Variables aléatoires à densité

1 Variance

1. Si X est une v.a. rélle à densité continue, montrez que l'écart type de X est non nul.
2. Démontrez l'ingálité de Bienaymé-Tchebychev: $P[|X-E(X)| \geq a > 0] \leq \dfrac{Var(X)}{a^2}$.

2 Rencontre

Castor et Pollux projettent de se rencontrer entre 17h et 18h. Chacun d'eux a promis de ne pas attendre l'autre plus de 10 minutes. On suppose qu'ils arrivent indépendamments à des instants uniformément distribués entre 17h et 18h.

1. Calculez la probabilité d'une rencontre.
2. A présent, Castor fixe son heure d'arrivée à x. Quelle probabilité a-t-il de rencontrer Pollux?
3. Arrivant à l'heure x, Castor ne trouve personne. Quelle probabilité a-t-il de rencontrer Pollux?

3 Variables amnésiques

Soit T une v.a.r. strictement positive à densité continue sur $]0,+\infty[$. telle que, pour tout $s>0$ et $t>0$:

$$P(T>t+s|T>t) = P(T>s).$$

Le but de cet exercice est de montrer que T suit une loi exponentielle.

1. Pourquoi $P(T>0)>0$?
2. Vérifier que $P(T>t+s) = P(T>t)P(T>s)$ pout tout $t>0$ et $s>0$.
3. Montrez que $\forall t>0$, $P(T>t)>0$.
4. On définit alors l'application $G(t) = P(T>t)$.
   Calculer $G(0)$, G sur $]-\infty,0]$.
   Montrez que G est dérivable sur $]0,+\infty[$, expliciter G et conclure.

4 Lois gammas

Pour $a>0, \lambda>0$, on pose $\Gamma(a) := \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{a-1}dx$ et $\gamma_{a,\lambda}(x) = \dfrac{\lambda^a}{\Gamma(a)}e^{-\lambda x}x^{a-1}$, si $x>0$, $\gamma_{a,\lambda}(x)=0$ si $x\leq 0$. On appelle loi gamma $G(a,\lambda)$ la loi de densité $\gamma_{a,\lambda}$.

1. Vérifiez que: $\Gamma(.)$ est bien définie, continue sur $]0,+\infty[$, $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$, $\Gamma(n+1) = n!$

2. Soit X une v.a. de loi $G(a,\lambda)$, calculez $E(X)$, $Var(X)$.

3. ** Soit X,Y deux v.a. indépendantes de loi $G(a,\lambda)$, $G(b,\lambda)$. Montrez que la loi de $Z = X+Y$ est $G(a+b,\lambda)$. On pourra calculer $E(\varphi(Z))$ à l'aide de la loi du couple (X,Y) et ramener l'intégrale double à une intégrale simple.

4. Si $X_1,\cdots,X_n$ sont n v.a. indépendantes de loi exponentielles de paramètre λ, donnez la loi de $X_1+\cdots+X_n$.

5. Si $Y_1,\cdots,Y_n$ sont n v.a. indépendantes de loi normale centrées réduites, montrez que Y_1^2 suit la loi $G\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. En déduire la valeur de $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

6. Donnez la loi de $Z := Y_1^2+\cdots+Y_n^2$, et calculez $E(Z)$, $Var(Z)$.

5 Pannes d'ampoules

On dispose d'un lot d'ampoules électriques identiques. On suppose que la durée de vie de chaque ampoule est une v.a. X qui suit une loi exponentielle de paramétre $\lambda > 0$. Pour les applications numériques, le temps est exprimé en heure, et $\lambda := 10^{-3}$, $T = 200$, $\theta = 10^4$.

1. Calculez la durée de vie moyenne de chaque ampoule.

2. Quelle est la probabilité pour qu'une ampoule s'éteigne avant une durée T de fonctionnement?

3. On branche 2 ampoules simultanéments à un instant $t_0 = 0$.

   (a) Quelle est la probabilité qu'à un instant T, les 2 ampoules soient encore allumées?

   (b) Quelle est la probabilité qu'à un instant T, au moins l'une des 2 ampoules soit encore allumée?

   (c) Quelle est la probabilité qu'à un instant T, les 2 ampoules soient éteintes?

