Tests d'hypothèses

1 La pièce est-elle parfaite?

On jette 36 fois une pièce de monaie. Le nombre de piles obtenus effectivement sera noté x. On modélise cette expérience aléatoire par la variable aléatoire binomiale: $X \sim \mathcal{B}(36, p)$. La probabilité d'obtenir pile en un lancer est p. p est un nombre fixé mais inconnu à priori.

On veut tester l'hypothèse la pièce est bien équilibrée notée $H_0 : p = \frac{1}{2}$. Cette hypothèse est appelée hypothèse principale ou hypothèse nulle.

Cependant, la pièce est peut-tre trucquée? Dans ce cas l'hypothèse alternative suivante devient vraie. On note cette hypothèse $H_1 : p \neq \frac{1}{2}$.

Un test statistique comporte deux risques d'erreur. Si l'on rejette une hypothèse qui doit tre acceptée, on commet une erreur de type α ou de probabilité α (aussi appelée erreur de première espèce), et si l'on accepte une hypothèse qui doit tre rejetée, on commet une erreur de type β ou de probabilité β (aussi appelée erreur de deuxième espèce). Suivant les tests on cherche à minimiser l'une des deux erreurs, mais en général on espère que les deux soit petites.

On résume cette situation dans le tableau suivant:

Hypothèses	H_0 est vraie	H_1 est vraie
H_0 est acceptée	Bonne décision	Erreur β
H_0 est rejetée	Erreur α	Bonne décison

1. Calculez l'écart type σ de X.
2. On fait le test suivant: si $x \in [12, 24]$ on dit que la pièce est parfaite, sinon on dit qu'elle est trucquée.
   (a) Calculez exactement et numériquement α, la probabilité de rejeter une pièce parfaite.
   (b) Montrez que β (la probabilité d'accepter une pièce fausse) dépend de la valeur réelle de p.
   (c) Remplir le tableau suivant pour différente valeur de p. Utilisez vos calculatrices. Notez qu'il n'y a en fait que 4 calculs à faire.

$p =$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$\beta \simeq$									

   (d) Représentez le graphe de $p \mapsto \beta(p)$. Cette courbe s'appelle la courbe d'efficacité du test proposé.
   (e) On voudrait utilisez ce test que lorsque $\beta(p) \leq 5\%$. Comment interpréterez vous alors le résultat de ce test.
3. On garde $\alpha \leq 5\%$, mais on on fait cette fois-ci 100 lancers et H_0 est acceptée si $x \in [40, 60]$. Remplir le tableau suivant:

$p =$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$\beta \simeq$									

   A-t'on amélioré l'efficacité du test précédent en augmentant le nombre de lancers?

On sait que la distribution des tailles des femmes F suit une loi normale: $F \sim \mathcal{N}(160, 20)$, où les unités sont exprimées en centimètre. La taille des hommes suit une autre loi normale: $H \sim \mathcal{N}(175, 20)$.
On cherche à deviner le sexe d'une personne dont la taille est supérieure à la taille moyenne des femmes.
On note sa taille effectivement mesurée en cm: t. Pour cela, on se donne $a > 0$ et on fait le test *unilatéral* suivant parmétré par a : si $t \leq 160 + a$ on dit que la personne est une femme.

1. Représentez sur un mme graphe les densités de probabilités de F et H.
2. Exprimez clairement l'hypothése principale et l'hypothèse alternative.
3. Donnez une expression intégrale de α. Représentez α sur le graphe précédent.
4. En déduire que $a \mapsto \alpha = \alpha(a)$ est une fonction strictement décroissante.
5. Donnez une expression intégrale de β. Représentez β sur le graphe précédent.
6. En déduire que $a \mapsto \beta = \beta(a)$ est une fonction strictement croissante.
7. En déduire que que l'erreur de deuxième espèce augmente quand l'erreur de première espèce diminue et inversement.
8. Calculez α et β pour $a = 10$. (Utilisez vos calculatrices). Puis remplissez le tableau suivant:

$a =$	0	5	7.5	10	20	35	40
$\alpha \simeq$							
$\beta \simeq$							

9. Que faut-il prendre comme valeur de a si l'on veut que l'erreur de première espèce soit:
   (a) $\alpha = 5\%$
   (b) $\alpha = 1\%$
   (c) $\alpha = 0\%$

   Pour chaque cas, on calculera la probabilité de l'erreur β correspondante.
10. Que faut-il prendre comme valeur de a si l'on veut que l'erreur de deuxième espèce soit:
    (a) $\beta = 5\%$
    (b) $\beta = 1\%$
    (c) $\beta = 0\%$

    Pour chaque cas, on calculera la probabilité de l'erreur α correspondante.
11. En désepoir de cause, minimisez $\alpha + \beta$. (Dérivez $a \mapsto f(a) := \alpha + \beta$.)
12. Que pensez vous de l'efficacité de ce test?
13. Pour les jeunes (entre 20 et 30 ans), la taille des Femmes suit la loi: $Fj \sim \mathcal{N}(160, 10)$, et celle des hommes: $Hj \sim \mathcal{N}(180, 10)$. Pouvez vous obtenir cette fois ci un test efficace?

