1 sur chaque sous-triangle. Sa dérivée est donc P0. Étant donné que  $J$  ne dépend que des coordonnées des noeuds de l'élément, on peut donc écrire (pour la première partie de l'intégrale) :

$$\begin{aligned} & \int_{\hat{\Omega}} T_{11} (\partial_{\xi} N_{\beta} J_{11}^{-1} + \partial_{\eta} N_{\beta} J_{21}^{-1}) |\mathbb{J}| \\ &= \sum_k \int_{\hat{\Omega}_k} T_{11} (\partial_{\xi} N_{\beta_k} J_{11}^{-1} + \partial_{\eta} N_{\beta_k} J_{21}^{-1}) |\mathbb{J}| \\ &= \sum_k (\partial_{\xi} N_{\beta_k} J_{11}^{-1} + \partial_{\eta} N_{\beta_k} J_{21}^{-1}) \int_{\hat{\Omega}_k} T_{11} |\mathbb{J}| \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

On peut écrire :

$$\int_{\hat{\Omega}_k} T_{11} d\Omega \sim \frac{\int_{\hat{\Omega}} T_{11} d\Omega}{D} \quad (\text{A.17})$$

où  $D = 3$  dans notre cas (2D). Ainsi :

$$\begin{aligned} \sum_k (\partial_{\xi} N_{\beta_k} J_{11}^{-1} + \partial_{\eta} N_{\beta_k} J_{21}^{-1}) |\mathbb{J}| \frac{\int_{\hat{\Omega}} T_{11} d\Omega}{3} &= (\partial_{\xi} N_{\beta_1} J_{11}^{-1} + \partial_{\eta} N_{\beta_1} J_{21}^{-1}) |\mathbb{J}| \frac{\int_{\hat{\Omega}} T_{11} d\Omega}{3} \\ &+ (\partial_{\xi} N_{\beta_2} J_{11}^{-1} + \partial_{\eta} N_{\beta_2} J_{21}^{-1}) |\mathbb{J}| \frac{\int_{\hat{\Omega}} T_{11} d\Omega}{3} \\ &+ (\partial_{\xi} N_{\beta_3} J_{11}^{-1} + \partial_{\eta} N_{\beta_3} J_{21}^{-1}) |\mathbb{J}| \frac{\int_{\hat{\Omega}} T_{11} d\Omega}{3} \\ &= [(\partial_{\xi} N_{\beta_1} + \partial_{\xi} N_{\beta_2} + \partial_{\xi} N_{\beta_3}) J_{11}^{-1} + (\partial_{\eta} N_{\beta_1} + \partial_{\eta} N_{\beta_2} + \partial_{\eta} N_{\beta_3}) J_{21}^{-1}] |\mathbb{J}| \frac{\int_{\hat{\Omega}} T_{11} d\Omega}{3} \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Si on calcule les dérivées de ces fonctions de forme, on trouve que :

$$\begin{aligned} N_1 &= 1 - \xi - \eta & \partial_{\xi} N_1 &= -1 & \partial_{\eta} N_1 &= -1 \\ N_2 &= \xi & \partial_{\xi} N_2 &= 1 & \partial_{\eta} N_2 &= 0 \\ N_3 &= \eta & \partial_{\xi} N_3 &= 0 & \partial_{\eta} N_3 &= 1 \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

On obtient donc :

$$[(-3 + 3 + 0) J_{11}^{-1} + (-3 + 3 + 0) J_{21}^{-1}] |\mathbb{J}| \frac{\int_{\hat{\Omega}} T_{11} d\Omega}{3} = 0 \quad (\text{A.20})$$

Nous voyons donc que l'emploi du MINI-élément avec une approximation de bulle linéaire par sous-triangle conduit à un terme de stabilisation nul pour cette extra-contrainte. Cependant, cela ne signifie pas forcément que ce terme n'a pas à être pris en compte dans la stabilisation. Un travail est actuellement en cours au laboratoire pour traiter ce problème de stabilisation d'une formulation de Stokes avec extra contrainte.



# Annexe B

## Résultats de validation de la méthode CSF avec la loi de Laplace

Cette annexe regroupe les résultats de validation de la méthode CSF. Ces résultats montrent également l'étude de sensibilité aux paramètres numériques que sont l'épaisseur de mélange de la viscosité, l'épaisseur de lissage du Dirac et la taille de maille.

Les graphiques des figures B.1 et B.2 montrent les normes  $L_2$  normalisées des erreurs en vitesse et en pression pour la bulle statique. Les graphiques des figures B.3 et B.4 donnent les erreurs max obtenues. Chacun des six graphiques d'une figure correspond à une épaisseur de la zone de mélange de la viscosité. Nous avons tracé l'erreur en fonction de la taille de maille pour différentes épaisseurs du Dirac.

Les résultats sont donnés pour une viscosité définie aux éléments (viscosité  $P0$ ) et pour cinq épaisseurs de mélange pour une loi de mélange linéaire de la viscosité définie aux nœuds. La fonction de Dirac est toujours définie aux nœuds. Les épaisseurs sont données en taille de maille  $h$ . Ainsi, une légende indiquant *Dirac 2h* signifie que les résultats sont donnés pour une fonction de Dirac dont le lissage se fait sur une épaisseur de deux éléments.

Les sigles sont constants pour chaque graphique. Ainsi, le Dirac d'épaisseur  $2h$  sera toujours représenté par un losange, un Dirac d'épaisseur  $4h$  par un rond et ainsi de suite.

### B.1 Norme $L_2$ de l'erreur

#### B.1.1 La vitesse

Les résultats pour la vitesse sont donnés figure B.1. Le champ de viscosité défini aux éléments donne l'erreure maximale. Ce n'est donc pas un bon choix lorsque l'on souhaite prendre en compte les phénomènes de tension de surface.

Les résultats pour l'épaisseur du Dirac de  $1h$  et  $2h$  sont les plus chahutés. Cela traduit une mauvaise représentation de ce Dirac, qui introduit des erreurs numériques. Les résultats sont beaucoup plus lisses pour un Dirac d'épaisseur minimale  $4h$ .

Les quatre derniers graphiques montrent que l'erreur augmente beaucoup lorsque le Dirac à une épaisseur supérieure à celle du mélange de viscosité. En effet, pour les graphique à viscosité  $2h$ ,  $4h$  et  $6h$ , les courbes pour des Diracs plus larges que le mélange de

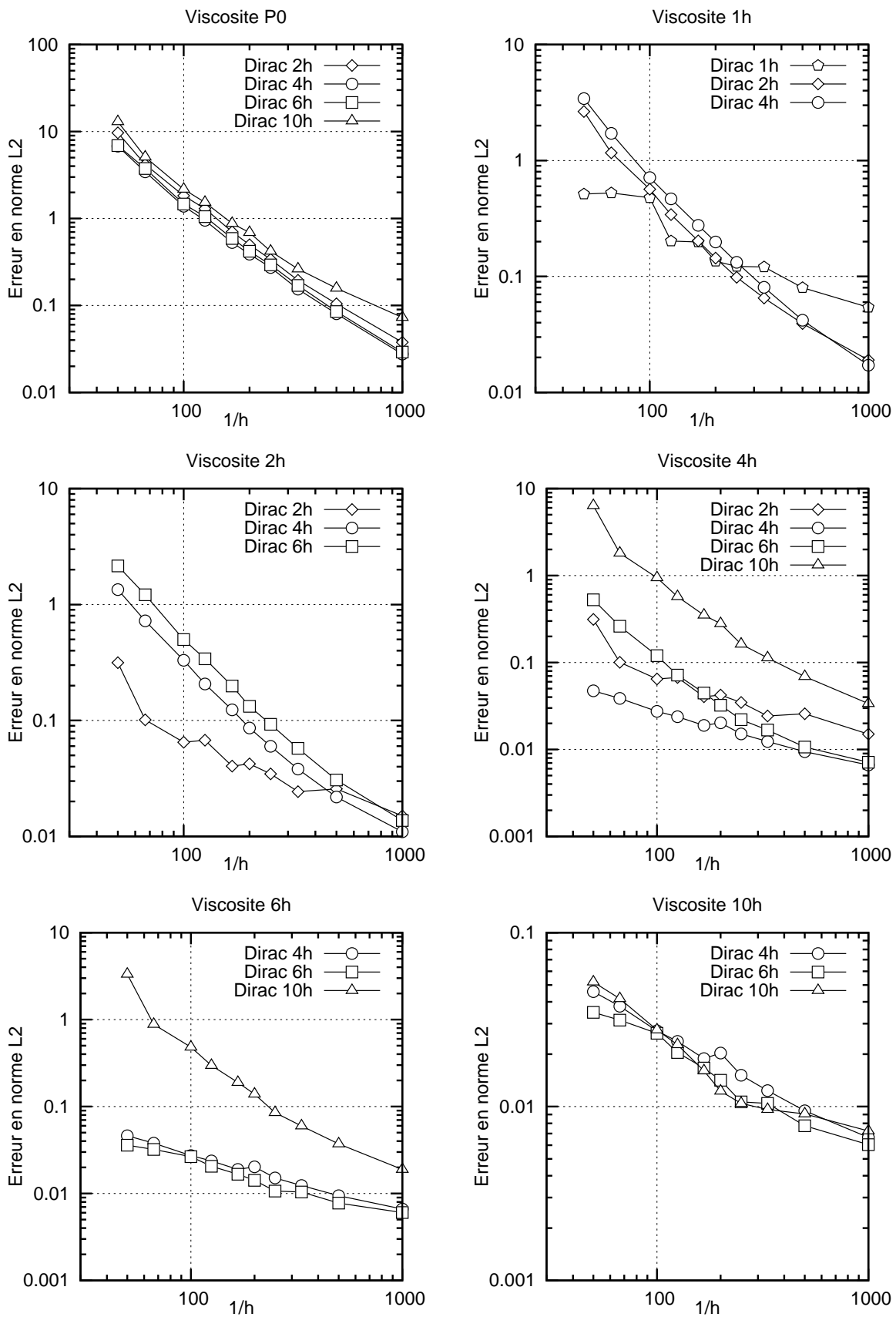


FIGURE B.1 – Norme  $L_2$  normalisé de l'erreur sur la vitesse pour différentes épaisseurs du mélange de viscosité et du Dirac (méthode CSF).

