

Cours 2 : Initiation au calcul matriciel

La leçon précédente a montré qu'il pouvait être utile de calculer avec des matrices. Avant de voir d'autres exemples d'utilisation des matrices, arrêtons-nous le temps d'une leçon pour apprendre ce calcul.

1 Qu'est-ce qu'une matrice ?

Une matrice est simplement un *tableau de nombres*, par exemple

$$M_1 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & -9 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad M_2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Les nombres du tableau s'appellent les *coefficients* de la matrice. On dit que M_1 est une matrice 2×3 car elle a 2 lignes et 3 colonnes et que M_2 est une matrice 3×3 , donc une *matrice carrée*. Plus généralement on dit que M est de *taille* $l \times n$ lorsqu'elle a l lignes et n colonnes et on désigne ses coefficients à l'aide de deux indices $M = (m_{ij})_{1 \leq i \leq l, 1 \leq j \leq n}$, le premier indice i est le numéro de la ligne, le deuxième indice j est le numéro de la colonne.

Lorsque $l = 1$ (ou $n = 1$), la matrice est une *matrice ligne* (ou une *matrice colonne*), ou, plus simplement, un *vecteur ligne* (ou un *vecteur colonne*).

Une matrice carrée ayant tous ses coefficients nuls sauf ceux qui sont situés sur la diagonale, comme par exemple

$$M_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

s'appelle une *matrice diagonale* (elle vérifie donc $m_{ij} = 0$ pour tout $i \neq j$).

Enfin la *transposée* d'une matrice M est la matrice M' dont les colonnes sont les lignes de M , par exemple

$$M'_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \\ 4 & -9 \end{pmatrix}.$$

2 Opérations sur les matrices

On définit l'*addition* des matrices comme on le fait pour les vecteurs : on additionne les coefficients de mêmes indices des deux matrices. Les deux matrices doivent donc avoir le même nombre de lignes et le même nombre de colonnes pour qu'on puisse faire l'opération. Par exemple :

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & -9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & -8 \end{pmatrix}$$

Rem. : L'addition de matrices est *associative* $(M+N)+P = M+(N+P)$ et *commutative* $M+N = N+M$.

De même pour la *multiplication* des matrices *par un nombre*, on multiplie simplement chaque coefficient de la matrice par ce nombre :

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -0,5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour définir la *multiplication des matrices* entre elles, on commence par définir le produit de deux vecteurs, un vecteur ligne L et un vecteur colonne C ayant le même nombre de coefficients, comme étant le *produit scalaire* de ces vecteurs :

$$L = (2 \quad 5 \quad 4) \quad C = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \quad LC = 2 \times (-2) + 5 \times 0 + 4 \times 5 = 16.$$

Plus généralement, pour calculer un produit tel que $M_1 M_2$, on effectue les 6 produits scalaires des lignes de $M_1 = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \end{pmatrix}$ par les colonnes de $M_2 = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix}$ de la façon suivante :

$$M_1 M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 C_1 & L_1 C_2 & L_1 C_3 \\ L_2 C_1 & L_2 C_2 & L_2 C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 5 & 11 \\ -47 & 0 & -36 \end{pmatrix}.$$

Remarque : Pour faciliter le calcul de $M_1 M_2$ on pourra le disposer de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ L_1 C_1 & L_1 C_2 & L_1 C_3 \\ L_2 C_1 & L_2 C_2 & L_2 C_3 \end{pmatrix}$$

À noter que le produit d'une matrice par une autre n'est possible que si le nombre n de colonnes de la première est égal au nombre de lignes de la seconde. Ainsi, si M est une matrice $l \times n$ et N une matrice $n \times p$, alors le produit MN est une matrice $l \times p$.

Signalons enfin que la matrice transposée du produit MN peut s'obtenir à partir des transposées des facteurs M et N selon la formule $(MN)' = N'M'$. On pourra le vérifier avec le produit $M_1 M_2$ par exemple.

Remarque importante : La multiplication de matrices est *associative*, $(MN)P = M(NP)$, mais *n'est pas commutative*, $MN \neq NM$, en général. Par exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{mais} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarque importante : La matrice diagonale (donc carrée) $n \times n$ n'ayant que des 1 sur la diagonale s'appelle *matrice identité* de taille n , ou plus simplement *identité*, et est notée Id .

