Marche aléatoire

Soient $0 < p < 1$, $p + q = 1$, $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables indépendantes telles que $P(X_n = 1) = p$ et $P(X_n = -1) = q$. On pose $S_0 = 0$ et $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

On pourra interpréter S_n comme la position d'un mobile qui avance ou qui recule de manière aléatoire, ou comme le gain cumulé d'un joueur au bout de n épreuves, sachant qu'à chaque épreuve le joueur gagne un Euro avec une probabilité p et en perd un avec la probabilité q.

1 Temps d'attente du premier gain

On note N le premier indice supérieur ou égal à 1 tel que $S_N = 1$. C'est à dire que N représente le premier instant de gain du joueur. Noter que $N = +\infty$ n'est pas impossible. On désire calculer la probabilité qu'il existe n tel que $S_n = 1$, i.e. $P(N < +\infty)$.

1. On a $\{N = n\} = \{S_1 \leq 0, S_2 \leq 0, \cdots, S_{n-1} \leq 0 \text{ et } S_n = 1\}$et $\phi_n = P(N = n)$. Montrer que $\phi_0 = 0$, $\phi_1 = p$,$\phi_{2k} = 0$ pour tout k.
2. Soient $n > \nu > 1$, On note $A := \{S_1 = -1\}$,
   $B_\nu := \{X_2 \leq 0, X_2 + X_3 \leq 0, \cdots, X_2 + \cdots + X_{\nu-1} \leq 0 \text{ et } X_2 + \cdots + X_\nu = 1\}$,
   $C_\nu := \{X_{\nu+1} \leq 0, X_{\nu+1}+X_{\nu+2} \leq 0, \cdots, X_{\nu+1}+\cdots X_{n-1} \leq 0 \text{ et } X_{\nu+1}+\cdots+X_n = 1\}$.
   Montrer que que ces trois événements son indépendants puis que
   $P(A \cap B_\nu \cap C_\nu) = q\phi_{\nu-1}\phi_{n-\nu}$.
3. En déduire que pour $n > 1$, $\phi_n = q(\phi_1\phi_{n-2} + \phi_2\phi_{n-3} + \cdots \phi_{n-2}\phi_1)$.
4. On pose $\Phi(s) = E(s^N) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \phi_n s^n$.
   (a) Montrer que $\Phi \in C^\infty(]-1, 1[)$ et que $\Phi(s) = ps + qs\Phi^2(s)$.
   (b) En déduire que $\Phi(s) = \dfrac{1 - \sqrt{1 - 4pqs^2}}{2qs}$.
5. Montrer que $\Phi(1) = \dfrac{1 - |p - q|}{2q} = \begin{cases} 1 & \text{si } p \geq q \\ \dfrac{p}{q} & \text{si } p < q \end{cases}$
   En déduire la probabilité qu'il existe n tel que $S_n = 1$.
6. Montrer que $\Phi'(1) = \begin{cases} \dfrac{1}{p-q} & \text{si } p > q \\ +\infty & \text{si } p \leq q \end{cases}$
   Que peut-on en déduire sur $E(N)$?

2 Retour à l'origine

On note $u_n = P(S_n = 0)$.

1. Montrer que pour tout n, $u_{2n+1} = 0$, $u_{2n} = \binom{2n}{n} p^n q^n$.
2. À l'aide de la formule de Strirling : $n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$, montrer que $u_{2n} \sim \dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$.
3. Vérifier que $U(s) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n s^n = \frac{1}{1-\sqrt{1-4pqs^2}}$.

3 Premier retour à l'origine

On note N_0 le premier indice supérieur ou égal à 1 tel que $S_{N_0} = 0$ et $f_n = P(N_0 = n)$.

1. Montrer que $f_{2n+1} = 0$ pour tout n.
2. On note $\phi_n[p]$ la probabilité ϕ_n de l'exercice 1.
   En considérant que $X_1 = \pm 1$ montrer que $f_{2n} = q\phi_{2n-1}[p] + p\phi_{2n-1}[q]$.
3. On pose $F(s) = F^-(s) + F^+(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n s^n$, avec $F^-(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} q\phi_{2n-1}[p]s^n$.
   (a) Montrer que $F-(s) = \dfrac{1-\sqrt{1-4pqs^2}}{2}$.
   (b) Par un argument de symétrie, vérifier que $F^+ \equiv F^-$.
   (c) En déduire que $F(s) = 1 - \sqrt{1-4pqs^2}$.
4. Montrer que la probabilité de revenir à l'origine est $\begin{cases} 1 & \text{si } p = q = \dfrac{1}{2} \\ 1-|p-q| & \text{si } p \neq q \end{cases}$
5. Expliquer pourquoi $E(N_0) = +\infty$ pour tout $p > 0$.