$u_{n+1} = f(u_n)$

Dans tout les exercices on supposera que $f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (ou $f \in C^1(I,I)$ où I est un intervalle stable par f) , que l est un point fixe de f: $f(l) = l$.

l est dit être un point fixe *attractif* si, pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$ contenant l, il existe un intervalle ouvert J contenant l et contenu dans I, tel que pour tout a dans J, la suite définie par: $u_{n+1} = f(u_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $u_0 = a$ converge vers l en restant toujours dans J.

l est dit être un point fixe *répulsif* de f si il existe un intervalle ouvert J de $\mathbb{R}$ contenant l tel que, pour tout a dans J, différent de l, la suite définie par: $u_{n+1} = f(u_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $u_0 = a$ sorte de J en un nombre fini d'itérations.

$B(l)$ désignera le bassin d'attraction ou le domaine d'attraction de l. C'est à dire l'ensemble des conditions initiales telles que les suites récurrentes asscociées convergent vers l.

Exemple: $f(x) = x^2$, on a deux points fixes.
O est attractif, 1 est répulsif, $B(0) =]-1,1[$, $B(1) = \{-1,1\}$.

1 Points attractifs, points répulsifs, domaine d'attraction

Cherchez la nature des points fixes et leurs bassins d'attractions dans les cas suivants:

1. $f(x) \equiv x/2$, $3x$, x, et plus généralement $f(x) = ax + b$,
2. $f(x) \equiv x^2$, $\sqrt{x}$ sur $[0,\infty[$,
3. $f(x) \equiv \sin(x)$,
4. $f(x) \equiv \dfrac{1+x^2}{2}$,
5. ** $f(x) \equiv 1 - x^2$.

2 f croissante

On suppose que f est croissante et continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrez que u_n est toujours monotone.
2. vrai ou faux : f monotone implique u_n monotone?
3. Décrire le comportement de la suite u_n si f n'a pas de point fixe.
4. Si f n'a qu'un seul point fixe, montrez que $B(l)$ n'a que quatre possibilités :
   $B(l) = \{l\}$ ou bien $\mathbb{R}$ ou bien $[l,+\infty[$ ou bien $]-\infty,l]$.
   Donner un critère simple pour calculer $B(l)$ connaissant le graphe de f.
5. Pour cette question, on suppose que f n'a que deux points fixes $l_1 < l_2$.
   (a) Etudiez précisement le cas où $f(x) < x$ si $l_1 < x < l_2$, et $f(x) \geq x$ sinon.
   (b) En général, montrez que si $l_1 < u_0 < l_2$ alors u_n converge.
   (c) Montrez que , qualitativement, on a essentiellement 8 cas.
6. Donner la limite de u_n en fonction de u_0 si $f(x) \equiv x + \sin(x)$.

3 Algorithme de Babylone

Babylone nous a légué de nombreux algorithmes dont une méthode extrêmement performante pour calculer la racine d'un nombre strictement positif seulement à l'aide des opérations élémentaires: $+, \times, /$.

1. Vérfiez que si x est une approximation strictement positive de $\sqrt{2}$ par défaut alors $\frac{2}{x}$ est une approximation de $\sqrt{2}$ par excés.
2. Ainsi $\sqrt{2}$ est encadrée par x et $\frac{2}{x}$. Pour obtenir une meilleure approximation de $\sqrt{2}$ on peut naturellement penser à prendre la moyenne des deux approximations: $f(x) := y = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$. y est elle toujours une meilleure approximation de $\sqrt{2}$? Donnez une condition simple pour qu'il en soit ainsi.
3. Si la nouvelle approximation y de $\sqrt{2}$ ne nous satisfait pas, on peut recommencer le procédé, ce qui revient à utiliser la suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n), u_0 := x$. Montrez que pour tout $u_0 > 0$, $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante et converge vers $\sqrt{2}$.
4. vitesse de convergence: Vérifiez à la calculatrice l'efficacité surprenante de cet algorithme d'approximation de $\sqrt{2}$. A l'aide de la suite auxiliaire $v_n := \frac{u_n - \sqrt{2}}{u_n + \sqrt{2}}$, ou, d'un D.L. de f en $\sqrt{2}$, démontrez que la convergence est trés rapide. Puis, justifiez et précisez cette affirmation: " ce procédé nous donne deux fois plus de décimales de $\sqrt{2}$ à chaque itération".
5. Plus de 2000 ans aprés l'invention de cette méthode Newton invente une nouveau procédé d'approximation d'une racine ξ de l'équation $g(x) = 0$. Il part d'un point x_0 qui approche ξ, trace la tangente au graphe de g au point $(x_0, g(x_0))$. Cette tangente intersecte la droite $y = 0$ en un point d'abcisse x_1. x_1 devient une nouvelle approximation de ξ. Et l'on peut réitérer le procédé en partant de x_1.
   (a) Ecrire la suite réurrente associée à l'algorithme de Newton.
   (b) Utilisez la méthode de Newton pour approcher la racine positive de $g(x) = x^2 - 2$.
6. Soit $a > 0$. Comment feriez vous pour approcher $\sqrt{a}$?

4 Attractivité et valeur absolue de $f'(l)$.

Soit $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et $l = f(l)$.

1. * Montrez que si $|f'(l)| < 1$ alors l est un point fixe attractif.
   on pourra montrer que f est localement monotone prés de l, ou que prés de l, $|u_n - l|$ est majorée par une suite géométrique convergente.
2. * Montrez que si $|f'(l)| > 1$ alors l est un point fixe répulsif.
3. Montrez que si $|f'(l)| = 1$ alors on ne peut pas conclure sur la nature de l.

5 Résultats généraux

1. Si $u_n \to l$, montrez que: ou bien $u_n = l$ à partir d'un certain rang, ou bien $u_n \neq l$, $\forall n$.
2. * Montrez que si l est un point fixe attractif de f alors $B(l)$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.
   $B(l)$ est ouvert si, tout point de $B(l)$ est contenu dans un intervalle ouvert contenu dans $B(l)$.
3. * Montrez que si l est un point fixe répulsif de f, et si $u_n \to l$ alors la suite (u_n) est stationnaire à partir d'un certain rang.
4. ** Si f est strictement monotone par morceaux, et si l est un point fixe répulsif de f, montrez que $B(l)$ est fini ou au plus dénombrable.
   f est strictement monotone par morceaux signifie que tout segment de $\mathbb{R}$ se décompose en un nombre fini d'intervalle où f restreinte à chaque intervalle est strictement monotone .