

NOM :
PRÉNOM :

CORRIGÉ

Date : 16-20 septembre 2013

Groupe :

Mathématiques pour la Biologie : Feuille-réponses du TD 2
Initiation au calcul matriciel

Exercice 1. :

1. Soit une chaîne de Markov à 2 états de matrice de transition $\mathbb{P}$ telle que $p_{12} = 0,25$ et $p_{21} = 0,5$. Calculer l'image π_1 par la chaîne de Markov de la distribution initiale $\pi_0 = (0,2 \quad 0,8)$.

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} ? & 0,25 \\ 0,5 & ? \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,75 & 0,25 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix} \text{ car la somme des éléments d'une ligne vaut } 1.$$

$$\pi_1 = (0,2 \quad 0,8) \begin{pmatrix} 0,75 & 0,25 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix} = (0,2 \times 0,75 + 0,8 \times 0,5 \quad 0,2 \times 0,25 + 0,8 \times 0,5)$$

$\pi_1 = (0,55 \quad 0,45)$ On remarque que la somme des éléments de π_1 vaut 1 (comme celle de π_0).

2. Calculer le nombre α tel que $\pi_0^* = (\alpha \quad 1 - \alpha)$ soit une distribution stationnaire. En déduire que $\lambda = 1$ est une valeur propre à gauche de la matrice $\mathbb{P}$. Expliquer.

On cherche α tel que $\pi_0^* \mathbb{P} = \pi_0^*$, soit $(\alpha \quad 1 - \alpha) \begin{pmatrix} 0,75 & 0,25 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix} = (\alpha \quad 1 - \alpha)$

donc $(0,75\alpha + 0,5(1 - \alpha) \quad 0,25\alpha + 0,5(1 - \alpha)) = (0,25\alpha + 0,5 \quad -0,25\alpha + 0,5) = (\alpha \quad 1 - \alpha)$

On doit résoudre le système $\begin{cases} 0,25\alpha + 0,5 = \alpha \\ -0,25\alpha + 0,5 = 1 - \alpha \end{cases}$ qui se réduit à l'équation $0,75\alpha = 0,5$

donc $\alpha = \frac{2}{3}$ et $\pi_0^* = (\frac{2}{3} \quad \frac{1}{3})$. On peut vérifier que $(\frac{2}{3} \quad \frac{1}{3}) \begin{pmatrix} 0,75 & 0,25 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix} = (\frac{2}{3} \quad \frac{1}{3})$

donc $(\frac{2}{3} \quad \frac{1}{3})$ est un vecteur propre à gauche de la matrice $\mathbb{P}$ associé à la valeur propre 1.

3. Calculer le carré $\mathbb{P}^2$, puis les deux produits $\pi_0 \mathbb{P}^2$ et $\pi_1 \mathbb{P}$.

$$\mathbb{P}^2 = \begin{pmatrix} 0,75 & 0,25 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,75 & 0,25 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,75 \times 0,75 + 0,25 \times 0,5 & 0,75 \times 0,25 + 0,25 \times 0,5 \\ 0,5 \times 0,75 + 0,5 \times 0,5 & 0,5 \times 0,25 + 0,5 \times 0,5 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{P}^2 = \begin{pmatrix} 0,6875 & 0,3125 \\ 0,625 & 0,375 \end{pmatrix}$ On remarque que $\mathbb{P}^2$ est aussi une matrice stochastique.

$$\pi_0 \mathbb{P}^2 = (0,2 \quad 0,8) \begin{pmatrix} 0,6875 & 0,3125 \\ 0,625 & 0,375 \end{pmatrix} = (0,2 \times 0,6875 + 0,8 \times 0,625 \quad 0,2 \times 0,3125 + 0,8 \times 0,375)$$

$\pi_0 \mathbb{P}^2 = (0,6375 \quad 0,3625)$

$$\pi_1 \mathbb{P} = (0,55 \quad 0,45) \begin{pmatrix} 0,75 & 0,25 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix} = (0,55 \times 0,75 + 0,45 \times 0,5 \quad 0,55 \times 0,25 + 0,45 \times 0,5)$$

$\pi_1 \mathbb{P} = (0,6375 \quad 0,3625)$

Que constate-t-on ? Expliquer.