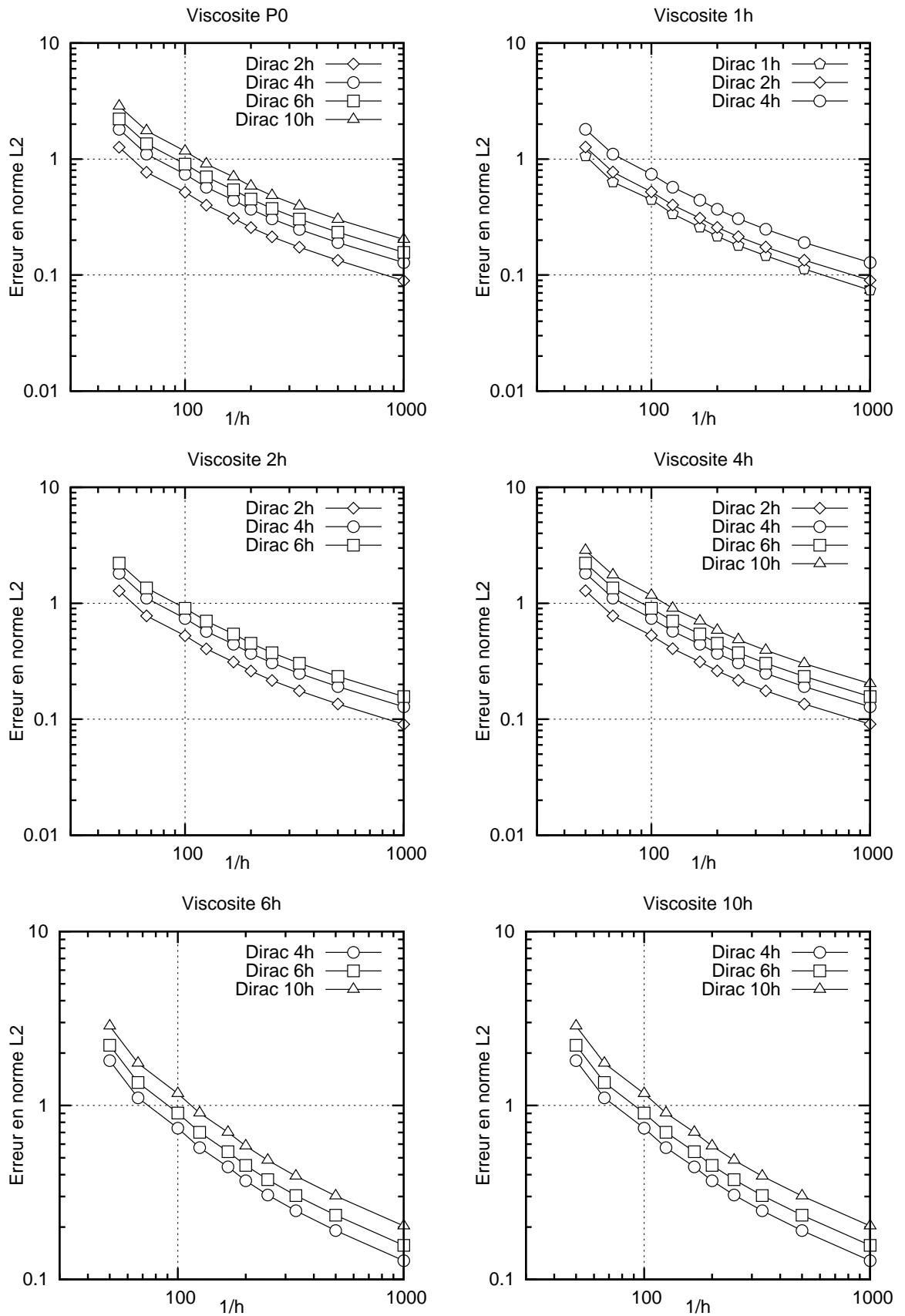


FIGURE B.2 – Norme  $L_2$  normalisé de l'erreur sur la pression pour différentes épaisseurs du mélange de viscosité et du Dirac (méthode CSF).

viscosité sont nettements à l'écart des courbes à Dirac de même épaisseur que la viscosité.

Les courbes pour des diracs plus fins que le mélange de viscosité sont également au dessus des courbes à Dirac de même épaisseurs, mais l'écart est beaucoup plus faible. Cela mène à la conclusion que la loi de mélange de viscosité et le Dirac doivent être de même épaisseur pour obtenir une précision maximale.

### **B.1.2 La pression**

Les résultats pour la pression sont donnés figure B.2. Elle ne montre aucune sensibilité à l'épaisseur de la loi de mélange. En revanche, elle montre que le Dirac doit être le plus fin possible.

## B.2 Norme *max* de l'erreur

L'étude de la norme maximale de l'erreur est importante, car si le champ de vitesse est très localement de très forte amplitude, il risque d'avoir un effet non négligeable sur le déplacement de l'interface au cours du temps, pour des simulations instationnaires.

### B.2.1 La vitesse

Les résultats pour la vitesse sont donnés figures B.3. Il est clair que l'erreur est plus importante pour un mélange de viscosité défini aux éléments. Nous remarquons, sur les courbes pour les champs de viscosités définis aux nœuds, que l'erreur maximale est la plus faible lorsque le Dirac a la même épaisseur que le mélange de viscosité. La même observation a été faite pour la norme  $L_2$  de l'erreur sur la vitesse. Pour le mélange de viscosité d'épaisseur  $10h$ , les conclusions sont plus difficiles à porter.

Sur les 6 graphiques, nous voyons que l'erreur maximale est la plus faible pour une épaisseur de mélange de la viscosité et de lissage du Dirac de  $6h$ .

### B.2.2 La pression

Pour la pression, les résultats sont donnés figure B.4. Il est clair, sur ces graphiques, que l'erreur maximale sur la pression est très peu sensible à l'épaisseur de mélange de la viscosité et à l'épaisseur du Dirac. Nous remarquons également qu'elle ne dépend pas de la taille de maille.

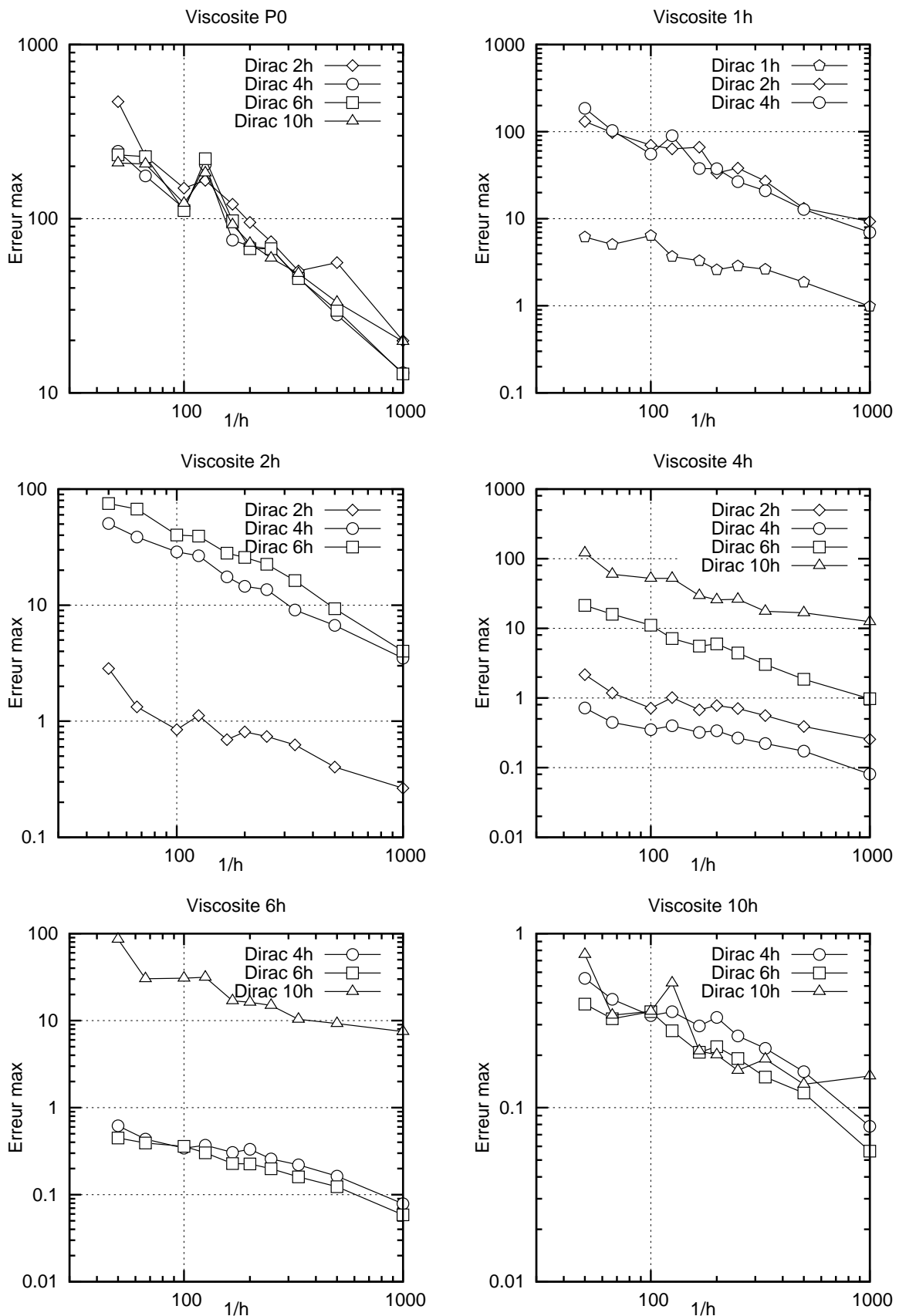


FIGURE B.3 – Erreur maximale de la vitesse pour différentes épaisseurs du mélange de viscosité et du Dirac (méthode CSF).

