Exercice 3

Le but de cet exercice est l'étude d'une chaîne de transmissions aléatoires d'une information binaire.

Un émetteur E émet une information binaire (c'est-à-dire ne prenant que la valeur 0 ou la valeur 1). Un récepteur R reçoit cette information qui, pour des raisons non développées ici, peut être conforme ou non à l'information émise. Quelle que soit l'information émise par E (« 0 » ou « 1 »), la probabilité que l'information reçue par R soit conforme à l'information émise par E est égale à p $(0 < p < 1)$ et la probabilité que l'information reçue par R soit non-conforme à l'information émise est égale à $(1-p)$.
Ainsi par exemple lorsque l'information émise par E est « 0 », la probabilité que l'information reçue par R soit « 0 » est égale à p et la probabilité que l'information reçue par R soit « 1 » est égale à $(1-p)$.

Partie I

Dans cette partie, l'information binaire est transmise le long d'une chaîne de $(n+1)$ éléments électroniques notés $E_0, E_1, ..., E_n$.
Chaque élément E_k est successivement récepteur, puis émetteur, excepté le premier élément E_0 qui est seulement émetteur et le dernier élément E_n qui est seulement récepteur. L'information émise par un émetteur-récepteur est toujours identique à celle reçue.
Pour tout nombre entier k compris entre 0 et $(n-1)$, la transmission d'information de l'élément E_k à l'élément suivant E_{k+1} suit la loi définie en début d'exercice, c'est-à-dire que l'élément E_{k+1} reçoit correctement l'information binaire émise par E_k avec une probabilité égale à p $(0 < p < 1)$, et reçoit l'information contraire avec la probabilité $(1-p)$.

Par ailleurs, on a constaté que la qualité de la transmission d'un élément E_k à l'élément suivant E_{k+1} ne dépend pas de ce qui s'est passé lors des transmissions précédentes.
On note A_k $(1 \leq k \leq n)$, l'événement « la valeur reçue par E_k est identique à celle émise par E_0 », et on désigne par p_k sa probabilité. On convient que $p_0 = 1$.

1. Étude du cas particulier n =2.
   a. Construire un arbre pondéré décrivant cette situation dans le cas $n = 2$. On précisera sur ce schéma les différentes probabilités.
   b. Déterminer p_1 et p_2.
2. Étude du cas général.
   Démontrer que pour tout nombre entier k compris entre 0 et $(n-1)$ on a :
   $$p_{k+1} = (2p-1)p_k + 1 - p.$$
3. On se propose de déterminer l'expression de p_n en fonction de n.
   a. Pour tout nombre entier naturel k inférieur ou égal à n, on pose : $u_k = p_k - \frac{1}{2}$.
      i. Montrer que les $(u_k)_{0 \leq k \leq n}$ sont les premiers termes d'une suite géométrique dont on précisera la raison.
      ii. En déduire l'expression de p_n en fonction de n et de p.
   b. Démontrer que la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
   c. Comment peut-on interpréter ce résultat ?

Partie II

Dans cette partie, l'émetteur E_0 émet une information binaire transmise directement, sans passer par des intermédiaires, vers une famille de récepteurs. Dans la suite de l'exercice on supposera que cette famille est infinie, et on la notera $(R_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Une partie de cette famille de récepteurs $(R_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est « à l'écoute », autrement dit est prête à recevoir l'information émise par E_0, conforme ou non.
On suppose que les transmissions entre l'émetteur E_0 et chacun des récepteurs « à l'écoute » dans la famille $(R_i)_{i \in \mathbb{N}}$ sont indépendantes les unes des autres et que la règle de transmission est la même que celle définie en début d'exercice, c'est-à-dire qu'un récepteur « à l'écoute » reçoit correctement l'information binaire émise par E_0 avec une probabilité égale à p $(0 < p < 1)$, et reçoit l'information contraire avec la probabilité $(1-p)$.

1. On considère que n récepteurs sont « à l'écoute ». Déterminer la probabilité que k d'entre eux exactement reçoivent correctement la valeur émise par E_0 (k étant un nombre entier compris entre 0 et n).
2. Le nombre de récepteurs « à l'écoute » est une variable aléatoire X. On admet que cette variable suit une loi de Poisson de paramètre λ, λ étant un nombre réel strictement positif donné. Pour tout entier naturel k on a donc :
   $$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}.$$
   On appelle Y la variable aléatoire représentant le nombre de récepteurs de la famille (R_i) qui reçoivent la valeur émise par l'émetteur E_0.
   a. Décrire par une phrase l'événement ($Y = 0$).
   b. On appelle B_n l'événement : « n récepteurs exactement sont « à l'écoute » ».
   Démontrer que $P((Y = 0) \cap B_n) = \frac{e^{-\lambda}(1-p)^n\lambda^n}{n!}$.

c. Justifier que l'on peut décrire l'événement $(Y=0)$ sous la forme suivante :

$(Y=0)=\bigcup_{n=0}^{+\infty}[(Y=0)\cap B_n]$.

En déduire que $P\big((Y=0)\big)=e^{-\lambda p}$.

(On rappelle que $\forall x\in\mathbf{R},\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x$).

d. Pour tout nombre entier k naturel, déterminer $P(Y=k)$. En déduire que Y suit une loi de Poisson dont on déterminera le paramètre.
Donner alors son espérance $E(Y)$ et sa variance $V(Y)$.