Dés

Soient $X_i, Y_i \sim \mathcal{U}(\{1,2,3,4,5,6\})$ des variables aléatoire indépendantes pour $i \geq 1$.
Les exercices suivants ne sont pas indépendants.

1 Loi de la somme

1. Calculer puis comparer la loi de $S = X_1 + X_2$ et la loi de $T = 2X_3 = X_3 + X_3$.
2. Calculer l'espérance et l'écart-type de S puis de T.

2 Loi du min et du max de deux dés

On note $X_{(1)} := \min(X_1, X_2)$ et $X_{(2)} := \max(X_1, X_2)$.

1. Calculer $F_{(2)}(x) := P(X_{(2)} \leq x)$. En déduire la loi de $X_{(2)}$.
2. Comparer la loi de $7 - X_{(2)}$ et de $X_{(1)}$. En déduire la loi de $X_{(1)}$, $E(X_{(1)})$et $Var(X_{(1)})$.
3. Donner la loi du couple $(X_{(1)}, X_{(2)})$ et en redéduire les lois marginales.
4. $X_{(1)}$ et $X_{(2)}$ sont-elles indépendantes ?

3 Deux contre un, le max gagne

Richard jette un ou deux dés. Arthur jette toujours un dé. Richard gagne si le plus grand chiffre obtenu sur ses dés est strictement supérieur à celui d'Arthur.

Dans chaque cas suivant calculer la probabilité de gagner pour Richard :

1. Richard jette un seul dé et Arthur un seul.
2. Richard jette deux dés et Arthur un seul.

4 Avec deux dés et des jetons

Xanadu dispose de J_X jetons et Yao de J_Y jetons.

A chaque manche, Xanadu et Yao jettent chacun deux dés. (X_1, X_2) représente les résultats des dés de Xanadu, et (Y_1, Y_2) les résultats des dés de Yao.

Si $X_{(1)} > Y_{(1)}$ alors Yao perd un jeton, sinon c'est Xanadu qui perd un jeton. De même si $X_{(2)} > Y_{(2)}$ alors Yao perd un jeton et sinon Xanadu perd un jeton. Ainsi à chaque manche chaque joueur peut perdre 2,1 ou 0 jetons. Et, en tout, il y a toujours $2 = 0 + 2 = 1 + 1 = 2 + 0$ jetons perdus. On note :

- $GainX$ l'évènement Yao perd 2 jetons et Xanadu aucun,
- $GainY$ l'évènement Xanadu perd 2 jetons et Yao aucun,
- Nul l'évènement chaque joueur perd un jeton.

Le jeu s'arrête quand un des deux protagonistes n'a plus de jetons.

1. On note $a_{ij} := P(X_{(1)} = i \,\&\, X_{(2)} = j)$ pour $1 \leq i, j \leq 6$.
   Montrer $a_{ij} = 2P(X_1 = i \,\&\, X_2 = j)$ si $i < j$ puis expliciter la matrice A.

2. Montrer que $P(GainX) = \sum_{i>k \,\&\, j>l} a_{ij}a_{kl}$. Cette somme vaut $\frac{295}{1296} \simeq 23\%$.
3. Montrer que $P(GainY) = \sum_{i\leq k \,\&\, j\leq l} a_{ij}a_{kl}$. Cette somme vaut $\frac{591}{1296} \simeq 45\%$.
4. Calculer l'espérance de perte de jetons pour Xanadu et Yao à chaque manche.
5. Quelle relation proposez vous entre J_X et J_Y pour que le jeu soit équitable ?

5 Trois dés

On lance 3 dés, on obtient (X_1, X_2, X_3) et on ordonne les résultats obtenus : $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq X_{(3)}$. Ainsi on a $X_{(1)} := \min(X_1, X_2, X_3)$, et $X_{(3)} := \max(X_1, X_2, X_3)$.

