# Comparaison série et intégrale

## 1 Convergence et monotonie

1. Soit $f$ une fonction montone sur $[1,+\infty[$.
   Montrez que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx$ sont de même nature.
2. Soit $a>0$, étudiez la nature des séries de terme générale :
   $\displaystyle\frac{1}{n^a}, \frac{1}{n[\ln(n)]^a}, \frac{1}{n\ln(n)[\ln(\ln(n))]^a}, \frac{\exp\left[-a\sqrt{\ln(\ln(n))}\right]}{n}$ ( Agrég. 89).

## 2 $f$ décroissante et positive sur $[1,+\infty[$.

1. Montrez que $\displaystyle u_N := \sum_{n=1}^{N} f(n) - \int_1^N f(x)dx$ décroît et converge vers un nombre noté $\gamma[f]\geq 0$, de plus, si $f$ est strictement décroissante, alors $\gamma[f]>0$.
2. Etudiez les suites : $\displaystyle 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln(n)$, $\displaystyle 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n}$, $\displaystyle 1+\frac{1}{2^2}\cdots+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n}$.
3. En déduire que $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} f(n) \sim \int_1^N f(x)dx$, ou, $\displaystyle\sum_{n=N}^{+\infty} f(n) \sim \int_N^{+\infty} f(x)dx$.

## 3 Sommation par paquet

Soit $f$ définie sur $[a,+\infty[$, $a\leq x_0<x_1<\cdots<x_n\to+\infty$.

1. Montrez que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{|\sin(x)|}{x^\alpha}dx$ diverge pour $0<\alpha\leq 1$.
2. Soit $\displaystyle D_N(t)=\frac{\sin((N+1/2)t)}{\sin(t/2)}$, vérifiez que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^\pi |D_N(t)|dt=+\infty$.
3. Montrez que que si la suite $\displaystyle\int_a^{x_n} f(x)dx$ converge et que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_{x_{n-1}}^{x_n}|f(x)|dx=0$, alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge.
4. En déduire que si $f$ décroît et tend vers 0 alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\sin(x)dx$ converge.