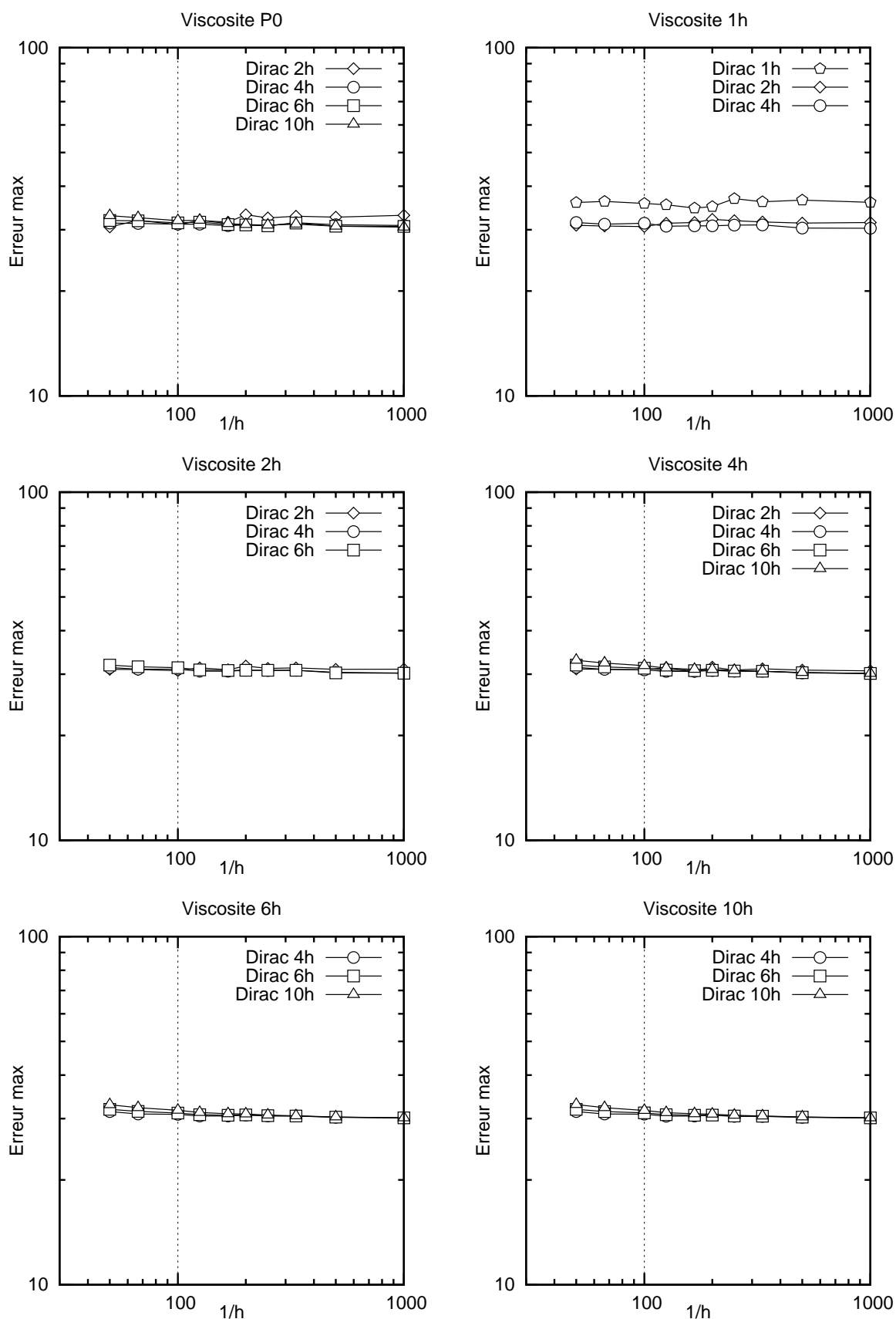


FIGURE B.4 – Erreur maximale de la pression pour différentes épaisseurs du mélange de viscosité et du Dirac (méthode CSF).



# Annexe C

## Résultats de validation de la méthode CSS avec la loi de Laplace

Cette annexe regroupe les résultats de validation de la méthode CSS. Ces résultats montrent également l'étude de sensibilité aux paramètres numériques que sont l'épaisseur de mélange de la viscosité, l'épaisseur de lissage du Dirac et la taille de maille.

Les graphiques des figures C.1 et C.2 montrent les normes  $L_2$  normalisées des erreurs en vitesse et en pression pour la bulle statique. Les graphiques des figures C.3 et C.4 donnent les erreurs max obtenues. Chacun des six graphiques d'une figure correspond à une épaisseur de la zone de mélange de la viscosité. Nous avons tracé l'erreur en fonction de la taille de maille pour différentes épaisseurs du Dirac.

Les résultats sont donnés pour une viscosité définie aux éléments (viscosité  $P0$ ) et pour cinq épaisseurs de mélange pour une loi de mélange linéaire de la viscosité définie aux nœuds. La fonction de Dirac est toujours définie aux nœuds. Les épaisseurs sont données en taille de maille  $h$ . Ainsi, une légende indiquant *Dirac 2h* signifie que les résultats sont donnés pour une fonction de Dirac dont le lissage se fait sur une épaisseur de deux éléments.

Les sigles sont constants pour chaque graphique. Ainsi, le Dirac d'épaisseur  $2h$  sera toujours représenté par un losange, un Dirac d'épaisseur  $4h$  par un rond et ainsi de suite.

### C.1 Norme $L_2$ de l'erreur

#### C.1.1 La vitesse

Les résultats pour la vitesse sont donnés figure C.1. Comme pour la méthode CSF dont les résultats sont présentés annexe B, l'utilisation d'une viscosité définie aux éléments donne la précision la plus faible sur la vitesse.

Si nous nous attardons sur les courbes de viscosités définies aux nœuds, nous voyons, contrairement à la méthode CSF, une nette différence entre les courbes pour un Dirac d'épaisseur plus grande que le mélange de viscosité et les courbes pour un Dirac d'épaisseur égale ou plus faible. Nous avons toujours une erreur bien plus forte lorsque le Dirac est plus large. Par contre, la précision la plus basse est toujours obtenue pour un Dirac d'épaisseur légèrement plus faible que le mélange de viscosité. Par exemple, lorsque ce

dernier est d'épaisseur  $6h$ , prendre un Dirac d'épaisseur  $4h$  donnera des résultats plus précis que pour un Dirac d'épaisseur  $6h$ .

Pour le cas à viscosité d'épaisseur  $10h$ , les conclusions sont plus difficiles à faire. Il semblerait qu'un Dirac trop large conduira forcément à un résultat très peu précis.

### **C.1.2 La pression**

En ce qui concerne la pression, les résultats sont donnés figure C.2. Comme pour la méthode CSF, l'erreur sur la pression est indépendante de l'épaisseur de mélange de la viscosité. Nous pouvons observer que l'erreur minimale est obtenue pour un Dirac d'épaisseur  $4h$ .

