Fonctions périodiques

notations: C^0_P désigne l'ensemble des fonctions de $C^0(\mathbb{R},\mathbb{C})$, périodiques de périodes $P>0$. Soit $f,g\in C^0_P$, $\omega:=2\pi/P$, on note: $\langle f,g\rangle_P:=\dfrac{1}{P}\displaystyle\int_0^P f(t)\overline{g}(t)dt$, $P>0$, $\|f\|_{2,P}:=\sqrt{\langle f,f\rangle_P}$, $\|f\|_\infty:=\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|$, pour $n\in\mathbb{Z}$, $c_n^P[f]:=\langle f,\exp(in\omega t)\rangle_P$, $S_N^P[f]:=\displaystyle\sum_{-N}^{N}c_n^P[f]\exp(in\omega t)$, $\mathcal{S}p[f]:=\{n\in\mathbb{Z}\ /\ c_n^P[f]\neq 0\}$.

1 Exemple

Soit $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{C}$ la fonction 2π périodiques telle que $f(x)=i(\pi-x),\ x\in]0,2\pi[,\ f(0)=0$.

On note $S_{N,M}(t):=\displaystyle\sum_{n=N}^{M}c_n^{2\pi}[f]\exp(int)$.

1. Calculez le développements en série de Fourier de f et de $Im(f/2)$, et montrez que la série de Fourier de f converge simplement vers f sur $\mathbb{R}$.
2. Montrez que que $S_{-N,2N}$ et S_{-N,N^2} ne converge pas simplement vers f sur $\mathbb{R}$. Pour cela, on cherchera leurs limites en $t=0$. On pourra introduire la constante d'Euler.

2 Différentes convergences de $S_N^P[f]$ vers f, $f\in C^0_P$

1. On suppose que $f\in C^{r+1}$, $r\geq 1$.
   (a) A l'aide d'intégration par parties montrez que $(n^{r+1}c_n^P)_{k\in\mathbb{Z}}$ est une suite bornée.
   (b) Montrez que $\displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty}n^{-(r+1)}=O(N^{-r})$,
   (c) En déduire que :$\|f-S_N^P[f]\|_\infty=O(N^{-r})$ et $\|f-S_N^P[f]\|_{2,P}=O(N^{-r-1/2})$.
   (d) (b) et (c) restent t'il vrais si $f\in C^r$ et $f^{(r)}$ et C^1 par morceaux?
   (e) Vérifiez ces résultats sur f,$C^1_{2\pi}$ et C^2 par morceaux, telle que $f''(x)=\frac{\pi-x}{2},\ x\in]0,2\pi[$.
2. On suppose que $f\in C^1$.
   (a) Montrez que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n^P[f]|$ converge ($|c_n[f]|=\frac{1}{n\omega}|c_n[f']|$, $n\neq 0$, et $ab\leq(a^2+b^2)/2$).
   (b) En redéduire, sans le théorème de Dirichlet, que $\|f-S_N^P[f]\|_\infty\to 0$.
3. On suppose que f est continue par morceaux.
   (a) Montrez que $\|f-S_N^P[f]\|_{2,P}\to 0$ en appliquant l'égalité de Parseval à $f-S_N^P[f]$.
   (b) Soit $S(x):=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$, montrez que la série est bien définie, 2π périodique, continue sur $]0,2\pi[$, mais qu'elle n'est pas la série de Fourier d'une fonction continue par morceaux.

3 $\mathcal{S}p[f]$ pour $f \in C_P^0$

1. Nommez et démontrez l'égalité suivante : $\|f\| = \sum_{n\in\mathcal{S}p[f]} \left|c_n^P[f]\right|^2$,(convention $\sum_{\emptyset} \cdots = 0$).
2. Démontrez que : $\mathcal{S}p[f]$ est fini si et seulement si f est un polynôme trigonométrique.
3. En déduire que si $\mathcal{S}p[f] \cap \mathcal{S}p[g] = \emptyset$ alors $\langle f, g\rangle = 0$.

4 $H = \{f \in C_{2\pi}^0 \ / \ \sum_{n\in\mathbb{Z}} |nc_n[f]|^2 \ converge\}$

1. Montrer que H est un espace vectoriel qui contient $C_{2\pi}^2$. $C_{2\pi}^1 \subset H$?
2. Soit $f \in H$. Montrer que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n[f]|$ converge. En déduire que $f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n[f]\exp(int)$ sur $[0, 2\pi]$.
3. Soit $f \in H$, on veut montrer que $|f(t) - f(s)| = \mathrm{O}\left(\sqrt{|t-s|}\right)$.
   (a) Vérifier que pour tout $N \in \mathbb{N} - \{0\}$, $|f(t) - f(s)| \leq \sum_{|n|\leq N} n|c_n[f]||t-s| + 2\sum_{|n|>N} |c_n[f]|$
   (b) En déduire que pour tout $N \in \mathbb{N} - \{0\}$, $|f(t) - f(s)| = \mathrm{O}\left(\sqrt{N}|t-s| + \frac{1}{\sqrt{N}}\right)$, puis conclure.

