Séries entières

Pour $a \in \mathbb{C}, r \geq 0, D(a,r) := \{z \in \mathbb{C}, |z-a| < r\}, C(a,r) := \{z \in \mathbb{C}, |z-a| = r\}, \overline{D}(a,r) := D(a,r) \cup C(a,r), \dot{D}(a,r) = D(a,r) - \{a\}$.

1 Calculs de rayons de convergence

$R[f]$, $R[a_n]$, $R[a_n z^n]$, ou $R[\sum a_n z^n]$ désigne le rayon de convergence de $f(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

1. Calculez $R[1/n!]$, $R[n^n]$, $R[(1+(-1)^n/n)^{n^2}]$, $R[n^n z^{n!}]$, $R[n! z^{n^n}]$.
2. Calculez, si c'est possible, $R[a_n/n^9]$, $R[2^n a_n]$, $R[a_n/n!]$, $R[a_n^2]$, en fonction de $R[a_n]$.
3. Calculez $R\left[\dfrac{\sin(n)}{n}\right]$.

2 Dans le disque de convergence

Soit $R > 0$, $f(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ pour $|z| < R$. On suppose que f n'est pas la fonction identiquement nulle sur $D(0,R)$.

1. Prouvez l'existence d'un nombre $r > 0, r \leq R$ tel que f ne s'annule en aucun point de $\dot{D}(0,r)$.
2. Montrez que pour tout $z_0 \in D(0,R)$, f est développable en série entière en z_0.
3. En déduire que pour tout $r < R$, f n'admet qu'un nombre fini de racines sur $D(0,r)$.
4. f a-t'elle néceessairement qu'un nombre fini de racines sur $D(0,R)$?

3 Sur le cercle de convergence

Les trois exercices suivant sont indépendant.

1. (a) Donnez des exemples de séries entières qui convergent en aucun (respectivement en tout) point du cercle de convergence.
   (b) Etudiez la convergence de $\sum z^n/n$ sur son cercle de convergence.
   (c) Plus généralement, soit P, Q deux polynômes premiers entre eux. Etudiez la convergence de $\sum P(n)/Q(n) z^n$ sur son cercle de convergence.
2. Soit $a_n = 1/p$ si $n = 3^p$, $a_n = -1/p$ si $n = 2 \times 3^p$, $a_n = 0$ sinon.
   (a) Calculez $R[a_n]$.
   (b) Soit $m \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}$, montrez que $\sum a_n z^n$ converge si $z = \exp(i\pi 2k/3^m)$.
   (c) Soit $m \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}$, montrez que $\sum a_n z^n$ diverge si $z = \exp(i\pi(2k+1)/3^m)$.
   (d) En déduire que la série converge (respectivement diverge) sur un ensemble dense de $C(0,1)$.
3. **Théorème d'Abel et "petit" théorème Taubérien**

   Soit $S \in \mathbb{C}$, $f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, $f_N(x) := \sum_{n=0}^{N} a_n x^n$. On suppose que $R[f] = 1$.

   On note : (i) : $S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, (ii) : $\lim_{x \to 1-0} f(x) = S$, (iii) : $n a_n \to 0$.

Remarquez que (i) signifie que la série de terme général a_n converge et que sa somme est égale à S.

(a) Montrez que (i) $\Rightarrow$ (ii), à l'aide de la transformation d'Abel.

(b) En déduire que : $\ln(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, $\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

(c) Montrez que la réciproque (de (i) $\Rightarrow$ (ii)), est fausse en général ($a_n = (-1)^n$).

(d) Montrez que (ii) et (iii)$\Rightarrow$ (i).

Pour cela, soit $x_p = 1 - 1/p$, vérifiez que $f_p(x_p) \to S$, puis que $|f_p(1) - f_p(x_p)| \leq \frac{1}{p} \sum_{n=0}^{p} n|a_n|$.

(e) * On peut montrer que si $(na_n)_n$ est bornée et $\lim_{x \to 1-0} f(x) = S$ alors $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge et vaut S.

4 Séries entières et dénombrement

1. Pour $n \in \mathbb{N}$ cherchez le nombre c_n de solution entières de : $x_1 + 2x_2 = n$, o $(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2$.
2. Montrez que $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = f(z) := \frac{1}{(1-z)(1-z^2)}$ pour $|z| < 1$.
3. Recalculez c_n en développant f en série entière à l'origine.
4. Comptez le nombre de solutions entières positives ou nulles de $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = n$, pour $0 \leq n \leq 10$.

5 Partitions et Séries entières

$\{\Omega_1, \cdots, \Omega_k\}$ est une partition de $\{1, \cdots, n\}$, si les Ω_j sont non vides, deux à deux disjoints, et si leur union est $\{1, \cdots, n\}$. On note p_n le nombre de partition de $\{1, \cdots, n\}$: $p_0 = 1$ (par convention), $p_1 = 1$, $p_2 = 2$, $p_3 = 5$.

1. Montrez que $p_{n+1} = \sum_{j=0}^{n} C_n^j p_{n-j}$.
2. On pose alors $f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{p_n}{n!} x^n$. Montrez que $f \in C^\infty(]-1, 1[)$.
3. Montrez que $f'(x) = e^x f(x)$. En déduire une expression de f.
4. Calculez le nombre de partition de $\{a, b, c, d, e, f, g\}$.

Références

[1] LeLong-Ferrand, exercices.

[2] Gourdon, Analyse, exercices.

[3] Krée &Vauthier, exercices resolus.

[4] Meunier, Exercice d'Oral corrigés et commentés pour l'agregation interne

[5] Pommelet, Analyse,

[6] Rudin, Principes d'analyse mathémathiques.

[7] Tisssier, exercices pour l'Agrégation interne.