# $u_n = \mathrm{O}(v_n)$, $u_n = \theta(v_n)$, $u_n = \mathrm{o}(v_n)$, $u_n \sim v_n$

Notations :

- $u_n = \mathrm{O}(v_n)$, s'il existe une constante positive $C$ telle que $|u_n| \leq C|v_n|$ à partir d'un certain rang; (Les confusions de la notion O(.) provient de son utilisation sous forme d'égalité, alors qu'il s'agit surtout d'une inégalité);
- $u_n = \theta(v_n)$, s'il existe deux constantes strictement positives $c, d$ telles que $c|v_n| \leq |u_n| \leq d|v_n|$ à partir d'un certain rang;
- $u_n = \mathrm{o}(v_n)$, s'il existe une suite $(\varepsilon_n)$ qui converge vers 0 telle que $u_n = \varepsilon_n v_n$, à partir d'un certain rang;
- $u_n \sim v_n$, s'il existe une suite $(\varepsilon_n)$ qui converge vers 0 telle que $u_n = (1+\varepsilon_n)v_n$, à partir d'un certain rang.

## 1 $u_n = \mathbf{O}(v_n)$

1. Soit $a, b > 0$. Quand a-t'on $n^a = \mathrm{O}(n^b)$?
2. Que signifie que: $u_n = \mathrm{O}(0)$, $u_n = \mathrm{O}(1)$, $u_n = \mathrm{O}(1000000000)$?
3. Soit $u_n = \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$, $v_n = 1 + (-1)^n$. A-t'on $u_n = \mathrm{O}(v_n)$? A-t'on $v_n = \mathrm{O}(u_n)$?
4. La relation O(.) est-elle une relation réflexive, symétrique, transitive, d'équivalence sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?
5. Soit $P$ une fonction polynme, si $u_n = \mathrm{O}(v_n)$, a-t'on toujours $P(u_n) = \mathrm{O}(P(v_n))$?
6. Certains auteurs, pour noter que $u_n = \mathrm{O}(v_n)$ préfèrent écrire que $u_n \in \mathrm{O}(v_n)$.
   (a) Essayer de justifier à l'aide dun ensemble ce point de vue.
   (b) Expliquez précisément pourquoi le raisonnement suivant est faux et localiser la ou les erreurs de raisonnement: *On a $n = O(n^2)$ et aussi $n = O(n^4)$. De ces deux dernières égalités on en déduit que $O(n^2) = O(n^4)$. La relation mathématique d'égalité étant symétrique on a donc que $O(n^4) = O(n^2)$, or $n^3 = O(n^4)$, donc $n^3 = O(n^2)$.*
   On pourra localiser les erreurs de l'argument précédent en le réécrivant en terme d'appartenance ou d'inégalités.

## 2 $u_n = \theta(v_n)$

1. Soit $a, b > 0$. Quand a-t'on $n^a = \theta(n^b)$?
2. Que signifie que $u_n = \theta(1)$?
3. Vérifiez que : $u_n = \theta(v_n) \Rightarrow u_n = \mathrm{O}(v_n)$. Puis montrez que la réciproque est fausse à l'aide d'un contre exemple. Finalement, montrez que : $u_n = \theta(v_n) \Leftrightarrow \{u_n = \mathrm{O}(v_n) \text{ et } v_n = \mathrm{O}(u_n)\}$.
4. La relation $\theta$ est-elle une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

## 3 $u_n = \mathbf{o}(v_n)$

1. Soit $a, b > 0$. Quand a-t'on $n^a = \mathrm{o}(n^b)$, $a^n = \mathrm{o}(b^n)$?
2. Montrez que que $u_n = \mathrm{o}(v_n)$ si et seulement si $\{\forall \varepsilon > 0, \exists N, n > N \Rightarrow |u_n| \leq \varepsilon |v_n|\}$.
3. Vérifiez que : $u_n = \mathrm{o}(v_n) \Rightarrow u_n = \mathrm{O}(v_n)$. Puis montrez que la réciproque est fausse à l'aide d'un contre exemple.
4. La relation o(.) est-elle une relation réflexive, symétrique, transitive, d'équivalence sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

