

**Mathématiques pour la Biologie : Feuille-réponses du TD 4**  
**Modèles de Leslie de populations structurées en âges**

**Exercice 1. :** On considère une population de rongeurs présentant trois classes d'âges : les juvéniles (0-1 an), les préadultes (1-2 ans) et les adultes (2-3 ans). On désigne respectivement par  $j_t$ ,  $p_t$  et  $a_t$  les effectifs à l'instant  $t$  de ces trois classes et on suppose que l'on a la dynamique suivante :

$$\begin{cases} j_{t+1} = & 2p_t & + & 6a_t \\ p_{t+1} = & 0,4j_t \\ a_{t+1} = & 0,6p_t \end{cases} \quad (1)$$

1. Expliquez le sens biologique des 4 coefficients 2, 6, 0,4 et 0,6 qui figurent dans ce modèle.

2 est le coefficient de fertilité des préadultes, 6 celui des adultes,  
0,4 est la probabilité de survie des juvéniles, 0,6 celle des préadultes.

2. Les formules (1) permettent, à partir des effectifs initiaux des trois classes,  $(j_0, p_0, a_0)$ , de calculer les effectifs  $(j_1, p_1, a_1)$  à l'instant suivant  $t = 1$ , puis  $(j_2, p_2, a_2)$  à l'instant  $t = 2$  et ainsi de suite. À chaque instant, si les effectifs obtenus ne sont pas entiers, on les arrondit à l'entier le plus proche. Voici les valeurs obtenues si les effectifs initiaux sont  $j_0 = 30$ ,  $p_0 = 50$  et  $a_0 = 40$  :

| $t$   | 0  | 1          | 2   | 3         | 4         | 5   | 6   |
|-------|----|------------|-----|-----------|-----------|-----|-----|
| $j_t$ | 30 | <b>340</b> | 204 | 314       | 656       | 546 | 980 |
| $p_t$ | 50 | 12         | 136 | <b>82</b> | 126       | 262 | 218 |
| $a_t$ | 40 | 30         | 7   | 82        | <b>49</b> | 76  | 157 |

Complétez les valeurs manquantes du tableau en expliquant vos calculs.

$$j_1 = 2p_0 + 6a_0 = 2 \times 50 + 6 \times 40 = 340 \quad (\text{Vérification : } p_2 = 0,4j_1 = 0,4 \times 340 = 136)$$

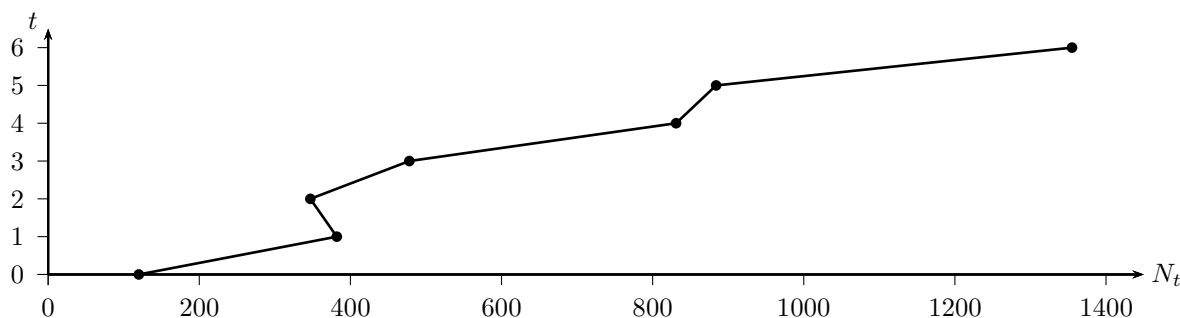
$$p_3 = 0,4j_2 = 0,4 \times 204 = 81,6 \simeq 82$$

$$a_4 = 0,6p_3 = 0,6 \times 82 = 49,2 \simeq 49 \quad (\text{Vérification : } j_5 = 2p_4 + 6a_4 = 2 \times 126 + 6 \times 49 = 546)$$

3. Si l'on désigne par  $N_t = j_t + p_t + a_t$  l'effectif total de la population à l'instant  $t$  (et donc  $N_0$  l'effectif initial), on peut également calculer les termes successifs de la suite  $(N_t)$ , ce qui permet d'évaluer aussi la dynamique de cette population dans son ensemble.

| $t$   | 0          | 1          | 2          | 3          | 4          | 5          | 6           |
|-------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|-------------|
| $N_t$ | <b>120</b> | <b>382</b> | <b>347</b> | <b>478</b> | <b>831</b> | <b>884</b> | <b>1355</b> |

Complétez les valeurs de  $N_t$  dans ce tableau et représentez graphiquement l'allure de la suite  $(t, N_t)$  (vous pouvez mettre  $t$  en vertical et  $N_t$  en horizontal). Commentez.



Après un début chaotique la courbe a l'allure d'une croissance exponentielle de  $N_t$  en fonction de  $t$ .