On voit que $\pi_0 \mathbb{P}^2 = \pi_1 \mathbb{P}$, en effet $\pi_1 = \pi_0 \mathbb{P}$

donc $\pi_1 \mathbb{P} = (\pi_0 \mathbb{P}) \mathbb{P} = \pi_0 (\mathbb{P} \mathbb{P}) = \pi_0 \mathbb{P}^2$ car la multiplication est associative (mais pas commutative)

donc $\pi_1 \mathbb{P} = \pi_0 \mathbb{P}^2$.

Exercice 2. :

1. Soit la matrice $\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer $\mathbb{P}^2$, $\mathbb{P}^3$ et $\mathbb{P}^4$. En déduire les valeurs de $\mathbb{P}^k$ pour tout entier $k > 0$.

$$\mathbb{P}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbb{P}^3 = \mathbb{P}^2 \mathbb{P} = \mathbb{P} \mathbb{P}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = Id$$

donc $\mathbb{P}^4 = \mathbb{P}^3 \mathbb{P} = Id \mathbb{P} = \mathbb{P}$, $\mathbb{P}^5 = \mathbb{P}^4 \mathbb{P} = \mathbb{P} \mathbb{P} = \mathbb{P}^2$, $\mathbb{P}^6 = \mathbb{P}^5 \mathbb{P} = \mathbb{P}^2 \mathbb{P} = \mathbb{P}^3 = Id, \dots$

Pour un entier $k > 0$ quelconque on fait la division avec reste de k par 3, $k = 3q + r$ avec $r = 0, 1$ ou 2 , et on a $\mathbb{P}^k = \mathbb{P}^r$.

Par exemple, comme $173 = 3 \times 57 + 2$, on a $\mathbb{P}^{173} = \mathbb{P}^{3 \times 57 + 2} = (\mathbb{P}^3)^{57} \mathbb{P}^2 = Id^{57} \mathbb{P}^2 = \mathbb{P}^2$.

2. Est-il possible que l'une des puissances $\mathbb{P}^k$ de $\mathbb{P}$ pour un $k \geq 1$, soit une matrice dont tous les coefficients sont strictement positifs, c'est-à-dire est-il possible que la matrice $\mathbb{P}$ soit primitive ?

Comme on vient de le voir les seules valeurs possibles pour $\mathbb{P}^k$ sont $\mathbb{P}$, $\mathbb{P}^2$ ou Id . Toutes ces matrices contiennent des 0, ce ne sont pas des matrices dont tous les coefficients sont strictement positifs, donc la matrice $\mathbb{P}$ n'est pas primitive.

3. Pour $\pi_0 = (\alpha \ \beta \ \gamma)$, calculer les images successives $\pi_1 = \pi_0 \mathbb{P}$, $\pi_2 = \pi_1 \mathbb{P}, \dots$
Qu'observe-t-on ?

$$\pi_1 = \pi_0 \mathbb{P} = (\beta \ \gamma \ \alpha), \quad \pi_2 = \pi_1 \mathbb{P} = (\gamma \ \alpha \ \beta), \quad \pi_3 = \pi_2 \mathbb{P} = (\alpha \ \beta \ \gamma) = \pi_0,$$

$$\text{donc } \pi_4 = \pi_3 \mathbb{P} = \pi_0 \mathbb{P} = \pi_1, \quad \pi_5 = \pi_4 \mathbb{P} = \pi_1 \mathbb{P} = \pi_2, \quad \pi_6 = \pi_5 \mathbb{P} = \pi_2 \mathbb{P} = \pi_3 = \pi_0, \dots$$

après trois calculs d'images successives on retombe sur l'élément de départ : $\pi_{k+3} = \pi_k$

car $\pi_{k+3} = \pi_k \mathbb{P}^3 = \pi_k Id = \pi_k$.

4. Trouver un vecteur propre à gauche de $\mathbb{P}$ de valeur propre $\lambda = 1$.

On veut avoir π_0 non nul tel que $\pi_0 \mathbb{P} = \pi_0$, soit $(\beta \ \gamma \ \alpha) = (\alpha \ \beta \ \gamma)$ non nuls,

donc $\beta = \alpha$, $\gamma = \beta$ et $\alpha = \gamma$, les solutions sont tous les vecteurs $(\alpha \ \alpha \ \alpha)$ avec $\alpha \neq 0$.

$$\text{Par exemple le vecteur } (1 \ 1 \ 1) \text{ convient : on a } (1 \ 1 \ 1) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (1 \ 1 \ 1),$$

mais si l'on veut un vecteur positif et dont la somme des coefficients vaut 1 il faut prendre le vecteur $(\frac{1}{3} \ \frac{1}{3} \ \frac{1}{3})$.