Variables aléatoires discrètes

1 Variance nulle

1. Construire un exemple de variable aléatoire non constante pour laquelle sa variance est nulle.
2. Montrer que la variance de la variable aléatoire discrète X est nulle si et seulement si il existe $c \in \mathbb{R}$ telle que $P(X = c) = 1$.
3. Démontrez l'ingálité de Bienaymé-Tchebychev: $P[|X - E(X)| \geq a > 0] \leq \frac{Var(X)}{a^2}$.

2 Un exemple de vecteur aléatoire discret

Une expérience aléatoire consiste à lanver simultanément trois dés, on note l'issue $\omega := (d_1, d_2, d_3)$, les trois points marqués. On pose $X(\omega) := \min(d_1, d_2, d_3)$, $Y(\omega) := \max(d_1, d_2, d_3)$.

1. Quelle est la loi de probabilité du couple $Z = (X, Y)$?
2. Calculez les lois marginales de Z.
3. Calculez la loi conditionnelle de Y sachant que $X = 4$.

3 Corrélation et indépendance

On suppose que la v.a. X est à valeur dans $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ de manière equiprobable. On pose $Y := X^2$.

1. Ecrire la loi de Y et du couple (X, Y)
2. Montrez que que covar(X,Y)=0 alors que X et Y ne sont pas indépendantes.

4 Somme et différence de v.a. de Bernouilli

Soit X et Y deux v.a. de Bernouilli indépendantes et de même paramètre $p \in]0, 1[$. On pose $S = X + Y$, $D = X - Y$.

1. Quelle est la loi de probabilité du couple (S, D)?
2. Calculez le coefficient de corrélation linéaire entre S et D.
3. S et D sont-elles indépendantes?

5 Lois des extrêmes de deux v.a.

Soit X, Y deux v.a. indépendantes de loi géométrique $G(p)$, $p \in]0,1[$: $P[X = k] = (1-p)^{k-1}p, k \in \mathbb{N}-\{0\}$. Soit $U := \min(X, Y) \leq V := \max(X, Y)$.

1. Quelle est la fonction de répartition de X et la valeur de $P[X > x],\ x \in \mathbb{R}$.
2. Quelle est la fonction de répartition de V? En déduire la loi de V.
3. De même, calculez la loi de U.
4. Plus généralement, si $X_1, X_2, \cdots, X_n$ sont n v.a. indépendantes de loi $G(p)$, calculez la loi de $U_n := \min(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ et de $V_n := \max(X_1, X_2, \cdots, X_n)$.
5. On jette 5 dés. S'il y a des as, on les mets de côté. Les autres dés, s'il en reste, sont alors jetés, et ainsi de suite, tant qu'il reste des dés. On note N le nombre de jets qu'il a fallu pour avoir les 5 as. Quelle est la loi de N? Calculez son espérance.

6 Fonction génératrice de v.a. binomiale et de Poisson

1. Soit X, Y deux v.a. discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$, $G_X(s) = E(s^X)$, $G_Y(s) = E(s^Y)$, $s \in [-1, 1]$. Montrez que X et Y ont même loi si et seulement si $G_X \equiv G_Y$.
2. Soit X, Y deux v.a. indépendantes de lois respectives binomiales $B(n, p)$, $B(m, p)$.
   (a) Calculer la fonction génératrice G_1 de X: $G_1(s) := E(s^X)$.
   (b) En déduire $E(X)$, $Var(X)$, à l'aide de $G_1'(1)$ et $G_1''(1)$.
   (c) Donner la loi de probabilité de $X + Y$.
3. Soit X, Y deux v.a. indépendantes de lois respectives de Poisson $P(\lambda)$, $P(\mu)$.
   (a) Calculer la fonction génératrice G_2 de X: $G_2(s) := E(s^X)$.
   (b) En déduire $E(X)$, $Var(X)$.
   (c) Donner la loi de probabilité de $X + Y$.
4. On se donne λ, une suite de v.a X_n de loi $B(n, p_n)$, telles que $np_n \to \lambda$. On note H_n la fonction génératrice de X_n. Montrez que H_n converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers G_2.
5. Cette propriété de convergence nous permet de faire des calculs approchés. Supposons par exemple qu'à la sortie d'une usine de fabrication automobile, chaque véhicule ait une chance sur 10000 de comporter un pare-brise défectueux (et ceci indépendamment de la fabrication des autres véhicules); quelle est la probabilité qu'un parc de 10000 voitures comprenne au moins un véhicule au pare-brise défectueux?