   On branche 10 ampoules simultanéments à un instant $t_0 = 0$.

   (a) Quelle est la probabilité qu'à un instant T, toutes les ampoules soient encore allumées?

   (b) Quelle est la probabilité qu'à un instant T, toutes les ampoules soient éteintes?

4. On branche une première ampoule à un instant $t_0 = 0$. Dès que celle-ci meurt, on la remplace par une seconde ampoule. Quelle est la loi de probabilité du temps déclairage à l'aide de ces deux ampoules et quel est le temps moyen d'éclairage?

5. On opère de façon identique avec n ampoules. Quelle est la loi de probabilité du temps déclairage?

6. Soit $\theta > 0$ fixé. On suppose qu'à un instant $t_0 = 0$, on branche la première ampoule. Dés qu'une ampoule meurt, on dit qu'il y a panne, on la remplace par une autre. Soit N le mombre de pannes durant le temps θ. Quelle est la loi de probabilité de N?

6 Corrigé succint :

6.1 Variance nulle Test Juin 2000

1. $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)dy, P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)dx = F_X(b) - F_X(a), P(X = a) = 0.$

2. Inégalité de Markov: $Y \geq 0$, v.a. à densité continue. $P(Y \geq b > 0) = \int_b^{+\infty} f_Y(y)dy = \int_b^{+\infty} \frac{y}{y} f_Y(y)dy \leq \int_b^{+\infty} \frac{y}{b} f_Y(y)dy = \frac{1}{b}\int_b^{+\infty} y f_Y(y)dy \leq \frac{1}{b}\int_0^{+\infty} y f_Y(y)dy = \frac{1}{b}E(Y)$; En effet, $0 = P(Y < 0) = \int_{-\infty}^{0} f_Y(y)dy \Rightarrow f_Y(y) = 0$, si $y < 0$.
Pour conclure, prendre $Y := |X - E(X)|^2, b := a^2 > 0$.

6.2 Rencontre [1] 2.12 p. 45

1. $\Omega = [0,1]^2$, (x,y) est le couple (l'heure d'arivée de Castor, l'heure d'arivée de Pollux) $-(17,17)$. La probabilité est le produit des probabilité : mesure de Lebesgue (Riemann suffiot ici). $10mm = 1/6h$.
$A =$" Castor et Pollux se rencontre" $= \{(x,y), |x-y| \leq 1/6\}$, une bande diagonale. $1 - P(A) = (1-1/6)^2$ d'où $P(A) = \frac{11}{36}$.

2. L'heure d'arrivée de Castor n'est plus aléatoire. Par suite, l'espace des épreuves n'est pas le même que dans 1. Nous le noterons cependant encore $(\Omega, \text{Borélien}, P)$. On a $\Omega = [0,1]$ (heure d'arrivée de Pollux) et P_p mesure de Lebesgue de $[0,1]$.
L'événement $A_x =$" Castor et Pollux se rencontre" $= \{y \in [0,1], |x-y| \leq 1/6\}$,
si $0 \leq x \leq 1/6, A_x = [0, x+1/6], P(A_x) = x + 1/6$;
si $1/6 < x < 5/6, A_x = [x-1/6, x+1/6], P(A_x) = 1/3$;
si $5/6 \leq x \leq 1, A_x = [x-1/6, 1], P(A_x) = 7/6 - x$.

3. L'espace des épreuves est le même qu'en 2. Soit $B_x =$"Pollux n'est pas la à l'heure x". On doit ici calculer $P(A_x|B_x)$.
si $0 \leq x \leq 1/6, B_x =]x,1], P(A_x|B_x) = \frac{P(A_x \cap B_x)}{P(B_x)} = \frac{P(]x, x+1/6])}{P(]x,1])} = 1/(6(1-x))$;
si $1/6 < x < 5/6, B_x =]x,1] \cup [0, x-1/6[, P(A_x|B_x) = \frac{P(]x, x+1/6])}{P(]x,1]) + P([0, x-1/6[)} = 1/5$;
si $5/6 \leq x \leq 1, B_x =]x,1] \cup [0, x-1/6[, P(A_x|B_x) = \frac{P(]x,1])}{P(]x,1]) + P([0, x-1/6[)} = 6(1-x)/5$.