## Exercice 2. :

- En observant une autre population de rongeurs sur plusieurs années, on constate les effectifs suivants :

| $t$   | 0   | 1   | 2   | 3   | 4    | 5    | 6    |
|-------|-----|-----|-----|-----|------|------|------|
| $j_t$ | 60  | 860 | 474 | 851 | 1511 | 1360 | 2430 |
| $p_t$ | 100 | 18  | 258 | 142 | 255  | 453  | 408  |
| $a_t$ | 80  | 60  | 11  | 155 | 85   | 153  | 272  |

En utilisant les trois premières colonnes de ce tableau pouvez-vous déterminer à quel modèle de Leslie correspondent en fait ces données ? Expliquez vos calculs.

On cherche les coefficients  $x, y, c, d$  du système :

$$\begin{cases} j_{t+1} = xp_t + ya_t \\ p_{t+1} = cj_t \\ a_{t+1} = dp_t \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{De } p_1 = cj_0 \text{ soit } 18 = 60c \text{ on a } c = 0,3 \\ \text{De } a_1 = dp_0 \text{ soit } 60 = 100d \text{ on a } d = 0,6 \end{array}$$

De  $\begin{cases} j_1 = xp_0 + ya_0 \\ j_2 = xp_1 + ya_1 \end{cases}$  on a  $\begin{cases} 860 = 100x + 80y \\ 474 = 18x + 60y \end{cases}$  ou  $\begin{cases} 2580 = 300x + 240y \\ 1896 = 72x + 240y \end{cases}$  d'où  $\begin{cases} 684 = 228x \\ 1896 = 72x + 240y \end{cases}$

et donc  $\begin{cases} x = \frac{684}{228} = 3 \\ y = \frac{1896 - 72 \times 3}{240} = 7 \end{cases}$  et finalement  $\begin{cases} j_{t+1} = 3p_t + 7a_t \\ p_{t+1} = 0,3j_t \\ a_{t+1} = 0,6p_t \end{cases}$ .

- On désigne par  $X_0$  le vecteur colonne représentant les effectifs des trois classes à l'instant  $t = 0$ . Calculez successivement la matrice de Leslie  $L$  de ce modèle, son carré  $L^2$  et le produit  $L^2 X_0$ . Que constatez-vous ?

On a  $L = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 7 \\ 0,3 & 0 & 0 \\ 0 & 0,6 & 0 \end{pmatrix}$  et  $X_0 = \begin{pmatrix} 60 \\ 100 \\ 80 \end{pmatrix}$  d'où  $L^2 = \begin{pmatrix} 0,9 & 4,2 & 0 \\ 0 & 0,9 & 2,1 \\ 0,18 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

Donc  $L^2 X_0 = \begin{pmatrix} 0,9 & 4,2 & 0 \\ 0 & 0,9 & 2,1 \\ 0,18 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 60 \\ 100 \\ 80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9 \times 60 + 4,2 \times 100 + 0 \times 80 \\ 0 \times 60 + 0,9 \times 100 + 2,1 \times 80 \\ 0,18 \times 60 + 0 \times 100 + 0 \times 80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 474 \\ 258 \\ 10,8 \end{pmatrix}$

On constate, en faisant l'arrondi, qu'on a  $L^2 X_0 = X_2$ .

- On peut vérifier que cette matrice  $L$  est primitive en calculant  $L^5$  dont tous les éléments sont  $> 0$ . Soit le vecteur  $V = (0,7576 \quad 0,1679 \quad 0,0745)$ . Montrez que la somme de ses coefficients vaut 1 et que c'est un vecteur propre à droite de  $L$  en calculant la valeur propre à droite  $\lambda$  à laquelle il est associé.

On vérifie facilement que  $0,7576 + 0,1679 + 0,0745 = 1$ .

$LV = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 7 \\ 0,3 & 0 & 0 \\ 0 & 0,6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,7576 \\ 0,1679 \\ 0,0745 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,0252 \\ 0,22728 \\ 0,10074 \end{pmatrix}$  or  $\frac{1,0252}{0,7576} \simeq 1,3532$ ,  $\frac{0,22728}{0,1679} \simeq 1,3537$  et  $\frac{0,10074}{0,0745} \simeq 1,3522$  donc  $LV \simeq 1,353V$ , on a  $\lambda \simeq 1,353$ .

- On peut montrer que ce  $\lambda$  est la valeur propre dominante de la matrice  $L$ . Quelle sera, selon ce modèle, la répartition entre les différentes classes d'âge de cette population de rongeurs à long terme ? Que pouvez-vous dire de la dynamique de la population globale à long terme ?

La matrice  $L$  est primitive ( $L \geq 0$  et  $L^5 > 0$ ),

sa valeur propre dominante est  $\lambda \simeq 1,353$  associée au vecteur propre à droite  $V$ .

Donc la répartition entre les différentes classes d'âge de cette population tendra vers 75,76% de jeunes, 16,79% de préadultes et 7,45% d'adultes à long terme. Chaque classe d'âge (et donc la population globale) sera multipliée par  $\simeq 1,353$  à chaque pas de temps.