

# Quelques exemples de vecteurs aléatoires et de fonctions génératrices

## 1 Loi triangulaire

Soient  $X, Y$  deux variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme  $\mathcal{U}(-1, 1]$ .

1. On rappelle que le couple  $(X, Y)$  admet une densité  $f_{(X,Y)}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$ . On peut ainsi exprimer la fonction de répartition de  $S := X + Y$  en fonction de cette densité :  $F_S(s) = P(X + Y \leq s) = \int \int_{x+y \leq s} f_{(X,Y)}(x, y) dx dy$ .

Montrez que  $F_S(s) = \int_{-\infty}^s f_S(z) dz$  où  $f_S(s) := \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(s-t)f_Y(t) dt$ .

2. Calculer la loi de  $S := X + Y$  et  $S/2$ .

## 2 Statistiques d'ordre de variables à densité

On considère  $n$  variables aléatoires réelles *indépendantes*  $X_1, \dots, X_n$  de même densité  $f$ , de fonction de répartition  $F$ . Le  $n$ -uplet  $(X_1, \dots, X_n)$  est appelé  $n$ -échantillon de la loi de densité  $f$ . On pourra traiter l'exercice pour  $n = 2$  ou  $3$ . On note  $G(t) := 1 - F(t)$  et :

- $D := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j\}$ ,
- $C := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } x_1 < \dots < x_n\}$ ,
- $r : D \rightarrow C$  définie par  $y = r(x)$  avec  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , i.e. l'application  $r(\cdot)$  range dans l'ordre strictement croissant les composantes de  $x \in \mathbb{R}^n$ .

1. Si  $i \neq j$  montrez que  $P(X_i = X_j) = 0$  à l'aide d'une intégrale double.
2. Plus généralement soit  $U$  l'ensemble des  $\omega \in \Omega$  tels que les nombres réels  $X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)$  sont deux à deux distincts, montrez que  $P(U) = 1$ .
3. Représenter graphiquement  $D, C, r$  pour  $n = 2$  ou  $3$ .
4. On note  $(X_{(1)}, \dots, X_{(n)}) := r(X_1, \dots, X_n)$ .  
Vérifier qu'avec une probabilité de 100%,  $(X_{(1)}, \dots, X_{(n)})$  est bien défini.
5. Soient  $\mathcal{S}_n$  l'ensemble des permutations de  $\{1, \dots, n\}$  et  $\tau \in \mathcal{S}_n$ .  
Expliquer pourquoi  $(X_{\tau(1)}, \dots, X_{\tau(n)})$  a même loi que  $(X_1, \dots, X_n)$ .
6. Montrer que la fonction de répartition de  $X_{(n)} : F_{X_{(n)}}(t) = P(X_{(n)} \leq t) = [F(t)]^n$  en exprimant  $P(X_{(n)} \leq t)$  comme la probabilité de  $n$  événements indépendants.
7. De même montrer que  $F_{X_{(1)}}(t) = 1 - [G(t)]^n$  en calculant  $P(X_{(1)} > t)$ .
8. Avec de la combinatoire montrer que :  $F_{X_{(k)}}(t) = \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} [F(t)]^i [G(t)]^{n-i}$
9. Vérifier que le  $n$ -échantillon réordonné  $(X_{(1)}, \dots, X_{(n)})$  admet comme densité :  $n! f(x_1) \dots f(x_n) \chi_C(x_1, \dots, x_n)$  où  $\chi_C$  est la fonction indicatrice de  $C$ .
10. En déduire que  $X_{(n)}$  admet pour densité  $f_{X_{(n)}}(t) = n f(t) [F(t)]^{n-1}$ , et aussi  $f_{X_{(1)}}(t) = n f(t) [G(t)]^{n-1}$ ,  $f_{X_{(k)}}(t) = k \binom{n}{k} f(t) [F(t)]^{k-1} [G(t)]^{n-k}$  pour  $1 < k < n$ .