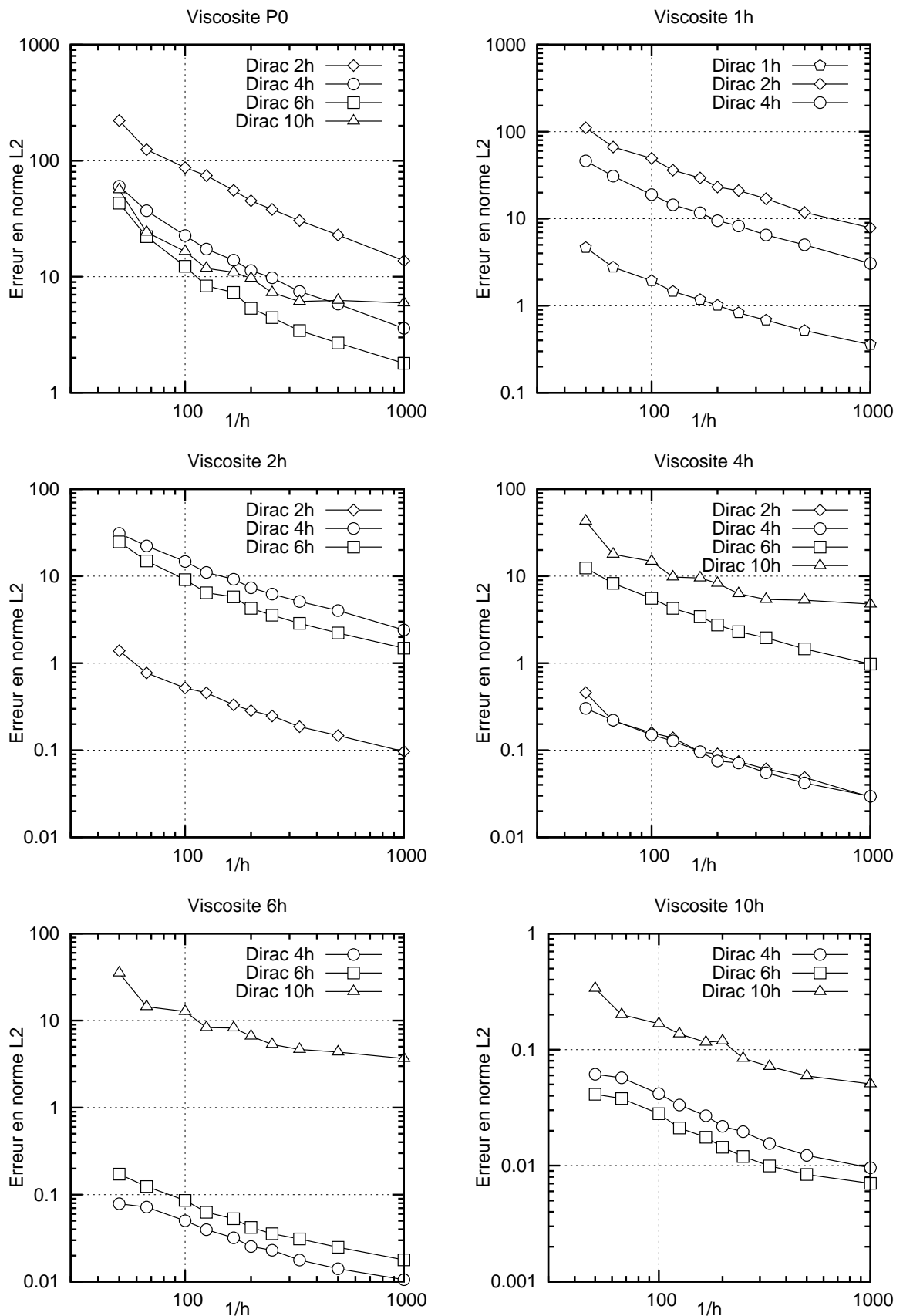


FIGURE C.1 – Norme  $L_2$  normalisé de l'erreur sur la vitesse pour différentes épaisseurs du mélange de viscosité et du Dirac (méthode CSS).

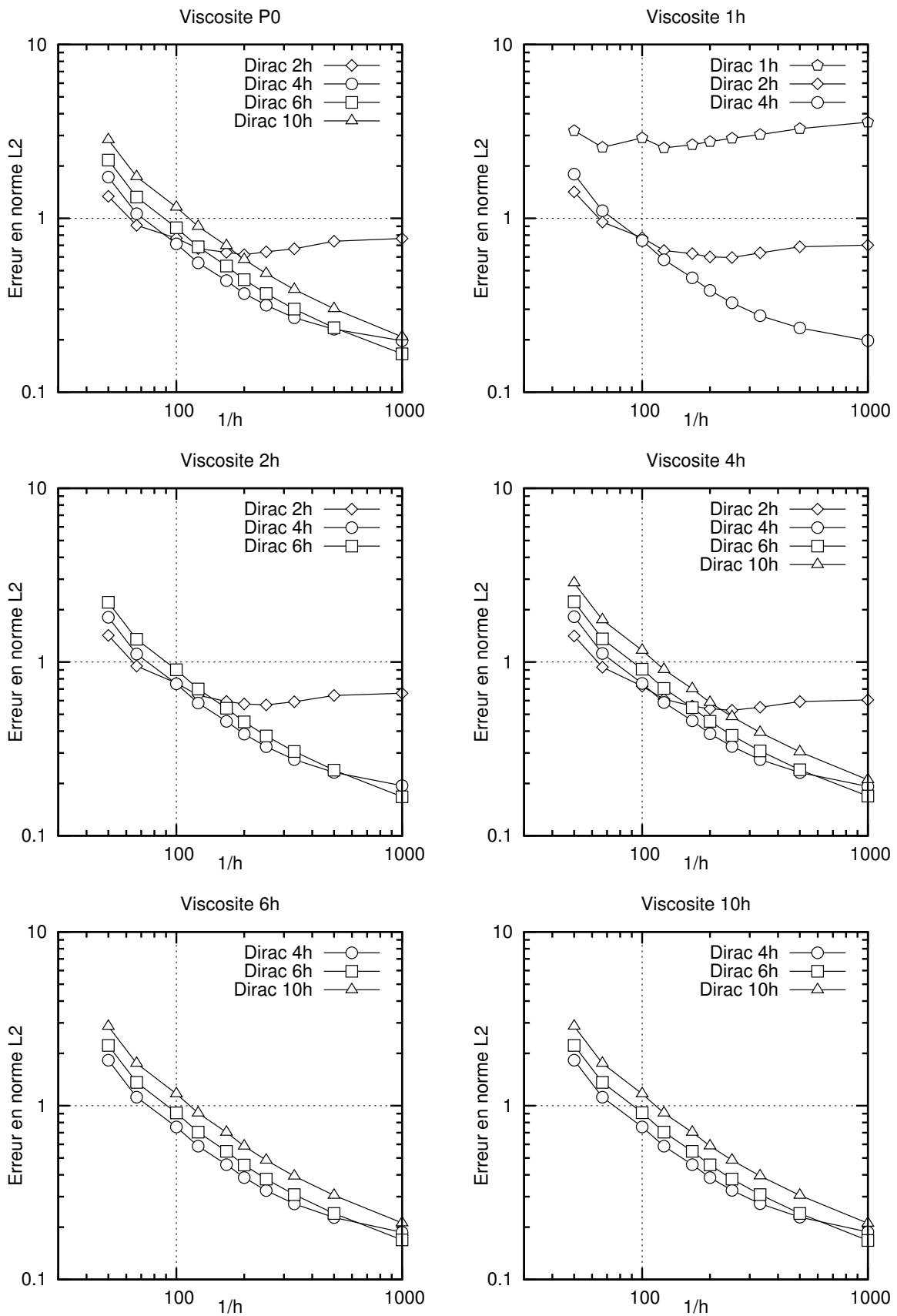


FIGURE C.2 – Norme  $L_2$  normalisé de l'erreur sur la pression pour différentes épaisseurs du mélange de viscosité et du Dirac (méthode CSS).

## C.2 Norme *max* de l'erreur

Les résultats pour la vitesse sont donnés figure C.3. Les conclusions sur l'évolution de l'erreur en fonction de l'épaisseur de mélange de la viscosité et de l'épaisseur du Dirac sont les mêmes que pour la norme  $L_2$ , à savoir que l'erreur est minimale pour une épaisseur de Dirac un peu plus faible que l'épaisseur de mélange de la viscosité.

En revanche, un point important à remarquer est que la précision reste relativement constante en fonction de la taille de maille. En ce qui concerne la pression (figure C.4), la précision diminue énormément avec la diminution de la taille de maille.

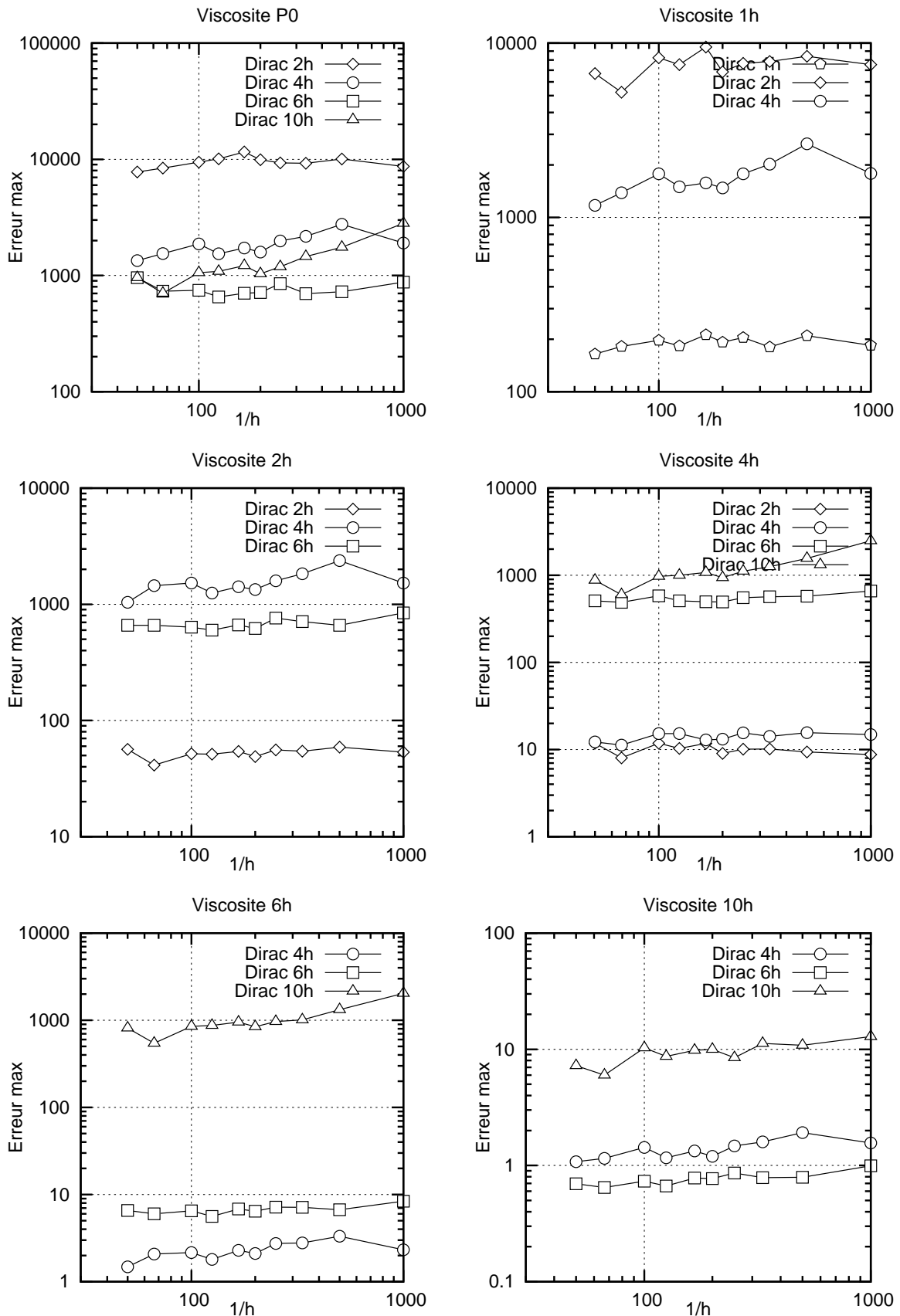


FIGURE C.3 – Erreur maximale de la vitesse pour différentes épaisseurs du mélange de viscosité et du Dirac (méthode CSS).

