Approximation de fonction sur un segment

Soient $f \in C^0([a,b],\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}-\{0\}$, $h=\frac{b-a}{n}$, $x_i = a+ih$ pour $i=0,1,\ldots,n$.
On note aussi $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$.

1 Approximation par des fonctions en escalier

On pose $f_n(x) = f(x_i)$ si $x \in [x_{i+1},x_i[$, et $f_n(b) = b$.

1. Si $f \in C^1([a,b],\mathbb{R})$ montrer que $f(x) - f_n(x) = O(h)$. En déduire que f_n converge uniformément vers f sur $[a,b]$.
2. Si $f \in C^0([a,b],\mathbb{R})$ montrer que f_n converge simplement vers f sur $[a,b]$. La convergence est-elle uniforme?
3. En déduire la convergence de la méthode des rectangles vers $\int_a^b f(x)dx$.

2 Approximation par des fonctions continues et affines par morceaux

On pose $f_n(x) = f(x_i) + \dfrac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{h}(x-x_i)$ si $x \in [x_{i+1},x_i]$.

1. Si $f \in C^2([a,b],\mathbb{R})$ montrer que $f(x) - f_n(x) = O(h^2)$. En déduire que f_n converge uniformément vers f sur $[a,b]$.
2. Si $f \in C^0([a,b],\mathbb{R})$ que pouvez vous dire?
3. En déduire que si $f \in C^2([a,b],\mathbb{R})$ l'erreur de la méthode des trapèzes est en $O(h^2)$.

3 Interpolation de Lagrange

On note $\pi_n(x) = \prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$. On cherche le polynôme p_n de degré inférieur ou égal à n tel que pour tout $i \in \{0,1,\ldots,n\}$

$$p_n(x_i) = f(x_i)$$

1. Montrer qu'un tel polynôme p_n (s' il existe) est nécessairement unique.
2. Pour j fixé, trouver $p_{n,j}$ tel que $deg(p_{n,j}) \leq n$ et

$$p_{n,j}(x_i) = \begin{cases} 1 & si\ i=j \\ 0 & sinon \end{cases}$$

3. Construire p_n à l'aide des $p_{n,j}$. En déduire l'existence et l'unicité de p_n.

4. On suppose que $f \in C^{(n+1)}([a,b],\mathbb{R})$. Soit $x \in [a,b]$ montrer qu'il existe $\xi \in]a,b[-\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ tel que
$$f(x) - p_n(x) = \pi_n(x)\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$
On pourra considérer la fonction $g(y) = f(y) - p_n(y) - C\pi_n(y)$, où C est tel que $g(x) = 0$. Puis on appliquera plusieurs fois le théorème de Rolle aux dérivées sucessives de g.

5. On suppose que $f \in C^{(n+1)}([a,b],\mathbb{R})$. Donner une majoration $\|f - p_n\|_\infty$ en fonction de $\|f^{(n+1)}\|_\infty$.

6. Si $f \equiv \sin$ montrer que p_n converge uniformément vers f sur $[a,b]$.

4 Polynôme de Bernstein

On se place sur $[0,1]$ ($a = 0$, $b = 1$).
On note $p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} C_n^i f(x_i) x^i (1-x)^{(n-i)}$ où $C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}$.

1. Calculer p_n si $f \equiv 1$, $f \equiv x$, $f \equiv x^2$, en appliquant la formule du binôme à $(x+y)^n$, en dérivant par rapport à x puis en posant $y = 1-x$.

2. On suppose que $f \in C^1([0,1],\mathbb{R})$. Pour $\delta > 0$ fixé et soit $x \in [0,1]$, on note $I_n = \{i/\ |x - x_i| \leq \delta\}$ et $J_n = \{i/\ |x - x_i| > \delta\}$.

   (a) Montrer que $\sum_{i \in I_n} C_n^i (f(x) - f(x_i)) x^i (1-x)^{(n-i)} = O(\delta)$.

   (b) Montrer que $\sum_{i \in J_n} C_n^i x^i (1-x)^{(n-i)} = O\left(\frac{1}{n\delta^2}\right)$.
   On pourra montrer que $\sum_{i=0}^{n} (x - x_i)^2 C_n^i x^i (1-x)^{(n-i)} = \frac{x(1-x)}{n}$,
   puis minorer $\sum_{i \in J_n} (x - x_i)^2 C_n^i x^i (1-x)^{(n-i)}$, sachant que $|x - x_i| \geq \delta$.

   (c) En déduire que $\|f - p_n\|_\infty = O\left(\delta + \frac{1}{n\delta^2}\right)$

   (d) Montrer que p_n converge uniformément vers f sur $[0,1]$
   (on peut montrer que $\|f - p_n\|_\infty = O\left(n^{-3^{-1}}\right)$).

3. Si f est seulement continue montrer que $\lim_{n \to \infty} \|f - p_n\|_\infty = 0$.