Tests d'hypothèses

1 La pièce est-elle parfaite?

On jette 36 fois une pièce de monaie. Le nombre de piles obtenus effectivement sera noté x. On modélise cette expérience aléatoire par la variable aléatoire binomiale: $X \sim \mathcal{B}(36, p)$. La probabilité d'obtenir pile en un lancer est p. p est un nombre fixé mais inconnu à priori.

On veut tester l'hypothèse la pièce est bien équilibrée notée $H_0 : p = \frac{1}{2}$. Cette hypothèse est appelée hypothèse principale ou hypothèse nulle.

Cependant, la pièce est peut-être trucquée? Dans ce cas l'hypothèse alternative suivante devient vraie. On note cette hypothèse $H_1 : p \neq \frac{1}{2}$.

Un test statistique comporte deux risques d'erreur. Si l'on rejette une hypothèse qui doit être acceptée, on commet une erreur de type α ou de probabilité α (aussi appelée erreur de première espèce), et si l'on accepte une hypothèse qui doit être rejetée, on commet une erreur de type β ou de probabilité β (aussi appelée erreur de deuxième espèce). Suivant les tests on cherche à minimiser l'une des deux erreurs, mais en général on espère que les deux soit petites.

On résume cette situation dans le tableau suivant:

Hypothèses	H_0 est vraie	H_1 est vraie
H_0 est acceptée	Bonne décision	Erreur β
H_0 est rejetée	Erreur α	Bonne décison

1. Calculez l'écart type σ de X.
2. On fait le test suivant: si $x \in [12, 24]$ on dit que la pièce est parfaite, sinon on dit qu'elle est trucquée.
   (a) Calculez exactement et numériquement α, la probabilité de rejeter une pièce parfaite.
   (b) Montrez que β (la probabilité d'accepter une pièce fausse) dépend de la valeur réelle de p.
   (c) Remplir le tableau suivant pour différente valeur de p. Utilisez vos calculatrices. Notez qu'il n'y a en fait que 4 calculs à faire.

$p =$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$\beta \simeq$									

   (d) Représentez le graphe de $p \mapsto \beta(p)$. Cette courbe s'appelle la courbe d'efficacité du test proposé.
   (e) On voudrait utilisez ce test que lorsque $\beta(p) \leq 5\%$. Comment interpréterez vous alors le résultat de ce test.
3. On garde $\alpha \leq 5\%$, mais on on fait cette fois-ci 100 lancers et H_0 est acceptée si $x \in [40, 60]$. Remplir le tableau suivant:

$p =$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$\beta \simeq$									

   A-t'on amélioré l'efficacité du test précédent en augmentant le nombre de lancers?

2 Test sur la taille: grande femme ou petit homme?

On sait que la distribution des tailles des femmes F suit une loi normale: $F \sim \mathcal{N}(160, 20)$, où les unités sont exprimées en centimètre. La taille des hommes suit une autre loi normale: $H \sim \mathcal{N}(175, 20)$.
On cherche à deviner le sexe d'une personne dont la taille est supérieure à la taille moyenne des femmes.
On note sa taille effectivement mesurée en cm: t. Pour cela, on se donne $a > 0$ et on fait le test *unilatéral* suivant parmétré par a : si $t \leq 160 + a$ on dit que la personne est une femme.

1. Représentez sur un même graphe les densités de probabilités de F et H.
2. Exprimez clairement l'hypothése principale et l'hypothèse alternative.
3. Donnez une expression intégrale de α. Représentez α sur le graphe précédent.
4. En déduire que $a \mapsto \alpha = \alpha(a)$ est une fonction strictement décroissante.
5. Donnez une expression intégrale de β. Représentez β sur le graphe précédent.
6. En déduire que $a \mapsto \beta = \beta(a)$ est une fonction strictement croissante.
7. En déduire que que l'erreur de deuxième espèce augmente quand l'erreur de première espèce diminue et inversement.
8. Calculez α et β pour $a = 10$. (Utilisez vos calculatrices). Puis remplissez le tableau suivant:

$a =$	0	5	7.5	10	20	35	40
$\alpha \simeq$							
$\beta \simeq$							

9. Que faut-il prendre comme valeur de a si l'on veut que l'erreur de première espèce soit:
   (a) $\alpha = 5\%$
   (b) $\alpha = 1\%$
   (c) $\alpha = 0\%$

   Pour chaque cas, on calculera la probabilité de l'erreur β correspondante.
10. Que faut-il prendre comme valeur de a si l'on veut que l'erreur de deuxième espèce soit:
    (a) $\beta = 5\%$
    (b) $\beta = 1\%$
    (c) $\beta = 0\%$

    Pour chaque cas, on calculera la probabilité de l'erreur α correspondante.
11. En désepoir de cause, minimisez $\alpha + \beta$. (Dérivez $a \mapsto f(a) := \alpha + \beta$.)
12. Que pensez vous de l'efficacité de ce test?
13. Pour les jeunes (entre 20 et 30 ans), la taille des Femmes suit la loi: $Fj \sim \mathcal{N}(160, 10)$, et celle des hommes: $Hj \sim \mathcal{N}(180, 10)$. Pouvez vous obtenir cette fois ci un test efficace?