5 Solutions périodiques d' équations différentielles

1. Pour quelles valeurs de λ, l'équation:
$$-\frac{d^2}{dx^2}u(x) = \lambda u(x), \quad x \in \mathbb{R},$$
admet des solutions non identiquement nulles dans $C_{2\pi}^2 = C_{2\pi}^0 \cap C^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$?
2. Soit $f \in C_{2\pi}^1$, trouvez toutes les solutions $u \in C_{2\pi}^2$ de l'équation $-\frac{d^2}{dx^2}u(x) = f(x)$.
On exprimera la série de fourier de u à l'aide des coefficients de Fourier de f.
3. Soit $u_0 \in C_{2\pi}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Touver $v \in C^2([0, +\infty[\times\mathbb{R}, \mathbb{C})$, 2π périodique par rapport x solution de:
$$i\frac{\partial}{\partial t}v(t,x) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}v(t,x) = 0, \qquad v(0,x) = u_0(x).$$
On dévellopera $x \mapsto v(t,x)$ en série de Fourier.

6 Corrigé succint :

N'hésitez pas à me contacter par email pour corriger les coquilles.

6.1 Exemple

1. $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}-\{0\}} \frac{e^{inx}}{n}$, $\pi - x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$, $x \in]0, 2\pi[$. Revoir Théorème de Dirichlet, Lemme d'Abel pour les séries semi-convergentes. Par Abel ou Dirichlet on a la convergence uniforme sur $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon], 0\varepsilon \leq 1$. On n'a pas convergence normale sur $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$,$[0, 2\pi]$, $]0, 2\pi[$ (ici c'esst pareil car la série des sup sur l'ouvert ou le fermee c'est pareil pour une série de fonction continues sur le fermé) car on n'a pas d'absolue convergence.
   On n'a pas convergence uniforme sur $[0, 2\pi]$ car sa limite est discontinue par Dirichlet. Sur $]0, 2\pi[$ non plus car $\sup_{0<x<2\pi} |(\pi - x)/2 - S_{-N,N}(x)| = \sup_{0\leq x\leq 2\pi}$, ou car $\frac{\pi}{2} = \lim_{x\to 0^+} \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin(nx)}{n} \neq \sum_{n=1}^{N} \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(nx)}{n} = 0$.

2. On étudie la convergence en $x = 0$:
   $\sum_{N+1}^{2N} \frac{1}{k} = \frac{1}{N+1} + \cdots + \frac{1}{N+N} = \frac{1}{N}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{N}} + \cdots + \frac{1}{1+\frac{N}{N}}\right) \to \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln(2) \simeq 0.6931472$
   ou $\sum_{N+1}^{2N} \frac{1}{k} = \gamma + \ln(2N) + o(1) - (\gamma + \ln(N) + o(1)) = \ln(2) + o(1)$.
   $\sum_{N+1}^{N^2} \frac{1}{k} = \gamma + \ln(N^2) + o(1) - (\gamma + \ln(N) + o(1)) = \ln(N) + o(1)$.

6.2 Différentes convergences de $S_N^P[f]$ vers f.

1. (a) $\forall n \in \mathbb{N}, c_n^P[f'] = in\omega c_n^P[f]$ par IPP. Calcul formel en dérivant la série de Fourier, justifié dans le cas C_P^2.

   (b) $\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^{r+1}} \leq \int_N^{+\infty} \frac{dx}{x^{r+1}} = \frac{1}{rN^r}$

   (c) $\|f - S_N^P[f]\|_\infty \leq \frac{2\|f^{(r+1)}\|_\infty}{rN^r}$ et $\|f - S_N^P[f]\|_{2,P} \leq \frac{\|f^{(r+1)}\|_\infty}{\sqrt{r+\frac{1}{2}}N^{r+\frac{1}{2}}}$.

   rem: $\|f - S_N^P[f]\|_\infty = o(N^{-r}), \|f - S_N^P[f]\|_{2,P} = o(N^{-r-\frac{1}{2}}$, car d'après le théorème de Parseval (ou Riemann-Lebesgue) $c_n[f^{(r+1)} \to 0$.???? à vérifier car on fait la somme de petit o.???

   (d) OUI

   (e) $f(x) = \frac{1}{2}[x^3/6 - \pi x^2/2 + \pi^2/6x]$ verif ???

   $f(x) = \int\int \frac{\pi - x}{2} dx = -\frac{x^2(x-3\pi}{12} = -\frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{6} - \frac{x^2\pi}{2}\right]$, $x \in]0, 2\pi[$. $g(x) := \frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$, $x \in [0, 2\pi]$. On n'a pas bien $f'(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} = -\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{3} - \frac{x^2\pi}{2}\right]$, $f = \int\int g$.Maple $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}$, $x \in]0, 2\pi[$.??? à revoir

2. (b) $S_N[f]$ cv g et $f = g$ par Parsevalou Dirichlet.