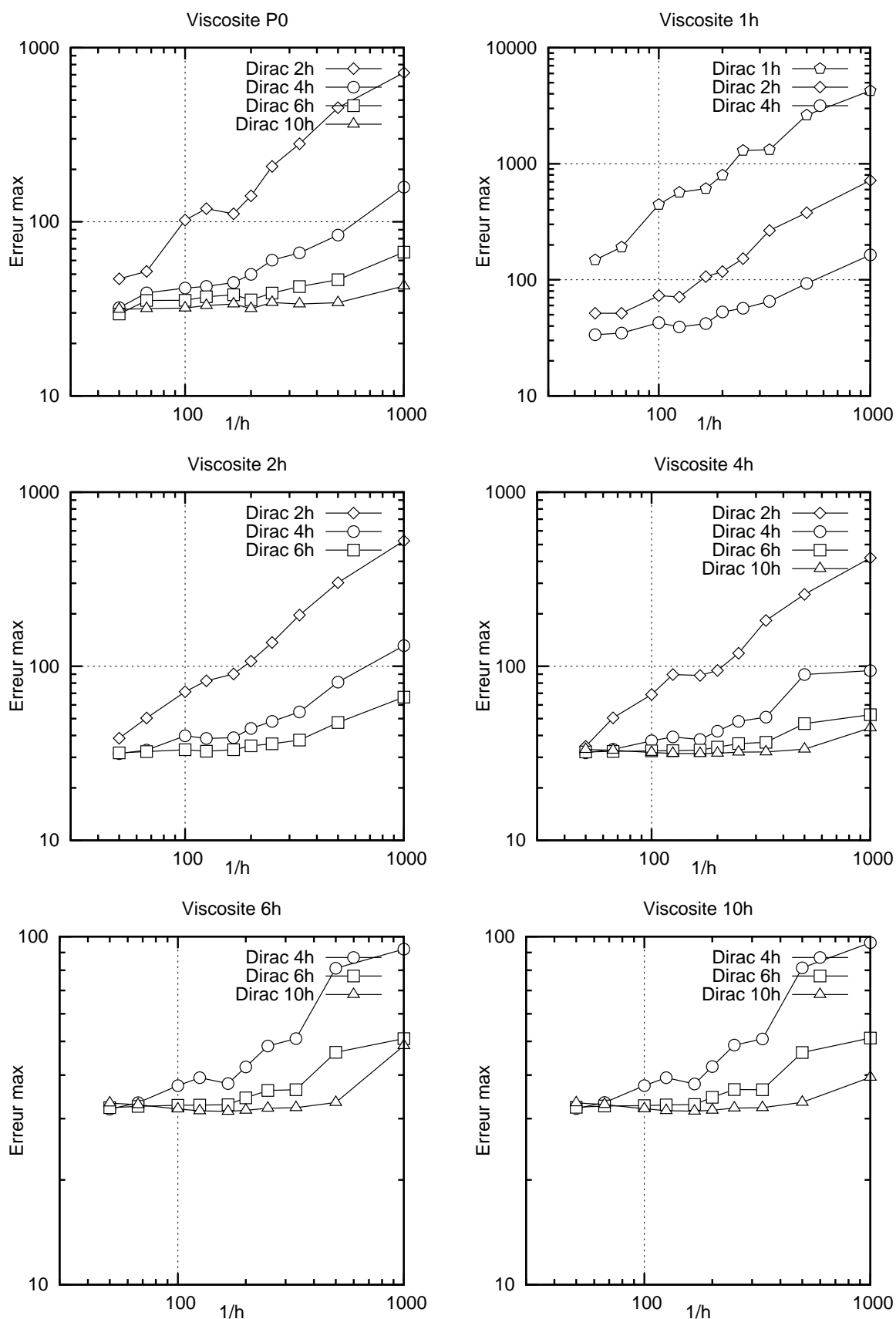


FIGURE C.4 – Erreur maximale de la pression pour différentes épaisseurs du mélange de viscosité et du Dirac (méthode CSS).



# Bibliographie

- [AB08a] S. AFKHAMI et M. BUSSMANN : Height functions for applying contact angles to 2D VOF simulations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 57(4):453–472, 2008.
- [AB08b] S. AFKHAMI et M. BUSSMANN : Height functions for applying contact angles to 3D VOF simulations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2008.
- [ABF84] D. ARNOLD, F. BREZZI et M. FORTIN : A stable finite element for the Stokes equations. *Calcolo*, 21(4):337–344, 1984.
- [AZB09] S. AFKHAMI, S. ZALESKI et M. BUSSMANN : A mesh-dependent model for applying dynamic contact angles to VOF simulations. *Journal of Computational Physics*, 228(15):5370–5389, 2009.
- [BA93] M. V. BRUSCHKE et S. G. ADVANI : Flow of generalized newtonian fluids across a periodic array of cylinders. *Journal of Rheology* , 37(3):479–498, 1993.
- [Bas06] O. BASSET : *Simulation numérique d'écoulements multi-fluides sur grille de calcul*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2006.
- [Bat67] G. K. BATCHELOR : *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge university press, 1967.
- [BB86] Y. BACHMAT et J. BEAR : Macroscopic modelling of transport phenomena in porous media. 1 : The continuum approach. *Transport in Porous Media*, 1:213–240, 1986.
- [BDC09] J. BRUCHON, H. DIGONNET et T. COUPEZ : Using a signed distance function for the simulation of metal forming processes : Formulation of the contact condition and mesh adaptation. from a lagrangian approach to an eulerian approach. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 78:980–1008, 2009.
- [Bea72] J. BEAR : *Dynamics of fluids in porous media*. Elsevier, 1972.
- [Bea08] G. BEAUME : *Modélisation et simulation numérique directe de l'écoulement d'un fluide complexe*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2008.
- [Bel01] M. BELLET : Implementation of surface tension with wall adhesion effects in a three-dimensional finite element model for fluid flow. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 17:563–579, 2001.

- [BFBB06] J. BRUCHON, A. FORTIN, M. BOUSMINA et K. BENMOUSSA : Direct 2D simulation of small gas bubble clusters : from the expansion step to the equilibrium state. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 54(1):73–101, 2006.
- [BFD98] A. BÉLIVEAU, A. FORTIN et Y. DEMAY : A two-dimensional numerical method for the deformation of drops with surface tension. *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, 10(3):225–240, 1998.
- [Bik77] J. J. BIKERMAN : Capillarity before Laplace : Clairaut, Segner, Monge, Young. *Archive for history of exact sciences*, 18(2):103–122, 1977.
- [BJ67] G. S. BEAVERS et D. D. JOSEPH : Boundary conditions at naturally permeable wall. *Journal of Fluid Mechanics*, 30(1):197–207, 1967.
- [BKZ92] J.U. BRACKBILL, D. B. KOTHE et C. ZEMACH : A continuum method for modeling surface tension. *Journal of Computational Physics*, 100(2):335–354, 1992.
- [Bla22] F.C. BLAKE : The resistance of packing to fluid flow. *Transactions of the American Institute of Chemical Engineers*, 14:415–421, 1922.
- [BLC11] M. BERNACKI, R.E. LOGE et T. COUPEZ : Level set framework for the finite element modelling of recrystallization and grain growth in polycrystalline materials. *Scripta Materialia*, 64(6):525–528, 2011.
- [BLV<sup>+</sup>04] E.B. BELOV, S.V. LOMOV, I. VERPOEST, T. PETERS, D. ROOSE, R.S. PARNAS, K. HOES et H. SOL : Modelling of permeability of textile reinforcements : Lattice Boltzmann Method. *Composites Science and Technology*, 64(7-8):1069–1080, 2004.
- [Bon05] T. BONOMETTI : *Développement d'une méthode de simulation d'écoulements à bulles et à gouttes*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse, 2005.
- [BRCL09] M. BERNACKI, H. RESK, T. COUPEZ et R. E. LOGE : Finite element model of primary recrystallization in polycrystalline aggregates using a level set framework. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, 17(6):1–22, 2009.
- [Bré97] J. BRÉARD : *Matériaux composites à matrice polymère : Modélisation numérique de la phase de remplissage du procédé R.T.M. et détermination expérimentale de la perméabilité d'un renfort fibreux*. Thèse de doctorat, Université du Havre, 1997.
- [BYC06] M. BAHRAMI, M. M. YOVANOVICH et J. R. CULHAM : Pressure drop of fully-developped, laminar flow in microchannels of arbitrary cross-section. *ASME Journal of fluids engineering*, 128(5):1036–1044, 2006.
- [Car61] P.C. CARMAN : *L'écoulement des gaz à travers les milieux poreux*. Institut National des Sciences et Techniques Nucléaires, 1961.
- [Car06] L. CARAMARO : Textiles à usage technique. *Techniques de l'Ingénieur*, N2511, 2006.
- [CdACR01] M. L. COSTA, S. F. M. de ALMEIDA et M. CERQUEIRA-REZENDE : The influence of porosity on the interlaminar shear strength of carbon/epoxy and

