

NOM :
PRÉNOM :

CORRIGÉ

Date : 9-13 septembre 2013

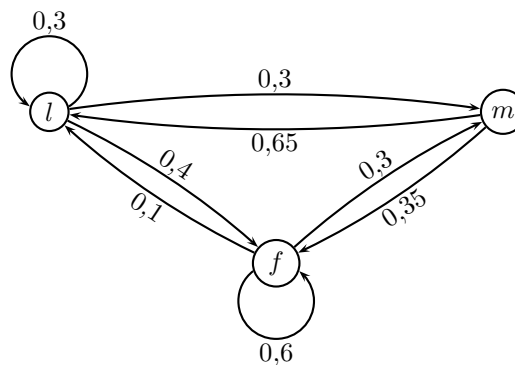
Groupe :

Mathématiques pour la Biologie : Feuille-réponses du TD 1
Introduction aux chaînes de Markov

Exercice 1. : On étudie l'évolution au cours du temps des formations végétales sur un vaste territoire en les décomposant pour simplifier en trois catégories *lande*, *maquis* et *forêt*. On modélise cette dynamique par une chaîne de Markov X_t d'espace d'états $S = \{l, m, f\}$ et de matrice de transition

$$\begin{pmatrix} 0,3 & 0,3 & 0,4 \\ 0,65 & 0 & 0,35 \\ 0,1 & 0,3 & 0,6 \end{pmatrix}$$

1. Tracer le diagramme en points et flèches associé.



2. Quelle est, selon ce modèle, la probabilité que la formation végétale passe de l'état *forêt* à l'état *lande* ?

Cette probabilité est l'élément de la troisième ligne et première colonne de la matrice :

$$P(X_1 = l / X_0 = f) = \boxed{0,1}$$

3. Calculer la probabilité de la trajectoire $X_0 = f, X_1 = m, X_2 = l, X_3 = f$.

$$P(X_0 = f, X_1 = m, X_2 = l, X_3 = f) =$$

$$P(X_1 = m / X_0 = f)P(X_2 = l / X_1 = m)P(X_3 = f / X_2 = l) = 0,3 \times 0,65 \times 0,4 = \boxed{0,078}$$

4. Donner un exemple de trajectoire de longueur 4 et de probabilité nulle.

$$\boxed{X_0 = f, X_1 = m, X_2 = m, X_3 = f, X_4 = m} \text{ ou } \boxed{X_0 = m, X_1 = m, X_2 = l, X_3 = f, X_4 = f}$$

ou toute trajectoire contenant une transition $X_t = m, X_{t+1} = m$.

5. Quelle est, selon ce modèle, la probabilité que la formation végétale passe de *l* à *f* en une étape ? en deux étapes ?

$$\text{En une étape : } P(X_1 = f / X_0 = l) = \boxed{0,4}$$

$$\text{En deux étapes : } P(X_2 = f / X_0 = l) =$$

$$P(X_1 = l / X_0 = l)P(X_2 = f / X_1 = l) + P(X_1 = m / X_0 = l)P(X_2 = f / X_1 = m) + P(X_1 = f / X_0 = l)P(X_2 = f / X_1 = f) = 0,3 \times 0,4 + 0,3 \times 0,35 + 0,4 \times 0,6 = \boxed{0,465}$$

6. Connaissant la répartition initiale $\pi_0 = (0,4 \ 0,4 \ 0,2)$, calculer la répartition à l'étape suivante π_1 . Des trois formations végétales, lesquelles progressent, lesquelles régressent ?

$$\pi_1 = \pi_0 \cdot \mathbb{P} = (0,4 \ 0,4 \ 0,2) \begin{pmatrix} 0,3 & 0,3 & 0,4 \\ 0,65 & 0 & 0,35 \\ 0,1 & 0,3 & 0,6 \end{pmatrix} = \boxed{(0,4 \ 0,18 \ 0,42)}.$$

La lande est stable, le maquis régresse et la forêt progresse.