3. (a) Montrez que $\|f - S_N^P[f]\|_{2,P} \to 0$ (Parseval).

   (b) Soit $S(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$, la série est bien définie par le lemme d'Abel, 2π périodique, continue sur $]0, 2\pi[$ par Abel uniforme, mais $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(\sqrt{n})^2} = +\infty$, elle n'est pas la série de Fourier d'une fonction continue par morceaux.

6.3 $\mathcal{S}p[f]$

1. $\sum_{\emptyset} \cdots = 0$

2. $\Leftarrow$, trivial
   $\Rightarrow P(t) := \sum_{n \in \mathcal{S}p[f]} c_n^P[f] exp(in\omega t)$. La somme est finie, $\|f - P\|_2 = 0$ d'après l'égalité de Parseval.

3. Par densité, si les spectres sont finis c'est immédiat. Sinon $P_n \to f$ dans L^2, de même $Q_n \to g$ dans L^2, où P_n, Q_n sont des polynômes trigonométriques donnés par l'égalité de Parseval. Donc, $\mathcal{S}p[P_n] \subset \mathcal{S}p[f]$, $\mathcal{S}p[Q_n] \subset \mathcal{S}p[g]$, $\mathcal{S}p[P_n] \cap \mathcal{S}p[Q_n] = \emptyset$, et $\|f - P_n\|_2 + \|g - Q_n\|_2 \to 0$ et $\|P_n\|_2 + \|Q_n\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2$, toujours par Parseval. Ainsi $\langle f, g\rangle_P = \langle (f - P_n) + P_n, (g - Q_n) + Q_n\rangle_P = \langle P_n, Q_n\rangle_P + \langle f - P_n, g - Q_n\rangle_P + \langle P_n, g - Q_n\rangle_P + \langle f - P_n, Q_n\rangle_P$, donc, comme $\langle P_n, Q_n\rangle_P = 0$, $|\langle f, g\rangle_P| \leq \|f - P_n\|_2 \|g - Q_n\|_2 + \|P_n\|_2 \|g - Q_n\|_2 + \|f - P_n\|_2 \|Q_n\|_2 \to 0$.

6.4 $H = \{f \in C_{2\pi}^0 \ / \ \sum_{n \in \mathbb{Z}} |nc_n[f]|^2 \ converge\}$

1. $inc_n[f] = c_n[f']$, $f \in C_{2\pi}^2 \Rightarrow c_n[f] = O(n^{-2})$.
   $f \in C_{2\pi}^1$, utiliser inégalité de Young, ou de Cauchy Schwartz, et l'égalité de Parseval.

2. indication : $c_n[f] = \frac{1}{n} * nc_n[f]$. Th. de Dirichlet out.

3. $|f(t) - f(s)| = \mathrm{O}\left(\sqrt{|t - s|}\right)$.

   (a) T.A.F. $|f(t) - f(s)| = \sum_{|n| \leq N} |c_n||e^{int} - e^{ins}| + \sum_{|n|>N} |c_n[f]|2 \leq \sum_{|n| \leq N} n|c_n[f]||t - s| + 2 \sum_{|n|>N} |c_n[f]|$

   (b) $\sum_{|n| \leq N} |nc_n| \leq \left(\sum_{|n| \leq N} |nc_n|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{|n| \leq N} 1^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{non\mathbb{Z}} |nc_n|^2\right)^{1/2} \sqrt{2N+1} = O(\sqrt{N})$

   $\sum_{|n|>N} |c_n| = \sum_{|n|>N} \frac{1}{|n|} |nc_n| \leq \left(\sum_{|n|>N} n^{-2}\right)^{1/2} \left(\sum_{non\mathbb{Z}} |nc_n|^2\right)^{1/2} = O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$

   car $\sum_{n>N} n^{-2} \leq \int_N^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{N}$.

4. em Rab: Soit f paire, 2π périodique, égale à t^a sur $[0,\pi]$. Montrer que $f \in H$ pour $1 > a > \frac{1}{2}$ mais que $f \notin C^1$. Pour $a < \frac{1}{2},\ f \notin H$, $a = \frac{1}{2},\ f \notin H$.
   dem : f est C^1_{pm} en π, et même partout pour $a \geq 1$.
   $a < \frac{1}{2}$, f est Holderienne de rapport $< \frac{1}{2}$ et pas $\frac{1}{2}$.
   $a = \frac{1}{2}$, $b_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \sqrt{x}\sin(nx)dx$; IPP : $nb_n = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} - \displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin(nx)}{\pi\sqrt{x}}dx \sim \frac{2}{\sqrt{\pi}}$.
   $1 > a > \frac{1}{2}$???

5. *Rab* H est préhilbertien, resoudre $-u'' = f, u(0) = u(\pi) = 0$ ...