Vitesses de convergence des suites récurrentes: $u_{n+1} = f(u_n)$, à l'aide du lemme de l'escalier

1 Préliminaires

$u_{n+1} = f(u_n)$, $u_0 \in \mathbb{R}$, $f \in C^\infty$,

1. *Dans tout l'exercice on supposera que $u_n \to l = f(l)$ et que, pour tout n, $u_n \neq l$.*
   En effet, montrer qu'une suite récurrente convergente est, ou bien stationnaire, ou bien jamais égale à sa limite.

2. Montrez que nécessairement $|f'(l)| \leq 1$, en étudiant $\dfrac{u_{n+1} - l}{u_n - l}$.

3. Montrez que si $v_n > 0$ sur $\mathbb{N}$ et $v_{n+1}/v_n \to \rho < 1$ alors, pour tout $\varepsilon < \rho/2$, il existe deux constantes $c > 0, d > 0$ telles que $c(\rho - \varepsilon)^n \leq v_n \leq d(\rho + \varepsilon)^n, \forall n \in \mathbb{N}$.
   Donner un exemple de suite (v_n) tel que il n'existe pas de constante $c > 0$ telle que $v_n \sim c\rho^n$.

4. Moyenne de Césaro: montrez que que si (a_n) converge vers l alors $\left(\dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)$ aussi.

5. **Lemme de l'escalier**: montrez que si $(b_{n+1} - b_n)$ converge vers l alors $\left(\dfrac{b_n}{n}\right)$ aussi.

6. Retouver le résultat de la question 3. en utilisant le lemme de l'escalier et la suite auxiliaire définie, à partir d'un certain rang, par: $b_n := \ln(|v_n|)$.

2 Cas d'un point attractif : $\rho := |f'(l)| \in]0, 1[$

1. Soit $f \equiv \cos$ et $u_0 = 0$.
   (a) vérifiez que $u_n \to l$, $u_n \neq l$.
   (b) Montrez que $\dfrac{u_{n+1} - l}{u_n - l} \to f'(l)$.
   (c) En déduire que si $r > \rho$ alors $u_n = l + O(r^n)$.
   (d) Calculez l à 0.1 prés.

2. Géneralisez l'étude de la vitesse de convergence de l'exemple précédent pour une fonction quelconque telle que $u_n \to l = f(l)$ et $\rho := |f'(l)| \in]0, 1[$.
   Pour cela, on pourra poser $v_n := |\ln |u_n - l||$.

3. Vérifier les résultats précédents sur l'exemple $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$ et $u_0 > 0$.

3 Cas d'un point hyper-attractif : $f'(l) = 0$

1. Soit $f(x) \equiv \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$ et $u_0 = 2$.

   (a) Montrez que $\frac{u_{n+1} - l}{u_{n+1} + l} = \left(\frac{u_n - l}{u_n + l}\right)^2$,

   (b) En déduire l à 10^{-7} prés.

2. Cas général: Géneralisez l'étude de la vitesse de convergence de l'exemple précédent pour une fonction quelconque telle que $u_n \to l = f(l)$ et $f'(l) = 0$.
   Montrez ainsi que: $\forall r \in]1, 2[$, $u_n = l + O(\exp(-r^n))$.
   Pour cela, soit $w_n := |\ln|\ln|u_n - l|||$, montrez que $w_{n+1} - w_n \to \ln(2)$.

4 Cas d'un point très très très faiblement attractif : $|f'(l)| = 1$

1. Si $f'(l) = 1$, $f''(l) \neq 0$, on va montrer que $u_n - l \sim \frac{-2}{f''(l)n}$.

   (a) Exemple : $f(x) \equiv \frac{x^2+1}{2}$, $u_0 := 0.5$. Montrez que u_n est croissante et converge.
   En étudiant $v_n := \frac{1}{u_n - 1}$, montrez que $u_n - 1 \sim -\frac{1}{2n}$.

   (b) Montrez que $\frac{1}{f(x) - l} = \frac{1}{x - l} - \frac{f''(l)}{2} + O(x - l)$,
   puis poser $v_n := \frac{1}{u_n - l}$, pour conclure.

   (c) Si $f''(l) > 0$, montrez que u_n est strictement croissante à partir d'un certain rang.

2. Si $f'(l) = 1$, $f''(l) = 0$, $f'''(l) \neq 0$, on va montrer que $u_n - l \sim \sqrt{\frac{3}{-f'''(l)n}}$.

   (a) Exemple : $u_{n+1} = \sin(u_n)$, $u_0 := 1$.

      i. Montrez que u_n est strictement décroissante et converge vers 0.

      ii. Montrez que $\frac{1}{\sin^2(x)} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{3} + \frac{x^2}{15} + O(x)^4$.

      iii. En posant $v_n := u_n^{-2}$, en déduire que $u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$.

   (b) Montrez que $\frac{1}{(f(x) - l)^2} = \frac{1}{(x - l)^2} - \frac{f''(l)}{3} + O(x - l)^2$.
   En déduire que nécessairement $f'''(l) < 0$ et conclure.

3. * Cas $f'(l) = -1$, on pose $g = fof$ et on étudie $w_n := u_{2n}$, $w_{n+1} = g(w_n)$, $w_0 = u_0$.

   (a) Etudiez l'exemple où : $f(x) \equiv 3x(1 - x)$ et $u_0 = \frac{1}{2}$. Pour cela, tracez le graphe de g.

   (b) Cas général : si $2f'''(l) + 3[f''(l)]^2 \neq 0$, montrez que

$$|u_n - l| \sim \sqrt{\frac{3}{|g'''(l)|n}}.$$