Étude de suite définie par une relation de récurrence

Énoncé

A travers l'étude d'une suite numérique dont le comportement est apparemment difficile à cerner, vous allez demander à vos élèves d'utiliser au mieux leur calculatrice mais de garder un oeil critique sur les résultats qu'elle peut leur apporter.

Pour cela, vous leur proposez la suite $u = (u_n)_{n\geq 0}$ définie par $\begin{cases} u_0 \in [0,1] \\ \forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 4u_n(1-u_n) \end{cases}$

NB : vous avez toute latitude de mettre en avant tel ou tel aspect du problème, mais il est important que vous fassiez jouer à la calculatrice un rôle de premier plan. Notez bien qu'on ne vous demande pas d'aborder tous les aspects évoqués ci-dessous : vous pouvez faire des choix, définir des priorités, à condition de les justifier.

Vous avez dans l'idée d'illustrer tout ou partie des points suivants :

- Visualiser graphiquement le comportement de la suite u pour une valeur donnée de u_0 et pour les dix ou les cinquante premiers termes. Tirer quelques observations des résultats observés.
- Calculer (connaissant u_0 et n) une valeur numérique de u_n, en utilisant le mode de calculs approchés de la calculatrice.
- Dans toute la suite, on suppose que $u_0 = \frac{5+\sqrt{5}}{8}$.
  - Calculer u_1 et u_2 et en déduire u_n pour tout n de $\mathbb{N}$.
  - Avec cette valeur de u_0, reprendre la visualisation graphique de la suite u jusqu'à u_{50}.
    Calculer $u_{10}, u_{11}, u_{50}, u_{51}$ avec le programme écrit précédemment. Commenter.
- Montrer que $u_0 = \frac{5+\sqrt{5}}{8}$ peut s'écrire $u_0 = \sin^2\theta$, avec $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.
  Exprimer alors u_n en fonction de n et de θ.
  Utiliser cette formule pour calculer numériquement u_{10} et u_{50} par exemple. Commenter.

Travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée, partiellement ou en totalité, lors de l'entretien avec le jury.

- Vous mettrez en en place un énoncé adapté à des élèves de terminale S, et apporterez vos propres réponses (Vous pouvez modifier l'ordre des questions, et ajouter des idées qui vous semblent utiles.)
- En proposant ce problème à vos élèves, vous avez très certainement voulu illustrer l'apport indéniable des calculatrices dans l'étude de certaines situations numériques, mais souligner également la prudence avec laquelle il faut accepter les réponses des "machines". Vous proposerez une autre idée qui vous semblerait de nature à illustrer la même problématique.