## 4 $u_n \sim v_n$

1. Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Quand a-t'on $n^a \sim n^b$?
2. Que signifie que $u_n \sim 1$?
3. Que signifie que $u_n \sim 0$?
4. Soit deux suites $(u_n)$ et $(v_n)$ qui ne s'anulent jamais, montrez que $u_n \sim v_n \iff \dfrac{u_n}{v_n} \to 1$.
5. Soit deux suites $(u_n)$ et $(v_n)$ qui ne s'anulent jamais, Vérifiez que si $u_n \sim v_n$ alors $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ et $\left(\dfrac{v_n}{u_n}\right)$ sont bornées mais que tout est possible pour la suite $(u_n - v_n)$.
6. Montrez que si $u_n \sim v_n$ alors $u_n = \mathrm{O}(v_n)$ mais que la réciproque est fausse.
7. Montrez que $u_n \sim v_n$ si et seulement si $u_n - v_n = \mathrm{o}(u_n)$.
8. Si $(u_n)_n$ converge vers $U$ et $(v_n)_n$ converge vers $V$, donnez une condition sur $U$ et $V$ pour que $u_n \sim v_n$. Donnez des exemples concrets pour les trois cas suivants: $U = V = 1$, $U = V = 0$, $U = 0$ et $V = 1$.
9. Soit $u_n > 0$, $v_n > 0$. Démontrez les équivalences suivante:
   $u_n \sim v_n \iff \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1 \iff \lim\limits_{n\to\infty} \min\left(\dfrac{u_n}{v_n}, \dfrac{v_n}{u_n}\right) = 1 \iff \lim\limits_{n\to\infty} \max\left(\dfrac{u_n}{v_n}, \dfrac{v_n}{u_n}\right) = 1.$

## 5 Quelques comparaisons sur les relations de comparaions des suites

1. Montrez que si $u_n \sim v_n$ alors $u_n = \mathrm{O}(v_n)$ et même $u_n = \theta(v_n)$, mais que la réciproque est fausse.
2. Les assertions suivantes sont-elles exactes?
   (a) $u_n \sim v_n$ et $v_n = \mathrm{O}(w_n) \Rightarrow u_n = \mathrm{O}(w_n)$
   (b) $\mathrm{o}(\mathrm{O}(u_n)) = \mathrm{o}(u_n)$.
   (c) $u_n = \mathrm{O}(v_n)$ et $v_n = \mathrm{O}(w_n) \Rightarrow u_n = \mathrm{O}(w_n)$
   (d) $u_n \sim v_n \Rightarrow u_n = \theta(v_n)$
   (e) $u_n = \theta(v_n) \Rightarrow u_n \sim v_n$

## 6 Propriétés transmissibles par les équivalents

1. Montrez que si $u_n \sim v_n$ et que $(u_n)$ est positive alors $(v_n)$ est positive à partir d'un certain rang.
2. Montrez que si $u_n \sim v_n$ et que $(u_n)$ est bornée alors $(v_n)$ est bornée.
3. Montrez que si $u_n \sim v_n$ et que $(u_n)$ est convergente alors $(v_n)$ est convergente.

## 7 Somme d'équivalents

1. Montrez sur un exemple que si $u_n \sim u'_n$ et $v_n \sim v'_n$, alors on n'a pas nécessairement $u_n + v_n \sim u'_n + v'_n$. (Par exemple, on peut prendre: $u_n \equiv 1, u'_n \equiv 1 + 1/n, v_n \equiv v'_n \equiv -1$.)

2. Voici une démonstration douteuse d'un résultat faux:
   *On va démontrer que si $u_n \sim u'_n$ et $v_n \sim v'_n$, alors $u_n + v_n \sim u'_n + v'_n$.*
   *En effet : $u'_n = u_n(1 + \varepsilon_n), v'_n = v_n(1 + \eta_n)$, à partir d'un certain rang, donc, il suffit de montrer que $R_n = o(u_n + v_n)$, o $R_n$ est défini par: $R_n := u'_n + v'_n - (u_n + v_n) = \varepsilon_n u_n + \eta_n v_n$. Soit $e_n := \max(\varepsilon_n, \eta_n)$. D'une part $e_n \to 0$, et d'autre part $R_n \leq e_n(u_n + v_n)$, donc $R_n = o(u_n + v_n)$. CQFD.*

   (a) Trouvez au moins une erreur grave dans cette démonstration fausse.