7 Corrigé succint :

7.1 Variance nulle [4] A.10 p.8 + Test Juin 2000

1. [4] A.10 p.8 co. p. 16.
   $\Omega = \{0,1\}$, $P(1) = 1$, $P(0) = 0$, $X(\omega) = 1 - \omega$. X n'est pas une application constante. De $X^2 = X$ on a $E(X^2) = E(X) = 0$.

2. Soit $\Omega \neq \emptyset$, $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I \subset \mathbb{N} - \{0\}\}$, I fini ou dénombrable, $i \mapsto x_i$ injective, $p_i = P(X = x_i) > 0$. $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = E(X - E(X)^2) = \sum_{i \in I}(x_i - E(X))^2 p_i$.
   Cette somme est nulle ssi tout ses termes sont nulles donc si $card(I) = 1$, $I = \{1\}$, $c = E(X)$.

3. [3] p122 $P[|X - E(X)|^2 \geq a^2 > 0] = \sum_{i \in I, |x_i - E(X)| \geq a} p_i \leq \sum_{i \in I, |x_i - E(X)| \geq a} (x_i - E(X))^2/a^2 p_i \leq 1/a^2 \sum_{i \in I}(x_i - E(X))^2 p_i \leq \frac{Var(X)}{a^2}$.
   Inégalité de Markov: $X \geq 0$ $P[X \geq a > 0] = \sum_{i \in I, x_i \geq a} p_i \leq \sum_{i \in I, x_i \geq a} \frac{x_i}{a} p_i \leq \frac{E(X)}{a}$.

7.2 [3] Exemple introductif 5.1.1 p.70-71

1. $\Omega = \{1, \cdots, 6\}^3$, $P(Z = (i,j)) = p_{i,j}$, si $i > j$, lévènement $[Z = (i,j)]$ est impossible donc $p_{ij} = 0$.
   $A[i,j] = \{\omega \ / \ X(\omega) = i, Y(\omega) = j\}$,
   si $j < N$, $\varphi(i,j,k) = (i+1, j+1, k+1)$ est une bijection de $A[i,j]$ sur $A[i+1, j+1]$
   donc $p_{i,j} = p_{i+1,j+1} \rightarrow p_{i,j} = \pi_{j-i}$, $\pi_0 = 1/216$, $k > 0 \Rightarrow \pi_k = \frac{6k}{216} = \frac{k}{36}$,
   car $k > 0$; $p_{1,k+1}$, $(1 < x < k+1) \rightarrow 3_1 \times 2_{k+1} \times (k-1)_x$ et $(1, 1, k+1) \rightarrow 3$, $(1, k+1, k+1) \rightarrow 3$,
   donc $216\pi_k = 6(k-1) + 3 + 3 = 6k$.

2. proba= $\frac{1}{216} \times$

X \ Y	1	2	3	4	5	6	lois de X
1	1	6	12	18	24	36	91
2	0	1	6	12	18	24	61
3	0	0	1	6	12	18	37
4	0	0	0	1	6	12	19
5	0	0	0	0	1	6	7
6	0	0	0	0	0	1	1
loi de Y	1	7	19	37	61	91	216

   $216P(Y = j) = 216 \sum_{i=1}^{6} p_{ij} = 1 + \frac{i(i-1)}{2} 6 = 1 + 3j(j-1) = [1, 1, 19, 37, 61, 97]$.
   Et $P(X = i) = P(Y = 7 - i)$.
   remarque : si X et Y sont indépendants la matrice des $p_{ij} = P(X = i) \times P(Y = j)$ est de rang 1.

3. $P(X = 4) = 19/216$, $P(Y = j/X = 4) = P(Z = (4,j))/P(X = 4) = 1/19[0, 0, 0, 1, 6, 12]$.

