Tournois

N joueurs s'affrontent deux par deux au cours d'un tournoi. On numérote les joueurs de 1 à N. On suppose que le joueur numéro 1 est plus fort que tous les autres. Tous les autres joueurs sont supposés de même force. Le joueur numéro 1 a une probabilié $p \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$ de gagner à chaque rencontre.

Le but du problème est d'évaluer les chances du plus fort de gagner le tournoi. Pour cela on étudie deux types de tournoi: le tournoi par élimination directe et le tournoi fermé.

On modélise cette situation par des variables aléatoires de Bernoulli R_{ij} définies pour tout $i < j$ de la manière suivante:

- $R_{1j} \sim B(p)$ pour $j = 2, \cdots, N$,
- $R_{ij} \sim B(1/2)$ pour $1 \neq i \neq j \neq 1$,
- Les variables R_{ij} sont mutuellement *indépendantes* pour tout $1 \leq i < j \leq N$.

$R_{ij} = 1$ si le joueur i gagne contre le joueur j.
$R_{ij} = 0$ si le joueur i perd contre le joueur j.
Ainsi on a toujours $R_{ji} = 1 - R_{ij}$ pour $i \neq j$. Remarquez que R_{ij} et R_{ji} ne sont pas indépendantes. R_{ii} n'est pas défini (le joueur ne joue pas contre lui-même).

1 Tournoi par élimination directe

On a $N = 2^k$ joueurs. Le tournoi se déroule en k tours. A chaque tour du tournoi, les joueurs s'affrontent deux par deux. Les perdants sont éliminés du tournoi. Les gagnants jouent au tour suivant. Et on recommence au tour suivant avec les gagnants du tour précédent. Le vainqueur du tournoi est le seul joueur qui n'est pas éliminé au bout de k tours. C'est le type de tournoi utilisé par exemple au Tennis.

1.1 $N = 4$

1. Quelle est la probabilité que le joueur 1 gagne le tournoi?
2. Trouver la plus petite probabilité p qui assure au joueur 1 de gagner le tournoi au moins une fois sur 2 en moyenne.

1.2 Cas général

1. Combien y-a-t-il de matchs disputés dans ce type de tournoi?
2. Montrer que le joueur 1 a une probabilité de gagner le tournoi qui tend vers 0 quand le nombre de joueurs augmente vers l'infini.
3. Quel joueur a le plus de chance de remporter le tournoi?
4. Quel est le nombre moyen de tour joué par le joueur 1?

2 Tournoi fermé

Tous les joueurs se rencontrent deux par deux. Le gagnant est celui qui remporte le plus de matchs. Il peut y avoir plusieurs premiers.

On note $S_i = \sum_{j \neq i} R_{ij}$: le nombre de match remporté par le joueur i.

2.1 $N = 4$

1. Combien y-a-t-il de matchs disputés dans ce type de tournoi?
2. Quelle est la probabilité que le joueur 1 gagne le tournoi?

   On calculera $P(S_1 \geq \max(S_2, S_3, S_4))$ en évaluant d'abord, $P(S_1 = 3)$ et aussi $P((S_1 = 2 \,\&\, R_{12} = 0\,) \& S_2 \leq 2)$.
3. Trouver la plus petite probabilité p qui assure au joueur 1 de gagner le tournoi au moins une fois sur 2 en moyenne. On donnera une valeur approchée de p.

2.2 Cas général

1. Combien y-a-t-il de matchs disputés dans ce type de tournoi?
2. Calculer $E(S_1)$ et $E(S_i)$ pour $i > 1$.
3. Quelle est la limite, en probabilité, de $\frac{S_1}{N}$ et $\frac{S_i}{N}$ pour $i \neq 1$?
4. Départage: Si on a des joueurs à égalité de points on utilise les "départages" $D_i = \sum_{j \neq i} R_{ij} S_j$.
   (a) Expliquer la formule donnant D_i.
   (b) Calculer $E(D_1)$ et $E(D_i)$ pour $i \neq 1$.
   En déduire que $E(D_1) > E(D_i)$ pour tout $i \neq 1$.