Lois discrètes et séries entières

1 Propriétés de $G_X(t) = E\left(t^X\right)$ où $X : \Omega \to \mathbb{N}$.

1. Montrer que que $G_X \in C^\infty(]-1,+1[) \cap C^0([-1,+1])$.
2. Vérifier que $G_X(.)$ est croissante et convexe sur $[0,1]$.
3. Montrer que $E(X) = G'_X(1) \in [0,+\infty]$.
4. Si X admet une variance, montrer que $E(X^2) = G''_X(1) + E(X)$.
5. Exemples : Calculer G_X, $E(X)$ et $Var(X)$ lorsque $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ ou $\mathcal{P}(\lambda)$.

2 $X, Y : \Omega \to \mathbb{N}$

1. Montrer que $X \sim Y$ si et seulement si $G_X \equiv G_Y$.
2. Si X et Y sont indépendantes et $S := X + Y$, montrer que $G_S = G_X G_Y$.
   En déduire la loi de S si de plus $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, $Y \sim \mathcal{B}(m,p)$ ou $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$.

3 Enlever les boules rouges

Un sac contient une boule blanche et deux rouges. On répète une infinité de fois l'opération qui consiste à tirer une boule, la remettre dans le sac si elle est blanche, l'éliminer si elle est rouge. On appelle X_n la variable aléatoire prenant la valeur 0 oi 1 suivant qu'à la $n^{\text{ème}}$ on a tiré une boule rouge ou blanche et l'on pose : $R_n = \{X_n = 0\}$ et $B_n = \{X_n = 1\}$.

1. Soit T_1 l'instant où l'on a tiré la première boule rouge (T_1 est ainsi le plus petit entier $m \geq 1$ tel que $X_n = 0$). Calculer $P(T_1 = m)$ $(m \geq 1)$ et G_{T_1}. En déduire que T_1 est fini avec une probabilité égale à 1, puis calculer $E(T_1)$ et $Var(T_1)$.
2. Soit T_2 l'instant où l'on a tiré la deuxième boule rouge.
   Calculer $P(T_1 = m, T_2 = n)$ pour $1 \leq m < n$.
3. En déduire $P(T_2 = n)$. Calculer G_{T_2}.
   Montrer que presque sûrement T_2 est fini, puis calculer $E(T_2)$ et $Var(T_2)$.
4. En déduire $P(R_n)$ et la loi de X_n.

4 Le cueilleur de champignons

On désigne par N le nombre de champignons ramassés par un cueilleur durant une période fixée. On suppose que N est une variable aléatoire dans $\{1,2,\cdots\}$. On suppose, de plus, que la probabilité pour qu'un champignon cueilli soit comestible est p. En faisant les hypothèses d'indépendance qui vont de soi, calculer la probabilité que tous les champignons ramassés soient comestibles en fonction de $G(t) = E(t^N)$ et de p.

5 Corrigé succint :

5.1 Propriétés de $G_X(t) = E(t^X)$ où $X : \Omega \to \mathbb{N}$.

1. Lemme d'Abel
2. Dériver
3. Abel
4. Si X admet une variance alors il admet une espérance : $L^2(\mathbb{N}) \subset L^1(\mathbb{N})$
5. Si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, $p+q=1$ $G_X(t) = (q+pt)^n$, $E(X) = np$ et $Var(X) = npq$
   Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $G_X(t) = \exp(\lambda(t-1)$, $E(X) = \lambda$ et $Var(X) = \lambda$.
   Géométrique : $G_X(t) = \dfrac{pt}{1-qt}$,,$E(X) = 1/p$.

5.2 $S \sim \mathcal{B}(n+m,p)$, ou $S \sim \mathcal{P}(\lambda+\mu)$.

5.3 Enlever les boules rouges [2] 8p. 108, sol p.270

1. $P(T_1 = m) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{m-1} \dfrac{2}{3}$, $m \geq 1$
   $G_{T_1}(s) = \dfrac{2s}{3-s}$.
   T_1 est fini avec une probabilité égale à $G_{T_1}(1) = 1$, $E(T_1) = \frac{3}{2}$, $Var(T_1) = \frac{3}{4}$.
2. $P(T_1 = m, T_2 = n) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-m-1} \left(\dfrac{1}{3}\right)^{m}$ pour $1 \leq m < n$.
3. $P(T_2 = n) = 2\left[\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}\right]$, $G_{T_2}(s) = \dfrac{2s^2}{6-5s+s^2}$, $E(T_2) = \frac{7}{2}$, $Var(T_2) = \frac{11}{4}$.
4. $P(R_n) = P(T_1 = n) + P(T_2 = n) = 4\left[\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n} - \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n}\right]$, $n \geq 1$. $X_n \sim \mathcal{B}(1 - P(R_n))$.

5.4 Le cueilleur de champignons [2] 20 p. 20 : G(p)

$C_k \sim \mathcal{B}(p)$, $C_k = 1$ si le champignon numéro k est comestible. Les C_k sont supposés indépendants.

A : tous les champignons ramassés sont comestibles
$A = \{C_1 = 1, \cdots, C_N = 1\} = \cup_{n\geq 1}(\{N = n\} \& \{C_1 = 1, \cdots, C_n = 1\})$
$P(A) = \displaystyle\sum_{n\geq 1} P(N = n)p^n = G(p).$

Références

[1] Feller, An introdution to Probability, Vol I, p.270

[2] Foata & Fuchs, Calcul des probabilités,(1196)

[3] Lessigne, Pile ou Face.