

## FORMULAIRE

Dans tout ce formulaire on ne parle pas du domaine de définition de la formule : par exemple  $\sqrt{a}$  sous-entend  $a \geq 0$ ,  $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $k$  est une constante.

### Logarithme et Exponentielle : $e^{\ln x} = \ln(e^x) = x$

|                                          |                                                |                                             |                                                 |                                                  |                                               |
|------------------------------------------|------------------------------------------------|---------------------------------------------|-------------------------------------------------|--------------------------------------------------|-----------------------------------------------|
| $\ln 1 = 0$                              | $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$                    | $\ln(a/b) = \ln(a) - \ln(b)$                | $\ln(1/a) = -\ln(a)$                            | $\ln(\sqrt{a}) = \ln(a)/2$                       | $\ln(a^\alpha) = \alpha \ln(a)$               |
| $e^0 = 1$                                | $e^{x+y} = e^x e^y$                            | $e^{x-y} = e^x / e^y$                       | $e^{-x} = 1/e^x$                                | $\sqrt{e^x} = e^{x/2}$                           | $(e^x)^y = e^{xy}$                            |
| $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$   | $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$   | $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$   | $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$ | $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$            | $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x)/x = 0$   |
| $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$ | $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x/x = +\infty$ | $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x)/x = 0$ | $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$      | $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x/x^n = +\infty$ | $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x)/x^n = 0$ |

### Dérivées

| Fonctions usuelles |                       | Fonctions usuelles |                      | Règles de dérivation                 |                                         | Exemples                                                    |
|--------------------|-----------------------|--------------------|----------------------|--------------------------------------|-----------------------------------------|-------------------------------------------------------------|
| $f(x)$             | $f'(x)$               | $f(x)$             | $f'(x)$              |                                      |                                         |                                                             |
| $k$                | 0                     | $x$                | 1                    | $(u+v)' = u' + v'$                   | $(u \times v)' = u'v + uv'$             | $(3x^2 \ln x)' = 6x \ln x + 3x$                             |
| $k \times x$       | $k$                   | $x^k$              | $kx^{k-1}$           | $(k \times u)' = k \times u'$        | $(u^k)' = ku' u^{k-1}$                  | $(\sin^3(x))' = 3 \cos x \sin^2 x$                          |
| $\frac{1}{x}$      | $-\frac{1}{x^2}$      | $\frac{1}{x^n}$    | $-\frac{n}{x^{n+1}}$ | $\frac{1}{u} = -\frac{u'}{u^2}$      | $\frac{u}{v} = \frac{u'v - uv'}{v^2}$   | $\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)' = \frac{-4x}{(1+x^2)^2}$ |
| $\sqrt{x}$         | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ |                    |                      | $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ | $(v \circ u)' = u' \times (v' \circ u)$ | $(\sin(e^{2x}))' = 2e^{2x} \cos(e^{2x})$                    |
| $\ln x$            | $\frac{1}{x}$         | $e^x$              | $e^x$                | $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$            | $(e^u)' = u' e^u$                       | $(e^{-5x^3})' = -15x^2 e^{-5x^3}$                           |
| $\cos x$           | $-\sin x$             | $\sin x$           | $\cos x$             | $(\cos u)' = -u' \sin u$             | $(\sin u)' = u' \cos u$                 | $(\sin(x^3))' = 3x^2 \cos(x^3)$                             |

### Dérivées partielles

On dérive une fonction de plusieurs variables par rapport à une variable en considérant les autres variables comme constantes.

$$\frac{\partial}{\partial x}(-5x^2y^3) = -10xy^3 \quad \frac{\partial}{\partial y}(-5x^2y^3) = -15x^2y^2 \quad \frac{\partial}{\partial x}e^{-5x^2y^3} = -10xy^3e^{-5x^2y^3} \quad \frac{\partial}{\partial y}e^{-5x^2y^3} = -15x^2y^2e^{-5x^2y^3}$$

### Matrice Jacobienne, Trace, Déterminant

Pour un système  $\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$  on définit la *Matrice Jacobienne* :  $A(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}$

Pour une matrice  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  on définit sa *trace*  $tr(A) = a + d$  et son *déterminant*  $det(A) = ad - bc$ .

### Moyenne, Variance, Covariance

Pour une série  $X$  de  $n$  mesures  $x_i$ , on a la *moyenne*  $\mu(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ , la *variance*  $\text{Var}(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu(X))^2 = \mu(X^2) - \mu(X)^2$ ,

l'*écart-type*  $\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$ . On a  $\mu(aX + b) = a\mu(X) + b$ ,  $\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X)$ ,  $\sigma(aX + b) = a\sigma(X)$  si  $a > 0$ .

Pour une série de  $n$  couples de mesures  $(x_i, y_i)$ , on a le *centre de gravité*  $G = (\mu(X), \mu(Y))$ ,

la *covariance*  $\text{Cov}(X, Y) = \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n (x_i - \mu(X))(y_i - \mu(Y)) \right) = \mu(XY) - \mu(X)\mu(Y)$ ,

le *coefficient de corrélation linéaire*  $\rho(x, y) = \frac{\text{Cov}(x, y)}{\sqrt{\text{Var}(x)\text{Var}(y)}}$ ,

la *droite des moindres carrés*  $y = \hat{a}x + \hat{b}$ , où  $\hat{a} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{Var}(X)}$ ,  $\hat{b} = \mu(Y) - \hat{a}\mu(X)$ .

### Inertie Totale, Intraclasse, Interclasse

Pour un nuage  $\Gamma$  de  $n$  points  $M_i$  et de centre de gravité  $G$  on a l'*inertie totale*  $\mathcal{I}(\Gamma) = \frac{1}{n} (d(M_1, G)^2 + d(M_2, G)^2 + \dots + d(M_n, G)^2)$ .

Si ce nuage est la réunion disjointe de  $k$  sous-nuages  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ , de centres de gravité  $G_1, \dots, G_k$ , formés de  $n_1, \dots, n_k$  points on a l'*inertie intraclasse* :  $\mathcal{I}_{intra} = \bar{p}_1 \mathcal{I}(\Gamma_1) + \dots + \bar{p}_k \mathcal{I}(\Gamma_k)$  où  $\bar{p}_i = n_i/n$  est le poids relatif de  $\Gamma_i$  dans  $\Gamma$

et l'*inertie interclasse* :  $\mathcal{I}_{inter} = \bar{p}_1 d_2(G_1, G)^2 + \dots + \bar{p}_k d_2(G_k, G)^2$ , alors  $\mathcal{I}(\Gamma) = \mathcal{I}_{intra} + \mathcal{I}_{inter}$ .