Suites

1 $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n)$

1. Montrez que $(u_n)_{n\geq 1}$ est strictement décroissante, et positive (étudiez $1 + \cdots + \frac{1}{n} - \int_1^n \frac{dx}{x}$).
2. En déduire que u_n converge vers un nombre strictement positif et que $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \sim \ln(n)$.

2 Solutions de $x^n = \exp(x),\ x > 0,\ n \geq 3$

1. Montrez que l'équation ci-dessus admet deux racines positives u_n et v_n telles que $1 < u_n < n < v_n$. On pourra utiliser la fonction $g(x) = x - n\ln(x)$.
2. Montrez que (u_n) et (v_n) sont strictement monotones et que: $v_n \to +\infty$ et $u_n \to 1$.$(h(x) = \ln(x)/x)$
3. En déduire que $u_n = 1 + \frac{1}{n} + O(\frac{1}{n^2})$. Pour cela, posez $u_n = 1 + a_n$.
4. Montrez que $\forall \alpha > 1,\ v_n/n^\alpha < 1$ à partir d'un certain rang. En déduire que $v_n/n^\alpha \to 0$.
5. En posant $v_n = nw_n$, montrez que $v_n \sim n\ln(n)$ et que $v_n/n - \ln(n) \to +\infty$.
6. En posant $w_n = (1 + z_n)\ln(n)$, montrez que $v_n = n[\ln(n) + \ln(\ln(n)) + \varepsilon_n]$ où $\varepsilon_n = O(\ln(\ln(n))/\ln(n)) \to 0$.
7. Pour $n = 10, 100$, estimez u_n, v_n, et visualisez sur votre calculette l'intersection des deux courbes.

3 De toute suite à valeurs réelles on peut en extraire une suite monotone

Définition 1 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On dit que u_p est une* **barre** *de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si, pour tout $n \geq p$, $u_n \leq u_p$.*

1. Que pensez vous d'une suite dont tous les termes sont des barres?
2. Que pensez vous d'une suite qui n'admet pas de barre?
3. Montrez que l'on peut extraire une suite monotone dans les deux cas suivants puis, justifiez le titre de cet exercice:
   (a) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet un ensemble *fini* de barres.
   (b) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet un ensemble infini de barres.
4. A l'aide du résultat de cet exercice et de résultats du Lycée démontrez le théorème de Bolzano-Weirstrass: " de toute suite réelle bornée on peut en extraire une sous-suite convergente".

4 Etude de $(\rho^n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\rho \in \mathbb{C}, |\rho| = 1, \rho \neq 1$

1. *preuve de la divergence de $(\rho^n)_{n\in\mathbb{N}}$:* On suppose que $\lim_{n\to+\infty} \rho^n = l$.
   (a) Montrez que , si une suite géométrique converge alors sa limite est nécessairement nulle.
   (b) Vérifiez que $|l| = 1$ puis, conclure.
2. *preuve de la périodicité ou de la densité de $(\rho^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur le cercle unité:*
   On représentera la raison sous la forme: $\rho = \exp(2i\pi\theta)$ où $i^2 = -1$ et $0 < \theta < 1$.
   (a) Vérifiez que si $\theta \in \mathbb{Q}$ alors $(\rho^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique.
   (b) On suppose que $\theta \notin \mathbb{Q}$.

i. Soit $N > 0$ un entier quelconque. Montrez à l'aide du principe des tiroirs de Dirichlet qu'il existe $0 \leq p < q \leq N$ tels que $|\rho^p - \rho^q| < 1/N$.

ii. On se donne $\varepsilon > 0$ quelconque. En déduire qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $|\rho^k| < \varepsilon$, puis conclure.

3. *preuve de l'équirépartion de* $(\exp(2i\pi n\alpha))_{n\in\mathbb{N}}$ *sur le cercle unité si* $\alpha \notin \mathbb{Q}$:
Pour cela on va montrer que pour les fonctions 1-périodique continues par morceaux on a:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(\alpha) + f(2\alpha) + \cdots + f(n\alpha)}{n} = \int_0^1 f(x)dx \tag{1}$$

(a) Vérifiez (1) si $f(x) = \exp(2i\pi kx)$ et, plus généralement un polynôme trigonométrique.

(b) Montrez que (1) est encore vraie si $f \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{C})$. On pourra utiliser un résultat de densité .

(c) Soit $0 \leq a < b < 1$ et f la fonction 1-périodique telle que $f(x) = 0$ si $0 \leq x < a$, $f(x) = 1$ si $a \leq x < b$, $f(x) = 0$ si $b \leq x < 1$. En encadrant f à l'aide de fonction continue, montrez que (1) est encore vraie pour f.

(d) En déduire que le nombre moyen de passage de la suite $(\exp(2i\pi n\alpha))_{n\in\mathbb{N}}$ sur tout arc du cercle unité est proportionnel à la longueur de l'arc. Conclure

5 Suites homographiques

Soit $z_0, a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc \neq 0$ et $c \neq 0$, $z_{n+1} := \dfrac{az_n + b}{cz_n + d}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Etudiez les exemples suivants: $z_{n+1} = 1/z_n$; $z_{n+1} := \dfrac{2z_n + 3}{3z_n + 2}$ avec $z_0 = -2/3$.

2. Montrez que la suite est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ sauf si $z_0 \in E_0[h]$, où $E_0[h]$ est un ensemble de points de $\mathbb{C}$ non vide et au plus dénombrable qui ne dépend que de h.

3. Si $(a - d)^2 + 4bc \neq 0$, montrez qu'il n'y a que deux suites constantes de valeurs α, ou $\beta \in \mathbb{C}$. Vérifiez que la suite définie par $w_n := \dfrac{z_n - \beta}{z_n - \alpha}$ est géometrique.

4. Si $(a-d)^2 + 4bc = 0$, montrez qu'il n'y a qu'une suite constante de valeur $\alpha \in \mathbb{C}$. Vérifiez que la suite définie par $w_{n+1} := \dfrac{1}{z_n - \alpha}$ est arithmétique.

5. A quelles conditions la suite (z_n) converge? On détaillera le cas où z_0 et $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

6. Etudiez les exemples suivants en précisant à chaque fois le cardinal de $E_0[h]$:

   (a) $z_{n+1} := \dfrac{-1}{z_n + 1}$,

   (b) $z_{n+1} := \dfrac{1}{z_n + 1}$,

   (c) $z_{n+1} := \dfrac{z_n}{z_n + 1}$,

   (d) $z_{n+1} := \dfrac{3z_n + 1}{z_n + 1}$,

   (e) $z_{n+1} := \dfrac{-0.9}{z_n + 1}$.