   (b) Cependant, montrez qu'en rajoutant une hypothèse simple sur les suites $(u_n)$ et $(v_n)$, cette démonstration devient juste.

## 8 Exponentielle d'équivalents

1. Soit $u_n = n^2 + n$, $v_n = n^2$, montrez que $u_n \sim v_n$ mais que $\exp(u_n)$ n'est pas équivalente à $\exp(v_n)$).

2. En déduire que l'exponentielle de suites équivalentes ne sont pas nécessairement équivalentes.

3. En revanche, montrez que, si $(u_n)$ est une suite bornée et si $u_n \sim v_n$ alors $\exp(u_n) \sim \exp(v_n)$.

## 9 Logarithme d'équivalents

1. Etudiez les couples d'exemples suivants $(\ln(n), \ln(n+1))$, $(\ln(n), \ln(n+\sqrt{n}))$, $(\ln(1+1/n), \ln(1+1/n^2))$.

2. Montrez que si $u_n \sim v_n$ et, si $u_n > 0$ à partir d'un certain rang, alors $\ln(1 + u_n) \sim \ln(1 + v_n)$.

3. On suppose que $u_n > 0$ et $v_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que $u_n \sim v_n$.

   (a) Montrez que l'on n'a pas toujours $\ln(u_n) \sim \ln(v_n)$.

   (b) En revanche, rajoutez les hypothèses les plus faibles possible sur $(u_n)$ et $(v_n)$ pour avoir toujours $\ln(u_n) \sim \ln(v_n)$.

## 10 Superconvergence

On dit que $(u_n)$ est une suite superconvergente si elle converge vers un nombre $l$ et si de plus

$$(u_{n+1} - l) = \mathrm{o}(u_n - l).$$

1. Les suites suivantes sont elles superconvergentes? $\left(\frac{1}{n}\right)$, $\left(\frac{1}{2^n}\right)$, $\left(\frac{1}{n!}\right)$, $\left(\frac{1}{\exp(2^n)}\right)$.

2. Montrez que que si $u_{n+1} = \mathrm{o}(u_n)$ alors elle est forcément superconvergente.
   (On montrera d'abord que $u_n \to 0$.)

3. On va montrer qu'une série numérique superconverge si et seulement si son terme général superconverge vers 0.
   On note $U_n := \sum_{k=1}^{n} u_k$, $U_\infty$ la limite de la suite $(U_n)$ (si elle existe), et $R_n := U_\infty - U_n$.

   (a) On suppose que $u_{n+1} = \mathrm{o}(u_n)$. Vérifier d'abord que la suite $(U_n)$ converge. Montrez que $(R_n)$ superconverge. En déduire que $(U_n)$ converge.

(b) Réciproquement, on suppose cette fois que la suite $(U_n)$ superconverge. Montrez que $(R_n)$ superconverge vers 0. En remarquant que $R_{n-1} = u_n + R_n$, en déduire que $u_{n+1} = o(u_n)$.

(c) Conclure et vérifiez les résultats obtenus sur les exemples de suites $(u_n)$ proposés à la question 1.

## 11 Suites équivalentes et calculatrice

La représentation scientifique d'un nombre $x > 0$ est $x = m \times 10^e$ où la mantisse $m \in [1, 10[$ et l'exposant $e \in \mathbb{Z}$. En pratique la machine à calculer n'affiche qu'un dizaine de décimales de $m$, i.e. elle affiche $\tilde{x} = \tilde{m}10^e$ où $|m - \tilde{m}| < \varepsilon := 10^{-10}$.

1. Montrez que tout nombre positif admet une unique mantisse et un unique exposant.
2. Montrez que $\left|\dfrac{x - \tilde{x}}{x}\right| \leq \varepsilon$.
3. Soient $0 < y < x$. Montrez que si $\left|\dfrac{x - y}{x}\right| \leq \varepsilon$, alors $\tilde{x} = \tilde{y}$, i.e. $x$ et $y$ ont le même affichage à l'écran de la calculatrice (si $x$ ou $y$ n'est pas une puissance de 10).