Elle vérifie $M Id = M$ et $Id N = N$ pourvu que la taille de l'identité permette la multiplication. Par exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & -9 \end{pmatrix}$$

On a vu dans la leçon précédente que pour une chaîne de Markov de matrice de transition $\mathbb{P}$, l'évolution après une étape de la distribution initiale π_0 s'obtient précisément en multipliant le vecteur ligne π_0 par la matrice $\mathbb{P}$. Le produit $\pi_0 \mathbb{P}$ est un vecteur ligne qui est la nouvelle distribution π_1 (ou distribution image au temps 1) et lorsqu'elle est restée inchangée (c'est-à-dire lorsque $\pi_0 = \pi_1$) on dit que c'est une *distribution stationnaire* pour cette chaîne de Markov. Nous reviendrons sur la question importante des distributions stationnaires la semaine prochaine.

On calcule les distributions aux instants suivants $t = 2, t = 3, \dots, t = k + 1$ en répétant l'opération $\pi_2 = \pi_1 \mathbb{P}, \pi_3 = \pi_2 \mathbb{P}, \dots, \pi_{k+1} = \pi_k \mathbb{P}$, donc $\pi_2 = \pi_0 \mathbb{P}^2, \pi_3 = \pi_0 \mathbb{P}^3, \dots, \pi_{k+1} = \pi_0 \mathbb{P}^{k+1}$.

On peut multiplier une matrice M par elle-même, calculer son *carré* $MM = M^2$, si et seulement si M a le même nombre de lignes et de colonnes, c'est-à-dire M est une *matrice carrée*. On peut alors calculer n'importe quelle *puissance* k de la matrice M : $M^3 = MM^2 = M^2 M, \dots, M^{k+1} = MM^k = M^k M$.

Remarque : Les produits de matrices étant coûteux si l'on doit calculer une puissance élevée on organisera astucieusement le calcul. Par exemple pour calculer M^{15} on pourra faire :

$M^2 = MM, M^3 = M^2 M, M^4 = M^3 M$ ou $M^2 M^2, M^7 = M^3 M^4, M^8 = M^4 M^4, M^{15} = M^7 M^8$, mais aussi $M^2 = MM, M^3 = M^2 M, M^5 = M^2 M^3, M^{10} = M^5 M^5, M^{15} = M^5 M^{10}$ qui est plus court.

3 Matrices stochastiques, positives, primitives

On rappelle qu'une matrice carrée est dite *stochastique* lorsque ses coefficients sont compris entre 0 et 1 et la somme des coefficients de chacune de ses lignes est égale à 1. Cela peut s'écrire formellement de la façon suivante :

Définition : Une matrice $M = (m_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ est *stochastique* si et seulement si

- Pour tout $i = 1, \dots, n$ et tout $j = 1, \dots, n$, on a $0 \leq m_{ij} \leq 1$.
- Pour tout $i = 1, \dots, n$, on a $\sum_{j=1}^n m_{ij} = 1$

On pourra vérifier que si l'on désigne par C_1 le vecteur colonne dont tous les coefficients sont égaux à 1, la dernière propriété s'écrit encore $MC_1 = C_1$.

Remarque importante : On peut calculer la suite des puissances M , $M^2 = MM$, $M^3 = MMM$, ... d'une matrice stochastique M et vérifier qu'elles sont toutes des matrices stochastiques.

Définition : On dit qu'une matrice M est *positive*, et on écrit $M \geq 0$, si tous ses coefficients sont positifs ou nuls et *strictement positive*, et on écrit $M > 0$, si tous ses coefficients sont strictement positifs.

Remarque : Si M est carrée et $M \geq 0$ ($M > 0$) alors $M^k \geq 0$ ($M^k > 0$) pour $k = 1, 2, 3, \dots$

Les matrices stochastiques sont des exemples de matrices positives, elles sont parfois strictement positives mais pas nécessairement.

Définition : On dit qu'une matrice positive M est *primitive* si l'une des puissances de M a tous ses coefficients non nuls (et est donc strictement positive). Une matrice strictement positive a forcément toutes ses puissances strictement positives, c'est donc en particulier une matrice primitive.