- carbon/bismaleimide fabric laminates. *Composites Science and Technology*, 61(14):2101–2108, 2001.
- [CESS06] A.R. CHAMBERS, J.S. EARL, C.A. SQUIRES et M.A. SUHOT : The effect of voids on the flexural fatigue performance of unidirectional carbon fibre composites developed for wind turbine applications. *International Journal of Fatigue*, 28(10):1389–1398, 2006.
- [CFL67] R. COURANT, K. FRIEDRICHS et H. LEWY : On the partial difference equations of mathematical physics. *IBM Journal of Research and Development*, 11(2):215–234, 1967. Traduction anglaise de l’original en Allemand de 1928.
- [CKM09] Y. CHEN, R. KULENOVIC et R. MERTZ : Numerical study on the formation of Taylor bubbles in capillary tubes. *International Journal of Thermal Sciences*, 48(2):234–242, 2009.
- [CL09] M.R. CORREA et A.F.D. LOULA : A unified mixed formulation naturally coupling Stokes and Darcy flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198(33-36):2710–2722, 2009.
- [CMK09] Y. CHEN, R. MERTZ et R. KULENOVIC : Numerical simulation of bubble formation on orifice plates with a moving contact line. *International Journal of Multiphase Flow*, 35(1):66–77, 2009.
- [Cou07] F. COUDERC : *Développement d’un code de calcul pour la simulation d’écoulements de fluides non miscibles. Application à la désintégration assistée d’un jet liquide par un courant gazeux*. Thèse de doctorat, ENSAE - Toulouse, 2007.
- [Cou11] T. COUPEZ : Metric construction by length distribution tensor and edge based error for anisotropic adaptive meshing. *Journal of Computational Physics*, 230(7):2391–2405, 2011.
- [CP07] X. CHEN et T.D. PAPATHANASIOU : Micro-scale modeling of axial flow through unidirectional disordered fiber arrays. *Composites Science and Technology*, 67(7-8):1286–1293, 2007.
- [CP08] X. CHEN et T. D. PAPATHANASIOU : The transverse permeability of disordered fiber arrays : a statistical correlation in terms of the mean nearest interfiber spacing. *Transport in Porous Media*, 71(2):233–251, 2008.
- [CS08] J. CHOI et G. SON : Numerical study of droplet motion in a microchannel with different contact angles. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 22(12):2590–2599, 2008.
- [CZ08] Y. CHEN et K. ZHU : A study of the upper limit of solid scatters density for gray Lattice Boltzmann Method. *Acta Mechanica Sinica*, 24(5):515–522, 2008.
- [Dar56] H. DARCY : *Les fontaines publiques de la ville de Dijon*. Victor DALMONT Éditeur, 1856.
- [DBSC07] H DIGONNET, M. BERNACKI, L SILVA et T COUPEZ : Adaptation de maillage en parallèle, application à la simulation de la mise en forme des matériaux. In *18e Congrès Français de Mécanique, Grenoble, 27-31 août 2007*, 2007.

- [DC02] M. DAUCHIER et J.-C. CAVALIER : Matériaux composites phénoliques ablatifs. *Techniques de l'Ingénieur*, AM 5 325, 2002.
- [DD10] A. K. DAS et P. K. DAS : Equilibrium shape and contact angle of sessile drops of different volumes - computation by SPH and its further improvement by DI. *Chemical Engineering Science*, 65(13):4027–4037, 2010.
- [DGBWQ02] P.-G. DE GENNES, F. BROCHARD-WYART et D. QUÉRÉ : *Gouttes, bulles, perles et ondes*. Belin, 2002.
- [DL09] E. DE LUYCKER : *Simulation et expérimentation en mise en forme de renforts composites 3D interlocks*. Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2009.
- [DL10] J.-B. DUPONT et D. LEGENDRE : Numerical simulation of static and sliding drop with contact angle hysteresis. *Journal of Computational Physics*, 229(7):2453–2478, 2010.
- [Duf99] S. DUFOUR : *Méthodes d'éléments finis adaptatives pour les écoulements multifluides*. Thèse de doctorat, Ecole Polytechnique de Montréal, 1999.
- [DV79] E. B. DUSSAN V. : On the spreading of liquids on solid surfaces : static and dynamic contact lines. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 11:371–400, 1979.
- [EPL90] D. EINZEL, P. PANZER et M. LIU : Boundary condition for fluid flow : curved or rough surface. *Physical Review Letters*, 64(9):2269–2272, 1990.
- [Erg52] S. ERGUN : Fluid flow through packed column. *Chemical Engineering Progress*, 48:199–254, 1952.
- [ESG82] M.S. ENGELMAN, R.L. SANI et P.M. GRESHO : The implementation of normal and/or tangential boundary conditions in finite element codes for incompressible fluid flow. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2(3):225–238, 1982.
- [FHC10] S. FEGHALI, E. HACHEM et T. COUPEZ : Monolithic stabilized finite element method for rigid body motions in the incompressible Navier-Stokes flow. *European Journal of Computational Mechanics*, 19(57):547–573, 2010.
- [FLJ03] V. FRISHFELDS, T.S. LUNDSTRÖM et A JAKOVICS : Permeability of clustered fiber networks : modeling of the unit cell. *Mechanics of Composite Materials*, 39(3):265–272, 2003.
- [Flu06] Fluent Inc. *FLUENT 6.3 User's Guide*, 2006.
- [Geb92] B. R. GEBART : Permeability of unidirectional reinforcements for RTM. *Journal of Composite Materials*, 26(8):1100–1133, 1992.
- [GFH09] R. GUPTA, D. F. FLETCHER et B. S. HAYNES : On the CFD modelling of Taylor flow in microchannels. *Chemical Engineering Science*, 64(12):2941–2950, 2009.
- [GHP01] E. GUYON, J.-P. HULIN et L. PETIT : *Hydrodynamique physique*. CNRS Editions, 2001.
- [GL09] J.-F. GERBEAU et T. LELIÈVRE : Generalized Navier boundary condition and geometric conservation law for surface tension. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198(5-8):644–656, 2009.

- [Gol69] S. GOLDSTEIN : Fluid mechanics in the first half of this century. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 1:1–29, 1969.
- [GOS11] G. N. GATICA, R. OYARZÚA et F.-J. SAYAS : Convergence of a family of Galerkin discretizations for the Stokes-Darcy coupled problem. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 27(3):721–748, 2011.
- [GP07] J. K. GUEST et J. H. PRÉVOST : Design of maximum permeability material structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(4-6):1006–1017, 2007.
- [Gru04] C. GRUAU : *Génération de métriques pour adaptation anisotrope de maillages, applications à la mise en forme des matériaux*. thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2004.
- [Gun92] A. K. GUNSTENSEN : *Lattice-Boltzmann studies of multiphase flow through porous media*. Thèse de doctorat, Massachusetts Institute of Technology, 1992.
- [GV07] C. GALUSINSKI et P. VIGNEAUX : Level-set method and stability condition for curvature-driven flows. *Comptes Rendus de l'Académie des Science Paris, Série I*, 344(11):703–708, 2007.
- [GV08] C. GALUSINSKI et P. VIGNEAUX : On stability condition for bifluid flows with surface tension : Application to microfluidics. *Journal of Computational Physics*, 227(12):6140–6164, 2008.
- [HAA05] Y. K. HAMIDI, L. AKTAS et M. C ALTAN : Three-dimensional features of void morphology in resin transfer molded composites. *Composites Science and Technology*, 65(7-8):1306–1320, 2005.
- [Hap59] J. HAPPEL : Viscous flow relative to arrays of cylinders. *A.I.Ch.E. Journal*, 5(2):174–177, 1959.
- [HHB09] S. D. HONG, M. Y. HA et S. BALACHANDAR : Static and dynamic contact angles of water droplet on a solid surface using molecular dynamics simulation. *Journal of Colloid and Interface Science*, 339(1):187–195, 2009.
- [HLW04] H. HUANG, D. LIANG et B. WETTON : Computation of a moving drop/bubble on a solid surface using a front-tracking method. *Communications in Mathematical Sciences*, 2(4):535–552, 2004.
- [HN81] C. W. HIRT et B. D. NICHOLS : Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries. *Journal of Computational Physics*, 39(1):201–225, 1981.
- [Hoa94] C. HOAREAU : *Injection sur renfort : étude du remplissage de moule et détermination théorique de la perméabilité des tissus*. Thèse de doctorat, ENSMP, 1994.
- [HW65] F. H. HARLOW et J. E. WELCH : Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface. *The Physics of Fluids*, 8(12):2182–2189, 1965.
- [Hym84] J. M. HYMAN : Numerical methods for tracking interfaces. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 12(1-3):396–407, 1984.

