$u_n = O(v_n)$,$u_n = o(v_n)$, $u_n \sim v_n$

On rappelle que:

- $u_n = O(v_n)$, s'il existe une constante C telle que $|u_n| \leq C|v_n|$ à partir d'un certain rang;
  (Les confusions de la notion $O(.)$ provient de son utilisation sous forme d'égalité, alors qu'il s'agit surtout d'une inégalité);
- $u_n = o(v_n)$, s'il existe une suite (ε_n) qui converge vers 0 telle que $u_n = \varepsilon_n v_n$, à partir d'un certain rang;
- $u_n \sim v_n$, s'il existe une suite (ε_n) qui converge vers 0 telle que $u_n = (1 + \varepsilon_n)v_n$, à partir d'un certain rang.

1 $u_n = O(v_n)$

1. Soit $a, b > 0$. Quand a-t'on $n^a = O(n^b)$?
2. Que signifie que $u_n = O(1)$?
3. Soit $u_n = \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$, $v_n = 1 + (-1)^n$. A-t'on $u_n = O(v_n)$? A-t'on $v_n = O(u_n)$?
4. Soit P une fonction polynôme, si $u_n = O(v_n)$, a-t'on $P(u_n) = O(P(v_n))$?

2 $u_n \sim v_n$

1. Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Quand a-t'on $n^a \sim n^b$?
2. Que signifie que $u_n \sim 1$?
3. Que signifie que $u_n \sim 0$?
4. Montrez que si $u_n \sim v_n$ alors $u_n = O(v_n)$ mais que la réciproque est fausse.
5. Montrez que $u_n \sim v_n$ si et seulement si $u_n - v_n = o(u_n)$.
6. Si $(u_n)_n$ converge vers U et $(v_n)_n$ converge vers V, donnez une condition sur U et V pour que $u_n \sim v_n$.
   Donnez des exemples concrets pour les trois cas suivants: $U = V = 1$, $U = V = 0$, $U = 0$ et $V = 1$.
7. Soit $u_n > 0$, $v_n > 0$. Démontrez les équivalences suivante:
   $u_n \sim v_n \Longleftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1 \Longleftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \min\left(\frac{u_n}{v_n}, \frac{v_n}{u_n}\right) = 1 \Longleftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \max\left(\frac{u_n}{v_n}, \frac{v_n}{u_n}\right) = 1.$

3 Propriétés transmissibles par les équivalents

1. Montrez que si $u_n \sim v_n$ et que (u_n) est positive alors (v_n) est positive à partir d'un certain rang.
2. Montrez que si $u_n \sim v_n$ et que (u_n) est bornée alors (v_n) est bornée.
3. Montrez que si $u_n \sim v_n$ et que (u_n) est convergente alors (v_n) est convergente.

4 Somme d'équivalents

1. Montrez sur un exemple que si $u_n \sim u'_n$ et $v_n \sim v'_n$, alors on n'a pas nécessairement $u_n + v_n \sim u'_n + v'_n$. (Par exemple, on peut prendre: $u_n \equiv 1, u'_n \equiv 1 + 1/n, v_n \equiv v'_n \equiv -1$.)

2. Voici une démonstration douteuse d'un résultat faux:
On va démontrer que si $u_n \sim u'_n$ et $v_n \sim v'_n$, alors $u_n + v_n \sim u'_n + v'_n$.
En effet : $u'_n = u_n(1 + \varepsilon_n), v'_n = v_n(1 + \eta_n)$, à partir d'un certain rang, donc, il suffit de montrer que $R_n = o(u_n+v_n)$, où R_n est défini par: $R_n := u'_n+v'_n-(u_n+v_n) = \varepsilon_n u_n+\eta_n v_n$. Soit $e_n := \max(\varepsilon_n, \eta_n)$. D'une part $e_n \to 0$, et d'autre part $R_n \leq e_n(u_n + v_n)$, donc $R_n = o(u_n + v_n)$. CQFD.

   (a) Trouvez au moins une erreur grave dans cette démonstration fausse.

   (b) Cependant, montrez qu'en rajoutant une hypothèse simple sur les suites (u_n) et (v_n), cette démonstration devient juste.

5 Exponentielle d'équivalents

1. Soit $u_n = n^2 + n$, $v_n = n^2$, montrez que $u_n \sim v_n$ mais que $\exp(u_n)$ n'est pas équivalente à $\exp(v_n)$).

2. En déduire que l'exponentielle de suites équivalentes ne sont pas nécessairement équivalentes.

3. En revanche, montrez que, si (u_n) est une suite bornée et si $u_n \sim v_n$ alors $\exp(u_n) \sim \exp(v_n)$.

6 Logarithme d'équivalents

1. Etudiez les couples d'exemples suivants $(\ln(n), \ln(n+1))$, $(\ln(n), \ln(n+\sqrt{n}))$, $(\ln(1+1/n), \ln(1+1/n^2))$.

2. Montrez que si $u_n \sim v_n$ et, si $u_n > 0$ à partir d'un certain rang, alors $\ln(1 + u_n) \sim \ln(1 + v_n)$.

3. On suppose que $u_n > 0$ et $v_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que $u_n \sim v_n$.

   (a) Montrez que l'on n'a pas toujours $\ln(u_n) \sim \ln(v_n)$.