7.3 Corrélation et indépendance [3] 5.3 p.79

1. $Z = (X, Y)$,

Y \ X	-2	-1	0	1	2	lois de Y
0	0	0	1/5	0	0	1/5
1	0	1/5	0	1/5	0	2/5
4	1/5	0	0	0	1/5	2/5
loi de X	1/5	1/5	1/5	1/5	1/5	1

(on a transposée pour raccourcir)

2. $E(X) = 0$, $Cov(X, Y) = E(X.X^2) - E(X)E(X^2) = E(X^3) = 0$, mais $P(Z = (2, 1)) = 0 \neq P(X = 2) \times P(Y = 1)$.

7.4 Somme et différence de v.a. de Bernouilli [3] 5.6 p.80, co p 84.

1.

S \ D	-1	0	1	lois de S
0	0	$(1-p)^2$	0	$(1-p)^2$
1	$p(1-p)$	0	$p(1-p)$	$2p(1-p)$
2	0	p^2	0	p^2
loi de D	$p(1-p)$	$1-2p(1-p)$	$p(1-p)$	1

2. $E(D) = 0$, $Cov(SD) = E(SD) = E((X + Y)(X - Y)) = E(X^2) - E(Y^2) = 0$,
$r = Cov(SD)/(\sigma(S)\sigma(D)) = 0$.

3. Les v.a. sont non corrélées mais elles ne sont pas indépendantes.

7.5 Lois des extrêmes de deux v.a. [3] 6.5 p.96, co. p 99-101

1. $k = [x]$, $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{i=1}^{k} P(X = i) = \sum_{i=1}^{k} p(1-p)^{i-1} = 1 - (1-p)^k$,
d'où $1 - F(x) = P(X > x) = (1-p)^{[x]}$.

2. $P(V \leq v) = P([X \leq v] \cap [Y \leq v]) = P([X \leq v]) \times P([Y \leq v] = (1 - (1-p)^{[v]})^2$. par différence $P(V = k) = (1 - (1-p)^k)^2 - (1 - (1-p)^{k-1})^2, k \geq 1$ et $P(V = 1) = p^2$.

3. $P(U \leq u) = 1 - P(U > u) = 1 - P(X > u)P(Y > u) = 1 - (1 - P(X \leq u))(1 - P(Y \leq u)) = 1-(1-(1-p)^{[u]})^2 = 1-(1-p)^{2[u]}$, $P(U = k) = (1-p)^{2(k+1)}-(1-p)^{2k}, k \geq 1$, $P(U = 1) = 1-(1-p)^2$.

4. On montre que $F_{V_n} = F_{X_1} \times \cdots \times F_{X_n} = F^n$, $1 - F_{U_n} = (1 - F_{X_1}) \times \cdots \times (1 - F_{X_n}) = (1 - F)^n$.
$P(V_n = k) = (1 - (1-p)^k)^n - ((1 - (1-p)^{k-1})^n, k > 1$, $P(V_n = 1) = p^n$.
$P(U_n = k) = (1-p)^{n(k-1)} - (1-p)^{nk}, k > 1$, $P(U_n = 1) = 1 - (1-p)^n$.

5. X_i rang d'apparition d'un as pour la première fois avec le dé numéro i. X_i v.a.i. $\hookrightarrow G(1/6)$. La durée du jeu est $N = V_5 = \max(X_i)$.
$P(N \leq k) = (1 - (5/6)^k)^5$, $P(N = k) = (1 - (5/6)^k)^5 - (1 - (5/6)^{k-1})^5, k > 1$, $P(N = 1) = (1/6)^5$,
$E(N) = \sum_{k=1}^{+\infty} kP(N = k) = \sum_{n=0}^{+\infty}(1 - F(n)) = \sum_{n=0}^{+\infty}(1 - (5/6)^n)^5 \simeq 13.023$ On utilise que $(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5, \ldots$