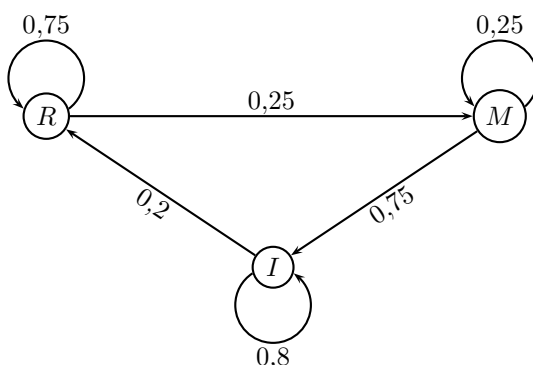
Exercice 2. : Un individu vit dans un milieu où il est susceptible d'attraper une maladie par piqûre d'insectes. Il peut être dans l'un des trois états suivants : ni malade ni immunisé (R), malade (M) ou immunisé (I). D'un mois sur l'autre, son état peut changer selon les règles suivantes :

- étant immunisé, il a une probabilité de 0,8 de le rester et de 0,2 de passer à l'état R,
- étant malade, il a une probabilité de 0,25 de le rester et de 0,75 de devenir immunisé,
- enfin, étant dans l'état R, il a une probabilité de 0,75 de le rester et de 0,25 de devenir immunisé.

1. On modélise la dynamique des individus de ce milieu par une chaîne de Markov $(X_t)_{t \geq 0}$ à trois états R, M et I. Ecrire la matrice de transition $\mathbb{P}$ de cette chaîne de Markov.

$$\mathbb{P} = \left(\begin{array}{c|ccc} & \overbrace{\begin{matrix} R & M & I \end{matrix}}^{X_1} \\ \hline \begin{matrix} R \\ M \\ I \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0,75 & 0,25 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0,75 \\ 0,2 & 0 & 0,8 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \nwarrow R \\ M \\ I \end{matrix} \end{array} \right) X_0$$

2. Tracer le diagramme en points et flèches associé.



On ne représente pas les transitions dont la probabilité est nulle.

3. Si l'on commence avec une population de 1000 individus comportant 100 individus malades et 900 individus ni malades ni immunisés, combien aura-t-on d'individus malades après une étape, après deux étapes ?

$$\pi_1 = \pi_0 \cdot \mathbb{P} = (0,9 \ 0,1 \ 0) \begin{pmatrix} 0,75 & 0,25 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0,75 \\ 0,2 & 0 & 0,8 \end{pmatrix} = (0,675 \ 0,25 \ 0,075).$$

Soit 250 malades après une étape.

$$\pi_2 = \pi_1 \cdot \mathbb{P} = (0,675 \ 0,25 \ 0,075) \begin{pmatrix} 0,75 & 0,25 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0,75 \\ 0,2 & 0 & 0,8 \end{pmatrix} = (\dots R \ 0,23125 \ \dots I).$$

Soit environ 231 malades après deux étapes.

On n'a calculé que le produit de π_1 avec la deuxième colonne de $\mathbb{P}$.

4. Même question si l'on suppose qu'il y a au départ 150 individus malades, 500 individus ni malades ni immunisés et 350 individus immunisés.

$$\pi_1 = \pi_0 \cdot \mathbb{P} = (0,5 \ 0,15 \ 0,35) \begin{pmatrix} 0,75 & 0,25 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0,75 \\ 0,2 & 0 & 0,8 \end{pmatrix} = (0,445 \ 0,1625 \ 0,3925).$$

Soit 162 ou 163 malades après une étape.

$$\pi_2 = \pi_1 \cdot \mathbb{P} = (0,445 \ 0,1625 \ 0,3925) \begin{pmatrix} 0,75 & 0,25 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0,75 \\ 0,2 & 0 & 0,8 \end{pmatrix} = (\dots R \ 0,151875 \ \dots I).$$

Soit environ 152 malades après deux étapes.