

NOM :
PRÉNOM :

CORRIGÉ

Date : 30 septembre-4 octobre 2013

Groupe :

Mathématiques pour la Biologie : Feuille-réponses du TD 3
Évolution vers une distribution stationnaire

Exercice 1. : Un individu vit dans un milieu où il est susceptible d'attraper une maladie par piqûre d'insecte. Il peut être dans l'un des trois états suivants : ni malade ni immunisé (R), malade (M) ou immunisé (I). D'un mois sur l'autre, son état peut changer selon les règles suivantes : étant immunisé, il a une probabilité de 0,8 de le rester et de 0,2 de passer à l'état R , étant malade, il a une probabilité de 0,25 de le rester et de 0,75 de devenir immunisé, enfin, étant dans l'état R , il a une probabilité de 0,6 de le rester et de 0,4 de tomber malade.

1. Donner la matrice de transition $\mathbb{P}$ de la chaîne de Markov d'ensemble d'états $S = \{I, M, R\}$ modélisant la population à laquelle appartient cet individu.

$$\mathbb{P} = \begin{array}{ccc|c} & I & M & R \\ \begin{array}{c} I \\ M \\ R \end{array} & \begin{pmatrix} 0,8 & 0 & 0,2 \\ 0,75 & 0,25 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} & & \begin{array}{c} \uparrow \\ I \\ M \\ R \end{array} \end{array}$$

Pour remplir la matrice $\mathbb{P}$ on utilise le fait que la somme des éléments d'une ligne vaut 1.

2. Calculer la proportion d'individus malades dans la population après un mois si 4% des individus étaient malades au départ et les autres ni malades ni immunisés.

On a $\pi_0 = (0 \quad 0,04 \quad 0,96)$, on ne calcule que la composante de π_1 qui nous intéresse :

$$\pi_1 = \pi_0 \mathbb{P} = (0 \quad 0,04 \quad 0,96) \begin{pmatrix} 0,8 & 0 & 0,2 \\ 0,75 & 0,25 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} = (\dots \quad 0,04 \times 0,25 + 0,96 \times 0,4 \quad \dots) =$$
$$(\dots \quad \boxed{0,394} \quad \dots)$$

Au bout d'un mois il y a 39,4% de malades, c'est inquiétant.

3. Si l'on calcule avec un ordinateur la puissance $\mathbb{P}^{100}$ de la matrice de transition,

$$\text{on trouve (en arrondissant à 3 décimales) } \mathbb{P}^{100} = \begin{pmatrix} 0,566 & 0,151 & 0,283 \\ 0,566 & 0,151 & 0,283 \\ 0,566 & 0,151 & 0,283 \end{pmatrix}.$$

Peut-on en déduire que la matrice de transition de cette chaîne de Markov est une matrice primitive? Pourquoi?

$\mathbb{P}$ est une matrice positive et $\mathbb{P}^{100}$ est une matrice strictement positive : tous ses éléments sont positifs non nuls. Donc $\mathbb{P}$ est une matrice primitive : c'est une matrice positive dont une puissance est strictement positive, c'est la définition de matrice primitive dans le cours.

4. Quelle sera la proportion d'individus malades dans cette population à long terme? Expliquer.

Comme $\mathbb{P}$ est une matrice primitive on sait qu'il existe une distribution stationnaire π^∞ vers laquelle on tendra à partir de n'importe quelle distribution initiale π_0 .

On obtient cette distribution π^∞ en calculant une puissance $\mathbb{P}^k$ de $\mathbb{P}$ assez grande pour que ses lignes soient égales. Cette ligne est alors π^∞ .

Donc ici $\pi^\infty = (0,566 \quad 0,151 \quad 0,283)$, à long terme il y aura $\boxed{15,1\% \text{ de malades}}$.

5. Que se passerait-il selon ce modèle dans une région où la proportion de malades serait de 48% au départ? Peut-on prévoir une épidémie dans ce cas?

Quelle que soit la distribution initiale π_0 on tendra vers la distribution π^∞ , donc la proportion de malades chutera de 48% au départ à 15,1% à long terme.