   (b) En revanche, rajoutez les hypothèses les plus faibles possible sur (u_n) et (v_n) pour avoir toujours $\ln(u_n) \sim \ln(v_n)$.

7 Corrigé succint :

7.1 $u_n = O(v_n)$

1. $a \leq b$

2. $u_n = O(1)$ si et seulement si elle est bornée. En effet, il existe une constante C telle que, à partir d'un certain rang N, $|u_n| \leq C$, donc $|u_n| \leq \max(C, |u_0|, |u_1|, |u_2|, \cdots, |u_N|)$.

3. Non et non, elles doivent s'anuler en même temps pour n assez grand pour espérer avoir oui et oui.

4. Non en général: contre exemple: $u_n = 1 \sim 1 + 1/n$ et $P(x) = x - 1$. Mais si tous les coefficients de P sont positifs et $u_n > 0$, ou si $|u_n| \to +\infty$ alors la réponse est oui.

7.2 $u_n \sim v_n$

1. $a = b \Longleftrightarrow n^a \sim n^b$

2. $u_n \sim 1 \Longleftrightarrow u_n \to 1$

3. $u_n \sim 0 \Longleftrightarrow u_n \equiv 0$ à partir d'un certain rang.

4. $u_n \sim v_n \Longrightarrow u_n = O(v_n)$ car $0.5 < (1 + \varepsilon_n) < 1.5$ à partir d'un certain rang ,
   La réciproque est fausse: $n = O(n^2)$ mais ...

5.

6. $U = V \neq 0$

7. $r_n := u_n/v_n, M_n := \max(r_n, 1/r_n), m_n := \min(r_n, 1/r_n)$. On a $m_n \leq r_n \leq M_n$. Or $M_n = 1/m_n$, donc si $m_n \to 1$, M_n aussi, et par le théorème des gendarmes $r_n \to 1$.

7.3 Propriétés transmissibles par les équivalents

1. car $0.5 < (1 + \varepsilon_n) < 1.5$ à partir d'un certain rang

2. car $0.5 < (1 + \varepsilon_n) < 1.5$ à partir d'un certain rang

3.

7.4 Somme d'équivalents

1.

2. (a) Pour $R_n \leq e_n(u_n + v_n)$, pb de signes
   même si $R_n > 0$, $u_n + v_n$ peut être beaucoup + petit que $|u_n| + |v_n|$.

   (b) $u_n > 0$

7.5 Exponentielle d'équivalents

1.

2.

3. $v_n = (1 + \varepsilon_n)u_n$, $\varepsilon_n \to 0$, $\dfrac{\exp(v_n)}{\exp(v_n)} = \exp(\varepsilon_n u_n)$

7.6 Logarithme d'équivalents

1. $\ln(n) \sim \ln(n+1)$, $\ln(n) \sim \ln(n+\sqrt{n})$, $\ln(1+1/n) \sim 1/n$ mais $\ln(1+1/n^2) \sim 1/n^2$.

2. On utilise par exemple l'inégalité classique valable pour tout $x > -1$:
$$\frac{x}{x+1} \leq \ln(1+x) \leq x.$$
De $u_n = (1+\varepsilon_n)v_n$ on a $\ln(1+u_n) = \ln(1+v_n+\varepsilon_n v_n) = \ln(1+v_n) + \ln\left(1+\varepsilon_n \frac{v_n}{1+v_n}\right)$. Notons $w_n := \frac{v_n}{1+v_n}$ qui est une suite comprise strictement entre 0 et 1, alors:
$$\frac{\ln(1+u_n)}{\ln(1+v_n)} = 1 + \frac{\ln(1+\varepsilon_n w_n)}{\ln(1+v_n)} \quad \text{et} \quad \frac{\varepsilon_n}{(1+\varepsilon_n w_n)(1+v_n)} \leq \frac{\ln(1+\varepsilon_n w_n)}{\ln(1+v_n)} \leq \varepsilon_n$$
CQFD.
On peut généraliser le résultat avec le même type de calcul en supposant seulement que $\inf u_n > -1$. On fera attention à discuter suivant le signe de v_n pour faire les encadrements de $\eta_n := \frac{\ln(1+\varepsilon_n w_n)}{\ln(1+v_n)}$.
Attention! sans la condition $\inf u_n > -1$ c'est faux: $u_n = -1+1/n$, $v_n := -1+1/n^2$.
En revanche, si $\inf u_n > -1$ alors $\inf v_n > -1$, et, (u_n) et (v_n) sont équivalentes.

3. (a) conbtre-exemples: $1+1/n \sim 1+1/n^2$ mais: $\ln(1+1/n) \sim 1/n$ mais $\ln(1+1/n^2) \sim 1/n^2$.
   (b) En général, $u_n \sim v_n$, $\lim u_n = a$ et $f(a) = 0$, on n'a pas forcément $f(u_n) \sim f(v_n)$. En revanche, si $f'(a) \neq 0$ il faut et il suffit que $u_n - a \sim v_n - a$.
   Une condition générale pour $f = \ln$ qui a en plus un problème en 0:
$$u_n \sim v_n, \inf u_n > 0 \text{ et } u_n - 1 \sim v_n - 1 \Longrightarrow \ln u_n \sim \ln v_n.$$