- [Jac96] D. JACQMIN : An energy approach to the continuum surface tension method. *In 34th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*. American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA), 1996.
- [Jac99] D. JACQMIN : Calculation of two-phase Navier-Stokes flows using phase-field modeling. *Journal of Computational Physics*, 155(1):96–127, 1999.
- [JJ86] G. W. JACKSON et D. F. JAMES : The permeability of fibrous media. *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, 64(3):364–374, 1986.
- [Joh02] V. JOHN : Slip with friction and penetration with resistance boundary conditions for the Navier-Stokes equations-numerical tests and aspects of the implementation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 147(2):287–300, 2002.
- [JOS79] T.-S. JIANG, S.-G. OH et J. C. SLATTERY : Correlation for dynamic contact angle. *Journal of Colloid and Interface Science*, 69(1):74–77, 1979.
- [JOS07] F. JIANG, M. S.A. OLIVEIRA et A. C.M. SOUSA : Mesoscale SPH modeling of fluid flow in isotropic porous media. *Computer Physics Communications*, 176(7):471–480, 2007.
- [JTB02] D. JAMET, D. TORRES et J. U. BRACKBILL : On the theory and computation of surface tension : the elimination of parasitic currents through energy conservation in the second-gradient method. *Journal of Computational Physics*, 182(1):262–276, 2002.
- [Jur19a] J. JURIN : An account of some experiments shown before the Royal Society ; with an enquiry into the cause of the ascent and suspension of water in capillary tubes. *Philosophical Transactions*, 30:739–747, 1717-1719.
- [Jur19b] J. JURIN : An account of some new experiments, relating to the action of glass tubes upon water and quicksilver. *Philosophical Transactions*, 30:1083–1096, 1717-1719.
- [JVTP08] S. JAGANATHAN, H. VAHDI TAFRESHI et B. POURDEYHIMI : A realistic approach for modeling permeability of fibrous media : 3-D imaging coupled with CFD simulation. *Chemical Engineering Science*, 63(1):244–252, 2008.
- [Koz27] KOZENY : Ueber kapillare leitung des wassers im boden. *Sitzungsber Akad. Wiss.*, 136:271–306, 1927.
- [KWK70] C. P. KYAN, D. T. WASAN et R. C. KINTNER : Flow of single-phase fluid through fibrous beds. *Industrial and Engineering Chemistry Fundamentals*, 9:596–603, 1970.
- [LAD07] A.-C. LESAGE, O. ALLAIN et A. DERVIEUX : On level set modelling of bi-fluid capillary flow. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 53(8):1297–1314, 2007.
- [Lap12a] P.-S. de LAPLACE : *Œuvres complètes de Laplace. Tome 4 / publiées sous les auspices de l'Académie des sciences, par MM. les secrétaires perpétuels*, chapitre Supplément au livre X du traité de mécanique céleste (1806), pages 349–418. Gauthier-Villars (Paris), 1878-1912.
- [Lap12b] P.-S. de LAPLACE : *Œuvres complètes de Laplace. Tome 4 / publiées sous les auspices de l'Académie des sciences, par MM. les secrétaires perpétuels*,

- chapitre Supplément à la théorie de l'action capillaire (1806), pages 419–498. Gauthier-Villars (Paris), 1878-1912.
- [LBS07] E. LAUGA, M. P. BRENNER et H. A. STONE : *Handbook of experimental fluid dynamics*, chapitre 19 Microfluidics : the no-slip boundary condition, pages 1219–1240. Springer, New-York, 2007.
- [Lec99] D. LECOINTE : *Caractérisation et simulation des processus de transferts lors d'injection de résine pour le procédé RTM*. Thèse de doctorat, Université de Nantes, 1999.
- [LGP06] N. LE GRAND-PITEIRA : *Ruissellement avec effets de mouillage : Gouttes et méandres sur un plan incliné*. Thèse de doctorat, Université Paris 7, 2006.
- [LLP07] P. LALLEMAND, L.-S. LUO et Y. PENG : A lattice Boltzmann front-tracking method for interface dynamics with surface tension in two dimensions. *Journal of Computational Physics*, 226(2):1367–1384, 2007.
- [LM99] S. LIU et J. H. MASLIYAH : Non-linear flows in porous media. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 86(1-2):229–252, 1999.
- [LNS<sup>+</sup>94] B. LAFAURIE, C. NARDONE, R. SCARDOVELLI, S. ZALESKI et G. ZANETTI : Modelling merging and fragmentation in multiphase flows with SURFER. *Journal of Computational Physics*, 113(1):134–147, 1994.
- [Lon05] A.C. LONG, éditeur. *Design and manufacture of textile composite*. CRC Press, 2005.
- [LSH08] S. H. LEE, G. SON et N. HUR : Application of a level-set method in gas-liquid interfacial flows. In *EKC2008 : Proceedings of the EU-Korea Conference on Science and Technology*, volume 124, pages 33–43, 2008.
- [LSM96] C. K. LEE, C.-C. SUN et C. C. MEI : Computation of permeability and dispersivities of solute or heat in periodic porous media. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 39(4):661–676, 1996.
- [Lun00] T. LUNDSTRÖM : The permeability of non-crimp stitched fabrics. *Composites Part A*, 1345-1353(12), 2000.
- [Mad05] S. MADASU : Capillary impregnation in a flexible slit : a finite element formulation. *Journal of Computational Physics*, 206(1):277–301, 2005.
- [Mai06] E. MAITRE : Review of numerical methods for free interfaces. In *Ecole Thématique, Modèles de champ de phase pour l'évolution de structures complexes, Les Houches, 27-31 mars 2006*, 2006.
- [Mas07] A. MASUD : A stabilized mixed finite element method for Darcy-Stokes flow. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 54(6-8):665–681, 2007.
- [MGCR07] E. MARCHANDISE, P. GEUZAINÉ, N. CHEVAUGEON et J.-F. REMACLE : A stabilized finite element method using a discontinuous level set approach for the computation of bubble dynamics. *Journal of Computational Physics*, 225(1):949–974, 2007.
- [MK06] A. MASUD et R.A. KHURRAM : A multiscale finite element method for the incompressible Navier-Stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(13-16):1750–1777, 2006.

- [MS10] N. MONTÉS et F. SÁNCHEZ : A new computational tool for liquid composite moulding process design based on configuration spaces. *Composites Part A*, 41:58–77, 2010.
- [MZD<sup>+</sup>08] Y. MESRI, W. ZERGUINE, H. DIGONNET, L. SILVA et T. COUPEZ : Dynamic parallel adaption for three dimensional unstructured meshes : application to interface tracking. In RV GARIMELLA, éditeur : *Proceedings of the 17th International Meshing Roundtable*, pages 195–212, 2008. 17th International Meshing Roundtable, Pittsburgh, PA, OCT 12-15, 2008.
- [Nav22] C. L. NAVIER : Mémoire sur les lois du mouvement des fluides. *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de l'Institut de France*, VI:389–440, 1822.
- [NCW03] C. NETO, V. S. J. CRAIG et D. R. M. WILLIAMS : Evidence of shear-dependent boundary slip in newtonian liquids. *The European Physical Journal E*, 12:s71–s74, 2003.
- [NEB<sup>+</sup>05] C. NETO, D. R. EVANS, E. BONACCURSO, H.-J. BUTT et V. S. J. CRAIG : Boundary slip in newtonian liquids : a review of experimental studies. *Reports on Progress in Physics*, 68:2859–2897, 2005.
- [Nem03] G. NEMOZ : Textures textiles tridimensionnelles. *Techniques de l'Ingénieur*, AM5122, 2003.
- [NL05] M. NORDLUND et T. S. LUNDSTRÖM : Numerical study of the local permeability of noncrimp fabrics. *Journal of Composite Materials*, 39(10):929–947, 2005.
- [NLFA06] M. NORDLUND, T.S. LUNDSTRÖM, V. FRISHFELDS et Jakovics A. : Permeability network model for non-crimp fabrics. *Composites : Part A*, 37(6):826–835, 2006.
- [NS98] S. NORBURN et D. SILVESTER : Stabilised vs. stable mixed methods for incompressible flow. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 166(1-2):131–141, 1998.
- [NSS02] P. NITHIARASU, K.N. SEETHARAMU et T. SUNDARARAJAN : Finite element modelling of flow, heat and mass transfer in fluid saturated porous media. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 9(1):3–42, 2002.
- [NT01] N. D. NGO et K. K. TAMMA : Microscale permeability predictions of porous fibrous media. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 44(16):3135–3145, 2001.
- [NT03] N.D. NGO et K.K. TAMMA : Computational developments for simulation based design : Multi-scale physics and flow/thermal/cure/stress modeling, analysis, and validation for advanced manufacturing of composites with complex microstructures. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 10(1-2):3–206, 2003.
- [NTHM06] K.B. NAKSHATRALA, D.Z. TURNER, K.D. HJELMSTAD et A. MASUD : A stabilized mixed finite element method for Darcy flow based on a multiscale decomposition of the solution. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(33-36):4036–4049, 2006.
- [OKZ07] E. OLSSON, G. KREISS et S. ZAHEDI : A conservative level set method for two phase flow II. *Journal of Computational Physics*, 225(1):785–807, 2007.

- [OS88] S. OSHER et J. A. SETHIAN : Fronts propagating with curvature-dependent speed : algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations. *Journal of Computational Physics*, 79(1):12 – 49, 1988.
- [Pap01] T. D. PAPATHANASIOU : Flow across structured fiber bundles : a dimensionless correlation. *International Journal of Multiphase Flow*, 27(8):1451–1461, 2001.
- [PBMD11] G. PACQUAUT, J. BRUCHON, N MOULIN et S. DRAPIER : Combining a level-set method and a mixed stabilized P1/P1 formulation for coupling Stokes-Darcy flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 66, 2011.
- [Per00] E. PERCHAT : *MINI-élément et factorisations incomplètes pour la parallélisation d'un solveur de Stokes 2D. Application au forgeage*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2000.
- [Pes77] C. S. PESKIN : Numerical analysis of blood flow in the heart. *Journal of Computational Physics*, 25(3):220–252, 1977.
- [Pes02] C. S. PESKIN : The immersed boundary method. *Acta Numerica*, 11:479–517, 2002.
- [Pil02] K. M. PILLAI : Governing equations for unsaturated flow through woven fiber mats. part 1. isothermal flows. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 33(7):1007–1019, July 2002.
- [PML07] J. PARK, M. MATSUBARA et X. LI : Application of lattice Boltzmann method to a micro-scale flow simulation in the porous electrode of a PEM fuel cell. *Journal of Power Sources*, 173(1):404–414, 2007.
- [PMO<sup>+</sup>99] D. PENG, B. MERRIMAN, S. OSHER, H. ZHAO et M. KANG : A PDE-based fast local level set method. *Journal of Computational Physics*, 155(2):410–438, 1999.
- [Pog83] J. C. POGGENDORFF : *Histoire de la physique (traduction de MM. E. Bibart et G. de la Quesnerie)*. Dunod (Paris), 1883.
- [PP93] C. S. PESKIN et B. F. PRINTZ : Improved volume conservation in the computation of flows with immersed elastic boundaries. *Journal of Computational Physics*, 105(1):33–46, 1993.
- [PW96] F. R. PHELAN, Jr et G. WISE : Analysis of transverse flow in aligned fibrous porous media. *Composites Part A*, 27A(1):25–34, 1996.
- [Qué03] D. QUÉRÉ : Lois du mouillage et de l'imprégnation. *Techniques de l'Ingénieur*, J 2 140, 2003.
- [Qué08] D. QUÉRÉ : Wetting and roughness. *Annual Review of Materials Research*, 38:71–99, 2008.
- [RAS<sup>+</sup>06] E. RUIZ, V. ACHIM, Soukane S., F. TROCHU et J. BREARD : Optimization of injection flow rate to minimize micro/macro-voids formation in resin transfer molded composites. *Composites Science and Technology*, 66(3-4): 475–486, 2006.
- [RE07] W. REN et W. E : Boundary conditions for the moving contact line problem. *Physics of fluids*, 19:022101, 2007.