4 Valeurs propres, vecteurs propres

Définition : Soit une matrice carrée M . Un nombre λ est une *valeur propre à gauche* de la matrice M (*left eigenvalue* en anglais) s'il existe un vecteur ligne V non nul tel que

$$VM = \lambda V.$$

Le vecteur V s'appelle alors un *vecteur propre à gauche* (*left eigenvector* en anglais). L'action de M sur le vecteur propre V consiste donc simplement à le multiplier par λ .

Ainsi pour vérifier que $\lambda = 4$ est une valeur propre à gauche de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ de vecteur propre associé $V = (2 \quad -3)$, il suffit de vérifier que

$$(2 \quad -3) \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = (8 \quad -12) = 4(2 \quad -3).$$

Nous avons vu l'exemple des distributions stationnaires d'une chaîne de Markov : une telle distribution est donc un vecteur propre à gauche associé à la valeur propre 1 de la matrice de transition $\mathbb{P}$ puisque l'on a $\pi^* \mathbb{P} = \pi^*$.

Puisqu'une distribution stationnaire d'une chaîne de Markov est un vecteur propre à gauche associé à la valeur propre 1, pour trouver une distribution stationnaire il suffit de rechercher un vecteur propre à gauche associé à la valeur propre 1, mais il faudra aussi qu'il soit positif et que la somme de ses coefficients soit égale à 1.

De la même façon un nombre λ sera une *valeur propre à droite* de M s'il existe un vecteur colonne W tel que $MW = \lambda W$. Le vecteur W s'appelle alors un *vecteur propre à droite* associé à la valeur propre λ .

Remarque : La matrice identité a pour seule valeur propre 1 et pour vecteurs propres tout vecteur non nul.

Remarque : Une matrice est dite *triangulaire supérieure* (resp. *inférieure*) si tous ses coefficients au-dessous (resp. au-dessus) de la diagonale sont nuls. Les éléments de la diagonale sont alors les valeurs propres de cette matrice.

L'ensemble des valeurs propres d'une matrice s'appelle le *spectre* de cette matrice. Une matrice $n \times n$ a au plus n valeurs propres, certaines peuvent être des nombres complexes. Par définition, à chaque valeur propre λ est associé au moins un vecteur propre mais en réalité, il est facile de voir que si V est un vecteur propre associé à λ , alors tous les multiples de V , comme $2V$ ou $-0.1V$, sont aussi des vecteurs propres associés à la même valeur propre. Il y en a donc une infinité pour chaque valeur propre.

Cette remarque a son importance pour le cas des matrices stochastiques : on peut montrer en effet que toute matrice stochastique possède la valeur propre à gauche 1 et donc possède aussi un vecteur propre à gauche associé à $\lambda = 1$ qui pourrait fournir une distribution stationnaire. Mais ce vecteur n'est pas nécessairement positif ou nul et la somme de ses coefficients n'est pas forcément égale à 1.

La recherche d'une distribution stationnaire, si elle existe, passe donc par la recherche d'un vecteur propre à gauche associé à $\lambda = 1$ qui ait ces deux propriétés. Il suffit d'en trouver un, s'il existe, dont tous les coefficients soient positifs ou nuls et de le diviser alors par sa norme (pourquoi?).

5 Comment faire du calcul matriciel avec son ordinateur ?

Le calcul avec des matrices à la main est vite fastidieux et même pratiquement impossible s'il s'agit de calculer par exemple une grande puissance d'une matrice.

La plupart des logiciels de calcul scientifique offrent la possibilité de calculer avec des matrices.

Voici comment procéder avec l'un d'eux, le logiciel Scilab qu'il est facile de télécharger et qui est gratuit.

Il suffit d'aller à l'adresse <http://www.scilab.org/fr/> et charger la dernière version (version 5.4.1), ce qui ne demande qu'un clic (et un peu d'attente). On exécute alors le fichier `scilab-5.4.1.exe` ce qui prend quelques minutes supplémentaires.

Une fois installé, il est très facile de l'utiliser :

pour saisir une matrice (par exemple celle du modèle de Doudou le hamster)

```
M=[0.9 0.05 0.05 ; 0.7 0 0.3 ; 0.8 0 0.2] ;
```

pour calculer son carré (et vérifier que c'est une matrice strictement positive et donc que M est primitive), ou sa puissance 100

```
M^2 ; M^100 ;
```

pour trouver l'ensemble de ses valeurs propres à gauche et les vecteurs propres associés

```
[Valeurs_propres,vecteurs_propres]=spec(M') ;
```