   Il en sera de même si $0 < x < y$ et $\left|\dfrac{x - y}{y}\right| \leq \varepsilon$.
4. En remarquant que $\dfrac{x-y}{x} = 1 - \dfrac{y}{x}$ et $\dfrac{x-y}{y} = \dfrac{x}{y} - 1$, expliquez pourquoi si $u_n > 0$, $u_n \sim v_n$ alors la machine (en général) affichera la même nombre pour les deux suites à partir d'un certain rang.

   On vérifiera cette tendance à l'égalité machine sur des exemples simples ou classiques:
   $u_n := 10^n$, $v_n := 10^n + 1$;
   $u_n := 10^{-n}$, $v_n := \frac{1}{10^n+1}$;
   $u_n := 2^n$, $v_n := 2^n + n$;
   $u_n := n!$, $v_n := \left(\dfrac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$.

## 12 Suites presque-géométriques: $u_{n+1} \sim \rho u_n$, $0 \neq \rho \neq 1$.

On considère des suites à valeurs strictements positives.

On dit que que $(u_n)$ est presque-géométrique s'il existe $\rho > 0$ et $\rho \neq 1$ tel que : $u_{n+1} \sim \rho u_n$. On notera $\rho$ sa raison.

1. Les suites suivantes sont-elles presque-géométriques?
   $(2^n)$, $(n3^n)$, $n$, $(\ln(n))$, $(2^n(1 + (-1)^n) + 3^n(1 - (-1)^n))$,
   une suite $(u_n)$ telle que $u_n \sim C\rho^n$ avec $0 < \rho \neq 1$ et $C > 0$.
2. On rappelle le lemme de l'escalier: si $v_{n+1} - v_n \to \alpha$ alors $\dfrac{v_n}{n} \to \alpha$.

   En passant au logarithme, montrez que $\ln(u_n) \sim n \ln(\rho)$.
3. En déduire que si $(u_n)$ est une suite presque-géométrique de raison $\rho$ alors $\ln u_n \sim \ln(\rho^n)$ mais qu'en général on ne peut pas déduire que $u_n \sim \rho^n$.
4. Que peut-on dire des suites telles que $u_{n+1} \sim u_n$.?
   Les résultats précédents restent-ils vrais?
   Donnez des exemples simples de telles suites ayant des comportements très différents des suites presque-géométriques

# 13 Quelques corrigés succints :

## 13.1 $u_n = \mathbf{O}(v_n)$

1. $a \leq b$
2. $u_n = \mathrm{O}(1)$ si et seulement si elle est bornée. En effet, il existe une constante $C$ telle que, à partir d'un certain rang $N$, $|u_n| \leq C$, donc $|u_n| \leq \max(C, |u_0|, |u_1|, |u_2|, \cdots, |u_N|)$.
3. Non et non, elles doivent s'anuler en mme temps pour $n$ assez grand pour espérer avoir oui et oui.
4. Non en général: contre exemple: $u_n = 1 \sim 1 + 1/n$ et $P(x) = x - 1$. Mais si tous les coefficients de $P$ sont positifs et $u_n > 0$, ou si $|u_n| \to +\infty$ alors la réponse est oui.

## 13.2 $u_n = \theta(v_n)$

## 13.3 $u_n = \mathbf{o}(v_n)$

## 13.4 $u_n \sim v_n$

1. $a = b \Longleftrightarrow n^a \sim n^b$
2. $u_n \sim 1 \Longleftrightarrow u_n \to 1$
3. $u_n \sim 0 \Longleftrightarrow u_n \equiv 0$ à partir d'un certain rang.
4. $u_n \sim v_n \Longrightarrow u_n = \mathrm{O}(v_n)$ car $0.5 < (1 + \varepsilon_n) < 1.5$ à partir d'un certain rang ,
   La réciproque est fausse: $n = O(n^2)$ mais ...
5. 
6. $U = V \neq 0$
7. $r_n := u_n/v_n, M_n := \max(r_n, 1/r_n), m_n := \min(r_n, 1/r_n)$. On a $m_n \leq r_n \leq M_n$ . Or $M_n = 1/m_n$, donc si $m_n \to 1$, $M_n$ aussi, et par le théorème des gendarmes $r_n \to 1$.