$E(N) = \sum_{k=1}^{+\infty} kP(N=k) = \sum_{n=0}^{+\infty}(1-F(n))$, en effet, c'est du Fubini:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{p}(1-F(n)) = & \sum_{n=0}^{p} P(N>n) = \sum_{n=0}^{p}\sum_{k=n+1}^{+\infty} P(N=k) \\
= & \sum_{n=0}^{p}\sum_{n<k\leq p}^{+\infty} P(N=k) + \sum_{n=0}^{p}\sum_{p<k}^{+\infty} P(N=k) \\
= & \sum_{k=1}^{p} kP(N=k) + \sum_{k=p+1}^{+\infty}(p+1)P(N=k) \\
\text{et} \quad & \sum_{k=p+1}^{+\infty}(p+1)P(N=k) \leq \sum_{k=p+1}^{+\infty} kP(N=k) \to 0
\end{aligned}$$

7.6 Fonction génératrice [1] 3.1 p 65 et [4] A.15 p. 9

1. Egalité de deux séries entières.

2. (a) Par définition Calculer la fonction génératrice G_1 de X: $G_1(s) := E(s^X) = \sum_{i=0}^{n} s^i P(X=i) = \sum_{i=0}^{n} s^i C_n^i p^i (1-p)^{n-1} = (ps+1-p)^n$.

   (b) $G_1'(s) = np(ps+1-p)^{n-1}$, $G_1''(s) = n(n-1)p^2(ps+1-p)^{n-2}$, $E(X)\sum_{i=0}^{n} iP(X=i) = G_1'(1) = np$,
   $G_1''(1) = n(n-1)p^2 = \sum_{i=0}^{n} i(i-1)P(X=i) = E(X(X-1)) = E(X^2) - E(X)$,
   donc $Var(X) = G_1''(1) + G_1'(1) - (G_1'(1))^2 = np(1-p)$.

   (c) $E(s^{X+Y}) = E(s^X s^Y) = E(s^X)E(s^Y) = (ps+1-p)^{n+m}$, d'où $X+Y \sim B(n+m,p)$.
   Une autre démonstration consiste à remarquer que la loi $B(n,p)$ est la loi de la somme de n v.a. indépendantes de loi de Bernouilli $B(p)$.

3. (a) $G_2(s) = \sum_{i=0}^{+\infty} s^i P(X=i) = \sum_{i=0}^{+\infty} s^i e^{-\lambda}\frac{\lambda}{i!} = \exp(\lambda(s-1))$.

   (b) $G_2'(s) = \lambda G_2(s) \Rightarrow G_2''(s) = \lambda^2 G_2(s)$, $G_2(1) = 1$, $E(X) = \lambda$, $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \lambda$.

   (c) $G_{X+Y} = G_X G_Y$. $X+Y \sim P(\lambda+\mu)$.

4. On a $G_1(1) = G_2(1) = 1$. Pour $s \neq 1$ et p suffisament proche de 0 pour que $ps+1-p > 0$, on peut écrire: $\ln(H_n(s)) = n\ln(1+p(s-1)) \sim np(s-1)$. Donc $\ln(H_n(s)) \to \lambda(s-1)$ et $G_1(s) \to \exp(\lambda(s-1)) = G_2(s)$. C'est là une façon de montrer que la loi $B(n,p)$ converge vers la loi $P(\lambda)$ quand $n \to +\infty$ et $p \to 0$ de façon que $np \to \lambda$.
   Directement $\left(1 + \frac{x}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \to e^x$. En fait, on peut montrer facilement que $\frac{d^k H_n}{ds^k}(s) \to \frac{d^k G_2}{ds^k}(s)$. Ce qui démontre la convergence en loi. Un suite intéressante serait de calculer le taux de convergence.

5. La réponse exacte serait $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (1 - 10^{-4})^{10^4} \simeq 1 - e^{-1} = P(Y \geq 1)$ car $X \sim B(10^4, 10^{-4})$, $Y \sim P(1)$. Il y a donc plus d'une chance sur trois de ne trouver aucun pare-brise défectueux dans ce parc, contrairement à ce qu'aurait pu nous suggérer notre intuition immédiate.

References

[1] Exercices de probabilités, Marie Cottrell, Valentine Genon-Catalot, Christian Duhamel, Thierry Meyre

[2] D. Foata, A. Fuchs, Calcul des probabilités

[3] Bernard Lanuzel, Probabilités et statistiques.

[4] L. Mazliak, Calcul de probabilités, Laurent Mazliak