1. Calculer la loi de $X_{(1)}$ et $X_{(3)}$.
2. Obtenir la loi conjointe de $(X_{(1)}, X_{(2)}, X_{(3)})$.
3. En déduire la loi conjointe de $(X_{(1)}, X_{(3)})$.
   Puis retrouver les lois marginales de $X_{(1)}$ et de $X_{(3)}$.
4. A l'aide de la loi conjointe de $(X_{(1)}, X_{(2)}, X_{(3)})$, trouver la loi de $X_{(2)}$.
5. Calculer la probabilité que $X_{(3)} > Y_1$.

6 Trois dés contre deux dés

Xanadu lance 3 dés, il obtient (X_1, X_2, X_3). Yao lance 2 dés, il obtient (Y_1, Y_2). On reprend la règle du jeu de l'exercice 4 sauf que l'on compare $X_{(3)}$ & $Y_{(2)}$ ainsi que $X_{(2)}$ & $Y_{(1)}$.

1. Calculer la loi conjointe de $(X_{(2)}, X_{(3)})$ puis la loi conjointe de $(X_{(2)}, X_{(3)}, Y_{(1)}, Y_{(2)})$.
2. Exprimer $P(X_{(3)} > Y_{(2)} \,\&\, X_{(2)} > Y_{(1)})$ à l'aide d'une somme qui vaut $\frac{1445}{3888} \simeq 37\%$.
3. Exprimer $P(X_{(3)} \leq Y_{(2)} \,\&\, X_{(2)} \leq Y_{(1)})$ avec une somme qui vaut $\frac{2275}{7776} \simeq 29\%$.
4. Quelle relation proposez vous entre J_X et J_Y pour que le jeu soit équitable ?

7 Corrigé succint :

7.1 Loi de la somme

1. $S = X_1 + X_2$, on écrit le tableau $S = X_1 + X_2$ à deux entrées et on obtient

S	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
36*P	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

   $T = 2X_3 \sim \mathcal{U}(\{2, 4, 6, 8, 10, 12\})$.
2. $E(X_1) = 3,5$, $Var(X_1) = \frac{35}{12}$, $6E(X_1^2) = 91$, $\sigma(X_1) \simeq 1,7$.
   $E(S) = 2E(X_1) = 7$, $Var(S) = 2Var(X_1)$.
   $E(T) = 7$, $Var(T) = 4Var(X_1)$.

7.2 Loi du min et du max de deux dés

1. $F_{(2)}(x) := (F_2(x))^2 = (P(X_2 \leq x))^2$,

$X_2 = k$	1	2	3	4	5	6
$6 * F_2(k)$	1	2	3	4	5	6

$X_{(2)} = k$	1	2	3	4	5	6
$36 * F_{(2)}(k)$	1	4	9	16	25	36

2.

$X_{(2)} = k$	1	2	3	4	5	6
$36 * P(X_{(2)} = k)$	1	3	5	7	9	11

   $36 * P(X_{(2)} = k) = 2k - 1$.
3. $7 - X_{(1)} \sim X_{(2)}$.

$X_{(1)} = k$	1	2	3	4	5	6
$36 * P(X_{(1)} = k)$	11	9	7	5	3	1

4. $X_{(1)}$ et $X_{(2)}$ ne sont pas indépendantes :
   $P(X_{(1)} = 6 \& X_{(2)} = 1) = 0 \neq P(X_{(1)} = 6)P(X_{(2)} = 1) > 0$.
   Loi conjointe de $(X_{(1)}, X_{(2)})$ fournit une matrice triangulaire.
   On donne les probabilités multipliées par $6^2 = 36$

	$X_{(2)} = 1$	$X_{(2)} = 2$	$X_{(2)} = 3$	$X_{(2)} = 4$	$X_{(2)} = 5$	$X_{(2)} = 6$
$X_1 = 1$	1	2	2	2	2	2
$X_1 = 2$	0	1	2	2	2	2
$X_1 = 3$	0	0	1	2	2	2
$X_1 = 4$	0	0	0	1	2	2
$X_1 = 5$	0	0	0	0	1	2
$X_1 = 6$	0	0	0	0	0	1