6.3 Variables amnésiques [1] 3.14 p. 91

Elles sont dites amnésiques car: $P(T > t+s/T > s) = \frac{P(T > t+s \cap T > s)}{P(T > s)} = \frac{P(T > t+s)}{P(T > s)} = \frac{P(T > t) \times P(T > s)}{P(T > s)} = P(T > s)$. Donc $P(T > t+s/T > s) = P(T > t)$, c'est à dire sachant que l'événement ne s'est pas produit pendant l'intervalle de temps $[0,s]$, il a autant de chance de se produire durant l'intervalle $[0,t]$ que $[s, s+t]$, Le fait qu'un événement n'arrive pas ne diminue pas ni n'augmente pas sa probabilité d'arrivée. Quelqu'un qui a 10 ans a la m̂ probabilité de

vrivre au moins 30 ans de plus que quelqu'un qui a 60 ans. Ce qui ne tient pas compte du viellissement: i.e. on ne garde pas memoire de son age.

1. Soit $G(t) = 1 - F(t)$ où F la fonction de répartition de T, $0 \leq G \leq 1$, G est décroissante, $G(-\infty) = 1$, $G(+\infty) = 0$. L'énoncé dit que $G(0) > 0$, donc $G(0) = 1$ car T est positive. Soit $t > 0$ tel que $G(t) = 0$ alors $G(t/2) = \sqrt{G(t)}$, ainsi on trouve une suite $t_n := 2^{-n}t$ qui tends vers 0 telle que $G(t_n) = 0$ ce qui contredit la continuité de G en 0.

2.

3. $G(t) = \exp(-\alpha x)$, par monotonie de G on a $\alpha \geq 0$, et par ses limites en $+\infty$ on a $\alpha > 0$

rem: $Y = [X] + 1 \hookrightarrow \mathcal{G}(1 - \exp(-\lambda))$

6.4 Lois gammas [1] 3.11 p.82-83 [3] p. 115

1. $]0,1]$ et $1, +\infty$, IPP

2. $y = \lambda x$, $E(X) = \frac{\lambda^a \Gamma(a+1)}{\Gamma(a)\lambda^{a+1}} = \frac{a}{\lambda}$, $E(X^2) = \frac{\lambda^a \Gamma(a+2)}{\Gamma(a)\lambda^{a+2}} = \frac{a}{\lambda}$, $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{a}{\lambda^2}$.

3. ** Par l'indépendance, la loi du couple (X,Y) a pour densité : $\gamma_{a,\lambda}(x) \times \gamma_{b,\lambda}(y)$, donc
   $E(\varphi(Z)) = \int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R}^+} \varphi(x+y)\gamma_{a,\lambda}(x) \times \gamma_{b,\lambda}(y)dxdy = \int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R}^+} \varphi(x+y)\frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)}e^{-\lambda(x+y)}x^{a-1}y^{b-1}dxdy,$
   en posant $z = x+y$ on a $E(\varphi(Z)) = \int_{x\geq 0}\int_{z-x\geq 0} \varphi(z)\frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)}e^{-\lambda z}x^{a-1}(z-x)^{b-1}dxdz.$
   En intégrant d'abord en x on a $E(\varphi(Z)) = \int_{z\geq 0} \cdots (\int_0^z x^{a-1}(z-x)^{b-1}dx)dz.$
   En posant $x = tz, \beta(a,b) = \int_0^1 (t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt$, on a $\int_0^z x^{a-1}(z-x)^{b-1}dx = z^{a+b-1}\beta(a,b).$
   Donc $E(\varphi(Z)) = \frac{\Gamma(a+b)\beta(a,b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\int_0^{+\infty} \varphi(z)\gamma_{a+b,\lambda}(z)dz.$
   En prenant $\varphi \equiv 1$ on récupère une superbe identité: $\beta(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$ et CQFD.