- [RK98] W.J. RIDER et D.B. KOTHE : Reconstructing volume tracking. *Journal of Computational Physics*, 141(2):112–152, 1998.
- [RTMS95] O. RAHLI, L. TADRIST, M. MISCEVIC et R. SANTINI : Etude expérimentale des écoulements darcéens à travers un lit de fibres rigides empilées aléatoirement : influence de la porosité. *Journal de Physique II France*, 5(11):1739–1756, 1995.
- [Rud97] M. RUDMAN : Volume-tracking methods for interfacial flow calculations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 24(7):671–691, 1997.
- [Saf71] P. G. SAFFMAN : On the boundary condition at the surface of a porous medium. *Studies in Applied Mathematics*, 50(2):93–101, 1971.
- [SBL<sup>+</sup>01] A. SAOUAB, J. BREARD, P. LORY, B. GARDAREIN et G. BOUQUET : Injection simulations of thick composite parts manufactured by the RTM process. *Composites Science and Technology*, 61(3):445–451, 2001.
- [SCKY04] Y.S. SONG, K. CHUNG, T.J. KANG et J.R. YOUN : Prediction of permeability tensor for three dimensional circular braided preform by applying a finite volume method to a unit cell. *Composites Science and Technology*, 64(11):1629–1636, 2004.
- [SDB<sup>+</sup>07] J.S.U. SCHELL, M. DELEGLISE, C. BINETRUY, P. KRAWCZAK et P. ERMANNI : Numerical prediction and experimental characterisation of meso-scale-voids in liquid composite moulding. *Composites : Part A*, 38(12):2460–2470, 2007.
- [SE02] P. J. SCHNEIDER et D. H. EBERLY : *Geometric Tools for Computer Graphics*. Morgan Kaufmann Series in Computer Graphics. New York, NY, U.S.A., elsevier science inc. édition, 2002. <http://www.geometrictools.com>.
- [Set99] J. A. SETHIAN : *Level Set Methods and Fast Marching Methods Evolving Interfaces in Computational Geometry, Fluid Mechanics, Computer Vision, and Materials Science*. Cambridge Monograph on Applied and Computational Mathematics. Cambridge University Press, 1999.
- [SH05] G. SON et N. HUR : A level set formulation for incompressible two-phase flows on nonorthogonal grids. *Numerical Heat Transfer, Part B*, 48(3):303–316, 2005.
- [SM09] A. A. SAHA et S. K. MITRA : Effect of dynamic contact angle in a volume of fluid (VOF) model for a microfluidic capillary flow. *Journal of Colloid and Interface Science*, 339(2):461–480, 2009.
- [Smo01] A. SMOLIANSKI : *Numerical Modeling of Two-Fluid Interfacial Flows*. Thèse de doctorat, University of Jyväskylä, 2001.
- [SO06] M. SUSSMAN et M. OHTA : High-order techniques for calculating surface tension forces. *International Series of Numerical Mathematics*, 154:425–434, 2006.
- [SSA08] M. SEIFOLLAHI, E. SHIRANI et N. ASHGRIZ : An improved method for calculation of interface pressure force in PLIC-VOF methods. *European Journal of Mechanics B/Fluids*, 27(1):1–23, 2008.

- [ST06] S. SOUKANE et F. TROCHU : Application of the level set method to the simulation of resin transfer molding. *Composites Science and Technology*, 66(7-8):1067–1080, 2006.
- [Sus94] M. SUSSMAN : *A level set approach for computing solutions to incompressible two-phase flow*. Thèse de doctorat, University of California, Los Angeles, 1994.
- [SY06] Y.S. SONG et J. R. YOUN : Asymptotic expansion homogenization of permeability tensor for plain woven fabrics. *Composites : Part A*, 37(11):2080–2087, 2006.
- [SZ99] R SCARDOVELLI et S ZALESKI : Direct numerical simulation of free-surface and interfacial flow. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 31:567–603, 1999.
- [TB09] A. TAMAYOL et M. BAHRAMI : Analytical determination of viscous permeability of fibrous porous media. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 52(9-10):2407–2414, 2009.
- [TC04] R. TORRES CAROT : *Estimación de la permeabilidad 3D de los refuerzos tejidos en la fabricación de piezas en materiales compuestos mediante Moldeo por Transferencia de Resina*. Thèse de doctorat, Universidad Politecnica de Valencia, 2004.
- [TID92] C. L. TUCKER III et R. B. DESSEBERGER : *Flow and Rheology in Polymer Composites Manufacturing*, chapitre Governing Equations for Flow and Heat Transfer in Stationary Fiber Beds (Chapter 8). Elsevier Science Publisher, 1992.
- [TP09] H. TAN et K. M. PILLAI : Finite element implementation of stress-jump and stress-continuity conditions at porous-medium, clear-fluid interface. *Computers & Fluids*, 38(6):1118–1131, 2009.
- [TW07] A. Y. TONG et Z. WANG : A numerical method for capillarity-dominant free surface flows. *Journal of Computational Physics*, 221(2):506–523, 2007.
- [UNGD08] J. M. URQUIZA, D. N'DRI, A. GARON et M.C. DELFOUR : Coupling Stokes and Darcy equations. *Applied Numerical Mathematics*, 58(5):525–538, 2008.
- [UT92] S. O. UNVERDI et G. TRYGGVASON : A front-tracking method for viscous, incompressible, multi-fluid flows. *Journal of Computational Physics*, 100(1): 25–37, 1992.
- [VBD<sup>+</sup>07] R. VALETTE, J. BRUCHON, H. DIGONNET, P. LAURE, M. LEBŒUF, L. SILVA, B. VERGNES et T. COUPEZ : Méthodes d'interaction fluide-structure pour la simulation multi-échelles des procédés de mélange. *Mécanique & Industries*, 8(3):251–258, 2007.
- [Vil11] L. VILLE : *Modélisation multiphasique et calcul d'interface dans les procédés de mise en œuvre des propergols*. Thèse de doctorat, Mines Paristech, 2011.
- [vMVD05] S. van MOURIK, A.E.P. VELDMAN et M.E. DREYER : Simulation of capillary flow with a dynamic contact angle. *Microgravity science and technology*, 17(3):87–93, 2005.
- [Whi99] S. WHITAKER : *The Method of Volume Averaging*, volume 13 de *Theory and Applications of Transport in Porous Media*. Kluwer Academic Publishers, 1999.

- [WKP98] M. W. WILLIAMS, D. B. KOTHE et E. G. PUCKETT : Convergence and accuracy of kernel-based continuum surface tension models. Paper to be presented at the Chia-Shun Yia Memorial Symposium held at the 13th US National Congress of Applied Mechanics, June 21-26, 1998, Gainesville, FL LA-UR-98-2268, Los Alamos National Laboratory, 1998.
- [WLC03] J.G. WANG, C.F. LEUNG et Y.K. CHOW : Numerical solutions for flow in porous media. *International Journal for numerical and analytical methods in geomechanics*, 27(7):565–583, 2003.
- [WMVTP06] Q. WANG, B. MAZÉ, H. VAHEDI TAFRESHI et B. POURDEYHIMI : A note on permeability simulation of multifilament woven fabrics. *Chemical Engineering Science*, 61(24):8085–8088, 2006.
- [XLLZ06] J.-J. XU, Z. LI, J. LOWENGRUB et H. ZHAO : A level-set method for interfacial flows with surfactant. *Journal of Computational Physics*, 212(2): 590–616, 2006.
- [XYP06] Y. XIAO, F. YANG et R. PITCHUMANI : A generalized analysis of capillary flows in channels. *Journal of Colloid and Interface Science*, 298(2):880–888, 2006.
- [You05] T. YOUNG : An essay on the cohesion of fluids. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 95:65–87, 1805.
- [YVHH09] K. YOKOI, D. VADILLO, J. HINCH et I. HUTCHINGS : Numerical studies of the influence of the dynamic contact angle on a droplet impacting on a dry surface. *Physics of fluids*, 21(7):072102, 2009.
- [ZM10] W. ZERGUINE et Y. MESRI : Anisotropic mesh adaptation for capturing multi-phase interfaces. *In IV European Conference on Computational Mechanics*, 2010.
- [ZSC<sup>+</sup>07] W. ZERGUINE, L. SILVA, T. COUPEZ, H. DIGONNET et A. RODRIGUEZ-VILLA : Capture d’interface et application au procédé d’injection assistée eau. *18ème Congrès Français de Mécanique Grenoble*, 2007.