$\boxed{\text{Il n'y aura pas d'épidémie.}}$

Exercice 2. : On veut étudier l'effet de la présence d'un couple de lions dans une portion de savane dans laquelle cohabitent trois populations d'animaux dont les lions se nourrissent. On modélise les animaux mangés, antilopes (a), gnous (g) et zèbres (z) comme les états d'une chaîne de Markov dont les trajectoires sont des successions de proies mangées par les lions, comme par exemple ($gzzaggaa$). On fait l'hypothèse que la probabilité qu'un lion mange une proie a (ou g ou z) après avoir mangé une proie g (ou a ou z) ne dépend pas de ce qu'il avait mangé avant g (ou a ou z) et que cette probabilité est invariante au cours du temps. D'où la modélisation par une chaîne de Markov d'espace d'états $S = \{a, g, z\}$ et dont on propose la matrice de transition suivante :

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,1 & 0,4 \\ 0,2 & 0,3 & 0,5 \\ 0,2 & 0,2 & 0,6 \end{pmatrix}$$

1. Quelle est, selon ce modèle, la probabilité que les lions mangent un zèbre après avoir mangé une antilope ?

La probabilité $P(X_{t+1} = z/X_t = a) = P(X_1 = z/X_0 = a)$ (invariance au cours du temps) se lit directement dans la matrice $\mathbb{P}$: c'est l'élément de la première ligne, troisième colonne qui vaut $\boxed{0,4}$.

2. Des deux trajectoires suivantes, ($gazg$) et ($gzag$), quelle est la plus probable ? Justifier votre réponse par un calcul.

$$P(X_0 = g, X_1 = a, X_2 = z, X_3 = g) = P(X_1 = a/X_0 = g)P(X_2 = z/X_1 = a)P(X_3 = g/X_2 = z) = 0,2 \times 0,4 \times 0,2 = 0,016$$

$$P(X_0 = g, X_1 = z, X_2 = a, X_3 = g) = P(X_1 = z/X_0 = g)P(X_2 = a/X_1 = z)P(X_3 = g/X_2 = a) = 0,5 \times 0,2 \times 0,1 = 0,010$$

Donc $\boxed{\text{la trajectoire } (gazg) \text{ est plus probable que } (gzag)}$.

3. La distribution π_0 suivante est-elle une distribution stationnaire pour la chaîne de Markov des animaux successivement mangés par les lions ? Justifier votre réponse.

S	a	g	z
π_0	$\frac{6}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{11}{21}$

$$\begin{aligned} \pi_0 \mathbb{P} &= \left(\frac{6}{21} \quad \frac{4}{21} \quad \frac{11}{21} \right) \begin{pmatrix} 0,5 & 0,1 & 0,4 \\ 0,2 & 0,3 & 0,5 \\ 0,2 & 0,2 & 0,6 \end{pmatrix} = \\ &= \left(\frac{6}{21} \times 0,5 + \frac{4}{21} \times 0,2 + \frac{11}{21} \times 0,2 \quad \frac{6}{21} \times 0,1 + \frac{4}{21} \times 0,3 + \frac{11}{21} \times 0,2 \quad \frac{6}{21} \times 0,4 + \frac{4}{21} \times 0,5 + \frac{11}{21} \times 0,6 \right) \\ &= \left(\frac{6}{21} \quad \frac{4}{21} \quad \frac{11}{21} \right) \quad \text{On a bien } \pi_0 \mathbb{P} = \pi_0, \text{ donc } \boxed{\pi_0 \text{ est une distribution stationnaire}}. \end{aligned}$$

4. Si au départ la nourriture des lions se composait pour $\frac{3}{4}$ de zèbres, cette proportion dans leur régime alimentaire va-t-elle, selon ce modèle, diminuer, augmenter ou rester constante ? Expliquer.

La matrice $\mathbb{P}$ est primitive : tous ses coefficients sont strictement positifs, ce n'est donc pas la peine de chercher une puissance strictement positive, $\mathbb{P}$ convient.

On peut donc appliquer la théorie de Perron-Frobenius : quelle que soit la distribution initiale on tendra vers l'unique distribution stationnaire de cette chaîne de Markov $\left(\frac{6}{21} \quad \frac{4}{21} \quad \frac{11}{21} \right)$ trouvée dans la question 3.

Donc, si au départ les zèbres représentent les $\frac{3}{4} = 75\%$ de la nourriture des lions, au fil du temps cette proportion va tendre vers $\frac{11}{21} \simeq 52,4\%$.

$\boxed{\text{Cette proportion diminue des } \frac{3}{4} \text{ à un peu plus de la moitié.}}$