7.3 Deux contre un, le max gagne

1. $P(X_1 > Y_1) = \dfrac{5}{12} \simeq 42\% \cdots < 50\%$
   On peut faire la loi conjointe et on somme mais c'est long.
   Remarquons plutôt que $P(X_1 > Y_1) = P(X_1 < Y_1)$ car $(X_1, Y_1) \sim (Y_1, X_1)$,
   ainsi $1 = P(X_1 > Y_1) + P(X_1 < Y_1) + P(X_1 = Y_1)$.
   Comme $P(X_1 = Y_1) = \frac{1}{6}$ on a $2P(X_1 > Y_1) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

2. Comme $X_{(2)}$ et Y_1 sont indépendantes on utilise la loi du couple :

$$\begin{aligned} P(X_{(2)} > Y_1) &= \sum_{i>j} P(X_{(2)} = i \,\&\, Y_1 = j) = \sum_{i=2}^{6} \left(\sum_{j=1}^{i-1} P(Y_1 = j) \right) P(X_{(2)} = i) \\ &= 6^{-3} \sum_{i=2}^{6} (i-1)(2i-1) = \frac{125}{216} \simeq 58\% > 50\% \end{aligned}$$

7.4 Avec deux dés et des jetons

1. la matrice A est donné dans l'exercice 2.
2. Utiliser la loi conjointe de $(X_{(1)}, X_{(2)}, Y_{(1)}, Y_{(2)})$
   Cette somme est calculer avec Maple ou la calculatrice
3. idem
4. En déduire $P(Nul) = 1 - \frac{295}{1296} - \frac{581}{1296} = \frac{420}{1296} = \frac{35}{108} \simeq 32\%$
   μ_X :=l'espérance de perte de jetons pour Xanadu $= -\frac{791}{1248} \simeq -1,22$
   μ_Y :=l'espérance de perte de jetons pour Yao $= -\frac{505}{648} \simeq -0,78$
5. Soit n le nombre de manches de la partie. $-J_X = n\mu_X$, $-J_Y = n\mu_Y$, d'où :
   $\frac{J_X}{J_Y} = \frac{\mu_X}{\mu_Y} = \frac{791}{505} \simeq 1,57$

7.5 3 dés

On lance 3 dés, on obtient (X_1, X_2, X_3) et on ordonne les résultats obtenus : $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq X_{(3)}$. Ainsi on a $X_{(1)} := \min(X_1, X_2, X_3)$, et $X_{(3)} := \max(X_1, X_2, X_3)$.

1.

k	1	2	3	4	5	6
$216 * F_{(3)}(k)$	1	8	27	64	125	216
$216 * P(X_{(3)} = k)$	1	7	19	37	61	91

$X_{(1)} \sim 7 - X_{(3)}$.

2. $P(X_1 = i, X_2 = j, X_3 = k) =: t_{ijk} = 0$ sauf si $i \leq j \leq k$.
   Si $i \leq j \leq k$ on a trois cas :
   – les trois indices sint distincts : $i < j < k$, $t_{ijk} = 6^{-3}3!$
   – seuls deux indices sont égaux : $t_{ijk} = 6^{-3}3$
   – trois indices sont égaux : $i = j = k$: $t_{ijk} = 6^{-3}$.
3. Soit $t_{i.k} = P(X_1 = i, X_3 = k)$. Pour $i > k$, $t_{i.k} = 0$, pour $i = k$ $t_{i.i} = 6^{-3}$, et pour $i < k$:

$$\begin{aligned} t_{i.k} &= \sum_j t_{ijk} = \sum_{i \leq j \leq k} t_{ijk} = t_{iik} + \sum_{i<j<k} t_{ijk} + t_{ijk} \\ 6^3 t_{i.k} &= 3 + 3!(k-i-1) + 3 = 6(k-i) \\ t_{i.k} &= \frac{k-i}{36} \end{aligned}$$

   Loi conjointe de $(X_{(1)}, X_{(3)})$ fournit une matrice triangulaire.
   On donne les probabilités multipliées par $6^3 = 216$