3.1 La pièce est-elle parfaite?

1. $\sigma = 3$
2. (a) $\alpha = P(|X - 18| > 2\sigma) = 2 * \frac{1}{2^{36}} \sum_{0}^{11} C_{36}^{k} \simeq 3\%$.

   (b) $\beta = \beta(p) := P(|X - 18| \leq 6 = \sum_{12}^{24} C_{36}^{k} p^k (1-p)^{36-k}$.

   (c)

$p =$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$\beta \simeq$	10^{-4}	4%	39%	84%	0 (97%)	84%	39%	4%	10^{-4}

   La symétrie $\beta(1-p) = \beta(p)$, nous permet de calculer seulement la moitié des termes. D'autre part à la limite $\lim_{p \to 1/2} \beta(p) = 1 - \alpha(1/2) \simeq 97\%$. Mais, si $p = 1/2$, on ne peut plus commettre une erreur de deuxième espèce: prendre un pièce fausse pour vraie donc $\beta(1/2) = 0$

   (d) Courbe en cloche avec maple. Et avec la calculette? Attention à la discontinuité en $p = 1/2$.

   (e) $\beta(p) \leq 5\%$. Par dichotomie on a $\beta = 5\%$ pour $p \simeq 0.205$ (ou 0.795). L'intervalle de confiance de p au niveau de confiance 5% est $[0.333\cdots, 0.666\cdots]$. Ainsi si p, en gros, est dans l'intervalle de confiance méfiance.
   En statistiques, on dit plutt que: **si $x \in [12, 24]$, ce test ne permet de rejeter l'hypothèse que cette pièce est parfaite.**

3.

$p =$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$\beta \simeq$	10^{-14}	10^{-5}	2%	54%	0 (96.5%)	54%	2%	10^{-5}	10^{-14}

   Augmenter la taille de l'échantillon améliore l'efficacité du test précédent. Par dichotomie on a $\beta = 5\%$ pour $p \simeq 0.317$.
   Par contre une pièce pas trop trucquée, $p = 0.4$ à environ une chance sur 2 de se faire passer pour unepièce parfaite.

3.2 Test sur la taille: grande femme ou petit homme?

1.
2. H_0 = l'hypothése principale: Si $t < 160 + a$ c'est une femme.
   ATTENTION :" sinon on dit que c'est un homme" c'est un autre test
   H_1 = l'hypothèse alternative : $t < 160 + a$ et c'est une homme.
3. $G(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi} \times 20} \exp\left(-\frac{(x)^2}{2 \times 20^2}\right) \sim \mathcal{N}(0, 20)$, $\alpha := \int_a^{+\infty} G(x)dx$
4. Graphiquement ou $a \mapsto \alpha' = \alpha'(a) = -G(a) < 0$
5. $\beta = \int_{-\infty}^{a-15} G(x)dx$ car $160 + a = 175 + (a - 15)$.
6. Graphiquement ou $a \mapsto \beta' = \beta'(a) = G(a - 15) > 0$
7. C'est géneral et encore + simple à voir avec une loi uniforme.
8.

$a =$	0	5	7.5	10	20	35	40
$\alpha \simeq$	50%	40%	35%	30%	16%	7%	2%
$\beta \simeq$	23%	31%	35%	40%	60%	77%	90%

9. On a utilisé la dichotomie.

   (a) $\alpha = 5\%$, $a \simeq 33$, $\beta \simeq 82\%$

(c) $\alpha = 0\%$, $a \simeq +\infty$, $\beta \simeq 100\%$

10. c'est symétrique, Prendre le contraire de : a de la question précédente -15. a devient négatif!

    (a) $\beta = 5\%$, $a \simeq -18 = -(33 - 15)$, $\alpha \simeq 82\%$

    (b) $\beta = 1\%$, $a \simeq -31$, $\alpha \simeq 94\%$

    (c) $\beta = 0\%$, $a \simeq -\infty$, $\alpha \simeq 100\%$

11. $f'(a) = G(a - 15) - G(a)$, Graphe de $G(.)$ donne $f'(a) = 0 \Longleftrightarrow a = 15/2 = 7.5$ $\alpha = \beta \simeq 35\%$.

12. Au mieux: $\alpha = \beta$:
    $\alpha \simeq 35\%$. signifie que, 1 fois sur 3 on prend une grande femme pour un homme, et $\beta \simeq 35\%$, signifie que, 1 fois sur 3 on prend un petit homme pour une femme. BOF

13. Oui $a = 20/2 = 10$.$\alpha = \beta \simeq 16\%$. C'est déjà mieux.
    rem: $a = 13$ donne $\alpha \simeq 10\%$ mais $\beta \simeq 24\%$.