

Séries

1 Séries géométriques

1. Trouvez $x \in \mathbb{Q}$ tel que $x = 0,3444444444 \dots$, puis $x = 0.99999999 \dots$.
2. Montrez que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \sin(2^{-n})$ converge et majorez son reste.
3. Soit $u_n := \sin(\pi(\sqrt{3} - 1)^n)$, et $v_n := \sin(\pi(\sqrt{3} + 1)^n)$, $n \geq 1$.
 - (a) Montrez que $u_n + (-1)^n v_n = 0$.
 - (b) Etudiez la convergence de $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ puis de $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$.

2 Séries à terme général décroissant

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite décroissante.

1. On suppose que $\sum u_n$ converge. Montrez que $nu_n \rightarrow 0$.
2. Si (u_n) est positive, montrez que $\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum 2^m u_{2^m}$ converge.
3. Etudiez la nature des séries de terme général suivant pour $s > 0$:

$$\frac{1}{n^s}, \frac{1}{(\ln(n))^s}, \frac{1}{n[\ln(n)]^s}, \frac{1}{n \ln(n)[\ln(\ln(n))]^s}, \frac{1}{n \ln(n) \ln(\ln(n))[\ln(\ln(\ln(n)))]^s}, \dots$$

3 Test du rapport

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$, $(v_n)_{n \geq 0}$ deux suites à termes strictement positifs.

1. Montrez que si à partir d'un certain rang,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n},$$

la convergence de $\sum v_n$ entraîne la convergence de $\sum u_n$ et la divergence de $\sum u_n$ entraîne la divergence de $\sum v_n$.

2. Application : retrouvez le **critère d'Alembert** : Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow r$, et si $r < 1$ montrez que la $\sum u_n$ converge en prenant pour v_n une suite géométrique de raison ρ avec $r < \rho < 1$. De même, montrez que $\sum u_n$ diverge si $r > 1$.
3. Application : retrouvez le **critère de Duhamel**. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On suppose que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\lambda}{n} + \frac{\varepsilon_n}{n}, \quad \varepsilon_n \rightarrow 0$$

Montrez que si $\lambda > 1$, $\sum u_n$ converge et si $\lambda < 1$, $\sum u_n$ diverge.

Pour cela, on prendra $v_n = n^{-s}$, $s > 0$, et on vérifiera que $\frac{v_{n+1}}{v_n} = 1 - \frac{s}{n} + \frac{s(s+1)}{2n^2} + \frac{\eta_n}{n^2}$, $\eta_n \rightarrow 0$.

4. Application : retrouvez le résultat de Gauss. Soit $c \in \mathbb{R}$. On suppose que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{1}{n} + \frac{c}{n^2} + \frac{\varepsilon_n}{n^2}, \quad \varepsilon_n \rightarrow 0,$$

alors $\sum u_n$ diverge. ($v_n = (n+a)^{-1}$).

5. Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{1}{n} - \frac{s}{n \ln(n)} + \frac{\varepsilon_n}{n \ln(n)}$, $\varepsilon_n \rightarrow 0$, alors montrez que $\sum u_n$ converge si $s > 1$, diverge si $s < 1$. ($v_n = 1/(n \ln^s(n))$).

6. Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{s}{n} + \varepsilon_n$, et si $\sum_{n=0}^{+\infty} |\varepsilon_n|$ converge .

(a) Montrez que $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = -\frac{s}{n} + w_n$, avec $\sum |w_n|$ est converge.

(b) En déduire que $\exists A > 0 / u_n \sim \frac{A}{n^s}$. En déduire la nature de $\sum u_n$.

7. Etudiez la nature des séries de terme général suivant : $\left(\frac{1.4.7 \cdots (3n-2)}{3.6.9 \cdots (3n)}\right)^2$,
 $(-1)^n \frac{a(a-1) \cdots (a-n+1)}{n!}$, $a \in \mathbb{R}$, $\left(\frac{1.3.5 \cdots (2n-1)}{2.2.6 \cdots (2n)}\right)^2$, $\prod_{k=1}^n (2 - e^{1/k})$.

4 Une application de la sommation d'Abel

1. Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ et $(b_n)_{n \geq 1}$ deux suites, on pose $\sigma_0 := 0$, $\sigma_n := a_1 + \cdots + a_n$.
 Supposons que : (i) $(\sigma_n)/\sqrt{n}$ est bornée, (ii) $\sum \sqrt{n}|b_n - b_{n+1}|$ converge, (iii) $\sqrt{n}b_n \rightarrow 0$,
 alors, montrez que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ converge.

Utilisez l'identité suivante $\sum_{n=p}^q a_n b_n = \sum_{n=p}^{q-1} \sigma_n (b_{n+1} - b_n) + \sigma_q b_q - \sigma_{p-1} b_p$ pour $q > p \geq 1$.

2. Soit $E(x)$ la partie entière de x , $a_n := (-1)^{E(\sqrt{n})}$ et $u_n := a_n/n$, pour $n \geq 1$.

(a) Montrez que $A_k := \sum_{j=k^2}^{(k+1)^2-1} a_j = (-1)^k (2k+1)$ et que :
 si k est pair $\sigma_{(k+1)^2-1} = k$, si k est impair $\sigma_{(k+1)^2-1} = -k - 2$.

(b) En déduire que $\sum u_n$ converge.

3. Soit $\alpha > 0$, $b_n = n^{-\alpha}$, et $v_n := a_n b_n = \frac{(-1)^{E(\sqrt{n})}}{n^\alpha}$.

(a) Montrez que $\sum v_n$ converge si $\alpha > 1/2$.

(b) Montrez que $\sum v_n$ diverge si $\alpha \leq 1/2$.

Pour cela montrez que $|B_k| := \left| \sum_{j=k^2}^{(k+1)^2-1} v_j \right| \geq \frac{2k+1}{(k^2+2k)^\alpha}$.