4. Récurrence.

5. $P(Y^2 < z) = 0$ si $z \leq 0$. Si $z > 0$ $P(Y^2 < z) = P(-\sqrt{z} < Y < \sqrt{z}) = \int_{-\sqrt{z}}^{+\sqrt{z}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)du =$
   $2\int_0^{+\sqrt{z}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)du$. En dérivant cette application continue et de classe C^1 par morceaux, on voit que Y^2 admet la densité nulle sur $\mathbb{R}^-$ et $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}z^{-1/2}e^{-z/2}$ pour $x > 0$.
   Comme c'est une densité $\sqrt{2\pi} = \int_0^{+\infty} z^{-1/2}e^{-z/2}dz = \sqrt{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$, et $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. Y^2 a bien la loi gamma$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.
   (On l'appelle loi du chi-carré à 1 degré de liberté, notée $\chi^2(1)$).

6. Récurrence. $\gamma_{n/2,1/2}(x) = \frac{e^{-x/2}x^{n/2-1}}{2^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$, si $x > 0$, 0 sinon . $E(Z) = n$, $Var(Z) = 2n$.

6.5 Pannes d'ampoules [3] 7.3 p.118

$\lambda := 10^{-3}$, $T = 200$, $\theta = 10^4$.', $\lambda T = 0.2$.

1. $X \hookrightarrow G(1,\lambda), E(x) = \frac{1}{\lambda}, V(X) = \frac{1}{\lambda^2}, \sigma(X) = \frac{1}{\lambda}$.
2. $P(X < T) = F(T) = \int_0^T \lambda \exp(-\lambda x) dx 1 - \exp(-\lambda T) = 1 - e^{-0.2} \simeq 18\%$.
3. On branche 2 ampoules à un instant $t_0 = 0$. X_1, X_2, v.a.i. $\hookrightarrow G(1,\lambda)$.
   (a) $P(X_1 > T \cap X_2 > T) = (1 - P(X \leq T))^2 = \exp(-2\lambda T) \simeq 67\%$.
   (b) $P(X_1 > T \cup X_2 > T) = 1 - (1 - P(X \leq T))^2 = 1 - (1 - \exp(-2\lambda T))^2 \simeq 97\%$.
   (c) $P(X_1 \leq T \cap X_2 \leq T) = (P(X \leq T))^2 = (1 - \exp(-2\lambda T))^2 \simeq 03\%$.

   On branche 10 ampoules simultanéments à un instant $t_0 = 0. X_1, \cdots, X_n$, v.a.i. $\hookrightarrow G(1,\lambda)$, $n = 10$.
   (a) $P(X_1 > T \cap \cdots \cap X_n > T) = (1 - P(X \leq T))^n = \exp(-n\lambda T) \simeq 14\%$.
   (b) $P(X_1 \leq T \cap \cdots \cap X_n \leq T) = (P(X \leq T))^n = (1 - \exp(-\lambda T))^n \simeq 04.10^{-6}\%$.
4. X_1, X_2, v.a.i. $\hookrightarrow G(1,\lambda)$ donc $Y = X_1 + X_2 \hookrightarrow G(2,\lambda)$. $E(Y) = 2E(X) = \frac{2}{\lambda}$.
5. $\hookrightarrow G(n,\lambda)$
6. $S_k := X_1 + \cdots + X_k$. On a $[N \geq k] = [S_k < \theta]$,
   donc $P(N \geq k) = P(S_k < \theta) = \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \int_0^\theta e^{-\lambda x} x^{k-1} dx$.
   $P(N = k) = P(N \geq k) - P(N \geq k+1) = P(S_k < \theta) - P(S_{k+1} < \theta)$
   $= \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \left(\int_0^\theta e^{-\lambda x} x^{k-1} dx - \frac{\lambda}{k} \int_0^\theta e^{-\lambda x} x^k dx \right) = \cdots = \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \left[\frac{e^{-\lambda x} x^k}{k} \right]_0^\theta = \frac{e^{-\lambda\theta} (\lambda\theta)^k}{k!}$.
   Ainsi $N \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda\theta)$.
   Le nombre moyen de pannes sur une période de $10^4 h$ est de 10.

References

[1] Exercices de probabilités, Marie Cottrell, Valentine Genon-Catalot, Christian Duhamel, Thierry Meyre

[2] D. Foata, A. Fuchs, Calcul des probabilités

[3] Bernard Lanuzel, Probabilités et statistiques.

[4] L. Mazliak, Calcul de probabilités, Laurent Mazliak