### 3 Somme aléatoire de variables aléatoires

Soient  $(X_n)$  une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans  $\mathbb{N}$  de même loi que  $X$ , et  $N$  une v.a. indépendantes de la suite  $(X_n)$  à valeurs dans  $\mathbb{N} - \{0\}$ . On définit

$$Z(\omega) := \sum_{i=1}^{N(\omega)} X_i(\omega). \text{ On note } G_X(t) = E(t^X).$$

1. Vérifier que  $G_X(t)$  est toujours définie au moins sur  $[-1, 1]$  et  $G_X \in C^\infty(] - 1, 1[)$ .
2. Montrez que si  $G_X \equiv G_Y$  alors  $X \sim Y$ , i.e.  $G_X$  détermine la loi de  $X$ .
3. On suppose que  $E(X^2) < +\infty$ , montrez que  $X$  admet une espérance et une variance.
4. Exprimer  $E(X)$  en fonction de  $G'(1)$  et  $E(X^2)$  en fonction de  $G''(1)$ .
5. Vérifier que si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes alors  $G_{X+Y} = G_X G_Y$ .
6. Montrer que  $G_Z = G_N \circ G_X$ .
7. Exprimer  $E(Z)$  et  $Var(Z)$  en fonction de  $E(N), Var(N), E(X)$  et  $Var(X)$ .
8. Le nombre d'accidents en une semaine dans une usine est une v.a. de moyenne  $\mu$  et de variance  $\sigma^2$ . Le nombre d'individus blessés dans un accident est une v.a. de moyenne  $\nu$  et de variance  $\tau^2$ . Les nombres d'individus blessés dans des accidents différents sont indépendants entre eux et indépendants du nombre d'accidents.  
Donner la moyenne et la variance du nombres d'individus blessés dans une semaine.

### 4 Fonctions génératrices des lois usuelles

1. Déterminer la fonction caractéristique  $G_X(t) := E[t^X]$  de la v.a.  $X$  dans les cas suivants :  $X = \mu$ ,  $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$  et  $P(X = k) = p_k$ ,  $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ ,  $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ .
2. Retrouver que si  $X_1 \sim \mathcal{B}(n_1, p)$ ,  $X_2 \sim \mathcal{B}(n_2, p)$  sont indépendantes, alors  $X_1 + X_2 \sim \mathcal{B}(n_1 + n_2, p)$ . Faire De même si  $X_1 \sim \mathcal{P}(\lambda_1)$ ,  $X_2 \sim \mathcal{P}(\lambda_2)$  sont indépendantes.
3. Démontrer que si  $np_n \rightarrow \lambda$  quand  $n \rightarrow +\infty$ , et si  $X_n \sim \mathcal{B}(n, p_n)$  alors  $G_{X_n} \rightarrow G_{\mathcal{P}(\lambda)}$ .

### 5 Processus de branchement

On étudie la transmission du nom X porté à l'origine par un seul homme. Cet homme forme la génération 0. Les descendants mâles directs de la  $n$ -ième génération forment la  $(n + 1)$ -ième génération et la probabilité  $p_k$  qu'un homme ait  $k$  fils ( $k = 0, 1, \dots$ ) est constante au cours des générations. On suppose  $0 < p_0 < 1$ . Soit  $Z_n$  le nombre d'hommes portant le nom X à la  $n$ -ième génération. On pose  $x_n = P(Z_n = 0)$ ,  $G(t) = E(t^{Z_1})$ .

1. Montrer que  $G$  est strictement croissante sur  $[0, 1]$ , qu'elle est convexe sur  $]0, 1[$ .
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que  $G'' > 0$  sur  $]0, 1[$ .
3. En déduire que l'équation  $G(x) = x$  admet exactement une ou deux racines sur  $[0, 1]$  suivant que  $m := G'(1) \leq 1$  ou  $> 1$ .
4. Démontrer la relation de récurrence  $G_{n+1} = G_n \circ G$  où  $G_n(t) = E(t^{Z_n})$ .
5. Vérifier que  $x_{n+1} = G(x_n), n \geq 1, x_1 = p_0$ , puis étudier la monotonie de cette suite.
6. Discuter sur la valeur de  $\lim x_n$  en fonction de  $m = E(Z_1)$ .
7. Calculer  $E(Z_n)$  et conclure sur le problème d'extinction du nom X.
8. Si  $Z_0 = k > 1$  (au lieu de  $Z_0 = 1$  précédemment) calculer  $E(Z_n)$  et la  $\lim P(Z_n = 0)$ .