	$X_{(3)}=1$	$X_{(3)}=2$	$X_{(3)}=3$	$X_{(3)}=4$	$X_{(3)}=5$	$X_{(3)}=6$
$X_{(1)}=1$	1	6	12	18	24	30
$X_{(1)}=2$	0	1	6	12	18	24
$X_{(1)}=3$	0	0	1	6	12	18
$X_{(1)}=4$	0	0	0	1	6	12
$X_{(1)}=5$	0	0	0	0	1	6
$X_{(1)}=6$	0	0	0	0	0	1

4.

$$\begin{aligned} P(X_{(2)}=j) &= \sum_{i,k} t_{ijk} = \sum_{i<j<k} t_{ijk} + \sum_{i=j<k} t_{ijk} + \sum_{i<j=k} t_{ijk} + \sum_{i=j=k} t_{ijk} \\ 6^3 P(X_{(2)}=j) &= 6(j-1)(6-j) + 3(6-j) + 3(j-1) + 1 = -6j^2 + 42j - 20 \end{aligned}$$

k	1	2	3	4	5	6
$216 * P(X_{(3)}=k) =$	16	40	52	52	40	16
$216 * P(X_{(3)}=k) \simeq$	7%	19%	24%	24%	19%	7%

Ainsi la loi de $X_{(2)}$ est symétrique (normal) mais ce n'est pas celle de de X_2.
On peut ausssi montrer que $F_{(2)} = F^3 + 3F^2G$, $F(k) = P(X_1 \leq k)$, $G = 1 - F$.

5. $P(X_{(3)} > Y_1) = \sum_{i>j} P(X_{(3)}=i)P(Y_1=j) = \frac{1}{6}\sum_{i=2}^{6} P(X_{(3)}=i)(i-1) = \frac{95}{144} \simeq 66\%$.

7.6 3 dés contre deux dés

1. $t_{.jk} = P(X_{(2)}=j, X_{(3)}=k) = 0$ si $j > k$.
   $j = k$, $t_{.jk} = \sum_{i\leq j} t_{ijj} = \sum_{i<j} t_{ijj} + t_{jjj} = 6^{-3}((j-1)3+1) = 6^{-3}(3j-2)$.
   $j < k$, $t_{.jk} = \sum_{i<j} t_{ijk} + t_{jjk} 6^{-3}((j-1)3! + 3) = 6^{-3}(6j-3)$.

   $6^3 \left(t_{.jk}\right)_{1\leq j,k\leq 6} =$

	$X_{(3)}=1$	$X_{(3)}=2$	$X_{(3)}=3$	$X_{(3)}=4$	$X_{(3)}=5$	$X_{(3)}=6$
$X_{(2)}=1$	1	3	3	3	3	3
$X_{(2)}=2$	0	4	9	9	9	9
$X_{(2)}=3$	0	0	7	15	15	15
$X_{(2)}=4$	0	0	0	10	21	21
$X_{(2)}=5$	0	0	0	0	13	27
$X_{(2)}=6$	0	0	0	0	0	16

2. $P(GainX) = (P(X_{(3)} > Y_{(2)} \,\&\, X_{(2)} > Y_{(1)}) = \sum_{j>l \,\&\, k>m} t_{.jk} a_{lm}$.
3. $P(GainY) = P(X_{(3)} \leq Y_{(2)} \,\&\, X_{(2)} \leq Y_{(1)} = \sum_{j\leq l \,\&\, k\leq m} t_{.jk} a_{lm}$
4. En déduire $P(Nul) = 1 - P(GainX) - P(GainY) = \frac{2611}{7776} \simeq 34\%$
   μ_X :=l'espérance de perte de jetons pour Xanadu $= -\frac{1955}{2592} \simeq -0,75$
   μ_Y :=l'espérance de perte de jetons pour Yao $= -\frac{3229}{2592} \simeq -1,25$
5. Soit n le nombre de manches de la partie. $J_X = n\mu_X$, $J_Y = n\mu_Y$, d'où :
   $\frac{J_X}{J_Y} = \frac{\mu_X}{\mu_Y} \simeq 0,61$