## 13.5

## 13.6 Propriétés transmissibles par les équivalents

1. car $0.5 < (1 + \varepsilon_n) < 1.5$ à partir d'un certain rang
2. car $0.5 < (1 + \varepsilon_n) < 1.5$ à partir d'un certain rang
3. 

## 13.7 Somme d'équivalents

1. 
2. (a) Pour $R_n \leq e_n(u_n + v_n)$, pb de signes
   mme si $R_n > 0$, $u_n + v_n$ peut tre beaucoup + petit que $|u_n| + |v_n|$.
   (b) $u_n > 0$

## 13.8 Exponentielle d'équivalents

1.

2.

3. $v_n = (1+\varepsilon_n)u_n$, $\varepsilon_n \to 0$, $\dfrac{\exp(v_n)}{\exp(v_n)} = \exp(\varepsilon_n u_n)$

## 13.9 Logarithme d'équivalents

1. $\ln(n) \sim \ln(n+1)$, $\ln(n) \sim \ln(n+\sqrt{n})$, $\ln(1+1/n) \sim 1/n$ mais $\ln(1+1/n^2) \sim 1/n^2$.

2. On utilise par exemple l'inégalité classique valable pour tout $x > -1$:

$$\frac{x}{x+1} \leq \ln(1+x) \leq x.$$

De $u_n = (1+\varepsilon_n)v_n$ on a $\ln(1+u_n) = \ln(1+v_n+\varepsilon_n v_n) = \ln(1+v_n) + \ln\left(1+\varepsilon_n \dfrac{v_n}{1+v_n}\right)$. Notons $w_n := \dfrac{v_n}{1+v_n}$ qui est une suite comprise strictement entre 0 et 1, alors:

$$\frac{\ln(1+u_n)}{\ln(1+v_n)} = 1 + \frac{\ln(1+\varepsilon_n w_n)}{\ln(1+v_n)} \quad \text{et} \quad \frac{\varepsilon_n}{(1+\varepsilon_n w_n)(1+v_n)} \leq \frac{\ln(1+\varepsilon_n w_n)}{\ln(1+v_n)} \leq \varepsilon_n$$

CQFD.

On peut généraliser le résultat avec le mme type de calcul en supposant seulement que $\inf u_n > -1$. On fera attention à discuter suivant le signe de $v_n$ pour faire les encadrements de $\eta_n := \dfrac{\ln(1+\varepsilon_n w_n)}{\ln(1+v_n)}$.

Attention! sans la condition $\inf u_n > -1$ c'est faux: $u_n = -1 + 1/n$, $v_n := -1 + 1/n^2$.

En revanche, si $\inf u_n > -1$ alors $\inf v_n > -1$, et, $(u_n)$ et $(v_n)$ sont équivalentes.

3. (a) conbtre-exemples: $1 + 1/n \sim 1 + 1/n^2$ mais: $\ln(1+1/n) \sim 1/n$ mais $\ln(1+1/n^2) \sim 1/n^2$.
   (b) En général, $u_n \sim v_n$, $\lim u_n = a$ et $f(a) = 0$, on n'a pas forcément $f(u_n) \sim f(v_n)$. En revanche, si $f'(a) \neq 0$ il faut et il suffit que $u_n - a \sim v_n - a$.
   Une condition générale pour $f = \ln$ qui a en plus un problème en 0:

$$u_n \sim v_n, \inf u_n > 0 \text{ et } u_n - 1 \sim v_n - 1 \Longrightarrow \ln u_n \sim \ln v_n.$$

## 13.10 Superconvergence

1. NON : $\left(\frac{1}{n}\right)$, $\left(\frac{1}{2^n}\right)$,
   OUI: $\left(\frac{1}{n!}\right)$, $\left(\frac{1}{\exp(2^n)}\right)$.

2. D'Alembert

3. Le point clef est de montrer que $R_n \sim u_{n+1}$.
   (a)
   (b)
   (c)

## 13.11 Suites équivalentes et calculatrice

## 13.12 Suites presque-géométriques