Séries de Fourier

Notations : On note C^k_P les fonctions de $C^k(\mathbb{R},\mathbb{C})$, P périodique et $\widetilde{C}^k_P$ les fonctions C^k par morceaux et P périodique. Soit $f \in \widetilde{C}^0_P$ et $\omega = \dfrac{2\pi}{P}$, on note le $n^{\text{ème}}$ coefficient de Fourier : $c_n[f] = \dfrac{1}{P}\displaystyle\int_0^P f(t)\exp(-in\omega t)dt$, $n \in \mathbb{Z}$, $S_N[f](t) = \displaystyle\sum_{|n|\leq N} c_n[f]\exp(in\omega t)$, et, la série de Fourier de f : $S[f](t) = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n[f]\exp(in\omega t)$. Lorsque f est à valeurs réelles on préfère travailler avec $a_n[f] = \dfrac{2}{P}\displaystyle\int_0^P f(t)\cos(n\omega t)dt$, $\quad n \geq 0$, $b_n[f] = \dfrac{2}{P}\displaystyle\int_0^P f(t)\sin(n\omega t)dt$, $\quad n \geq 1$, et $S_N[f](t) = \dfrac{a_0[f]}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{N}(a_n[f]\cos(n\omega t) + b_n[f]\sin(n\omega t))$, $S[f](t) = \displaystyle\lim_{N\to\infty} S_N[f](t)$.

Théorème de Parseval pour $f \in \widetilde{C}^0_P$: $\dfrac{1}{P}\displaystyle\int_0^P |f(t)|^2dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n[f]|^2 = \frac{1}{4}|a_0[f]|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(|a_n[f]|^2 + |b_n[f]|^2)$.

1 Créneaux et dents de scie

Pour les fonctions de période 2π suivantes, calculer leur série de Fourier. Puis étudier la convergence simple et uniforme de ces séries de Fourier.

1. f est impaire, et $f(t) = 1$ sur $]0,\pi[$.
2. $f(0) = 0$, $f(t) = \dfrac{\pi - t}{2}$ sur $]0, 2\pi[$. En déduire que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

2 Régularité et décroissance des coefficients de Fourier

1. On suppose que $f \in C^1_{2\pi}$. Montrer que $c_n[f'] = inc_n[f]$. On dérivera formellement la série de Fourier de f. On justifiera ce calcul à l'aide d'une intégrations par parties sur l'intégrale qui définit $c_n[f]$.
2. On suppose que $f \in C^k_{2\pi}$, où $k \geq 2$.
   (a) Montrer que $c_n[f^{(k)}] = i^k n^k c_n[f]$. En déduire que $c_n[f] = O\left(\dfrac{1}{n^k}\right)$
   (b) Montrer que $\|f - S_N[f]\|_\infty := \displaystyle\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(t) - S_N[f](t)| = O\left(\frac{1}{n^{k-1}}\right)$
3. Réciproquement, on suppose que $f \in C^0_P \cap \widetilde{C}^1_P$ et que $c_n[f] = O\left(\dfrac{1}{n^{k+2}}\right)$, montrer que $f \in C^k_P$.
4. On pose $f(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(nt)}{n!}$, $t \in \mathbb{R}$. Montrez directement que $f \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Calculer explicitement $a_n[f]$ et $b_n[f]$. En redéduire que $f \in C^\infty_{2\pi}$. Donner une formule explicite de f.

3 $f(t) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\sin(nt)}{\ln(n)}$

1. Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z}$ paire et 2π périodique.
2. Cependant, à l'aide du théorème de Parseval montrez que la série trigonométrique définissant f n'est pas la série de fourier d'une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

Dans cette exercice on va obtenir l'égalité ponctuelle entre une fonction $f \in C^0_{2\pi}$ et sa série de Fourier à l'aide du théorème de Parseval. Le théorème de Dirichlet ne sera guère utilisable ici.

1. Montrez que la série de Fourier de f converge normalement si et seulement si $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n[f]|$ converge si et seulement si $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n[f]|$ converge et $\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n[f]|$ converge.
2. Soit $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ telle que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\gamma_n|$ converge. Soit $g(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \gamma_n \exp(inx)$.
Montrez que $g \in C^0_{2\pi}$ et que $c_n[g] \equiv \gamma_n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
3. On suppose que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n[f]|$ converge. Montrez que, sur tout $\mathbb{R}$, la série de fourier de f converge normalement et simplement vers f. On utilisera le Théorème de Parseval sur $h := f - S[f]$ pour montrer que $f = S[f]$.
4. Soit $f \in C^2_{2\pi}$, à l'aide d'intégration par parties, montrez que sa série de Fourier converge normalement vers f.
5. Soit $f \in C^1_{2\pi}$, montrez que sa série de Fourier converge normalement vers f.

5 La méthode des rectangles converge très rapidement ? !

Soit $k \geq 2$, $f \in C^k_{2\pi}$, $N \in \mathbb{N} - \{0\}$, $h = \frac{2\pi}{N}$, $x_l = lh$ pour $l = 0, 1, \ldots, N$ et $R_N(f) = h\sum_{l=1}^{N} f(x_l)$

1. Pour $n \in \mathbb{Z}$, montrer que $R_N(\exp(int)) = \begin{cases} 2\pi & \text{si } N \text{ divise } n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
2. Montrer que $\sum_{|q|=1}^{+\infty} c_{qN}[f] = O\left(\frac{1}{N^k}\right)$. En déduire que $R_N(f) = \int_0^{2\pi} f(x)dx + O\left(h^k\right)$.
3. Si $f \in C^\infty_{2\pi}$ quelle méthode utiliseriez vous pour calculer $\int_0^{2\pi} f(x)dx$? rectangles, trapèzes, Simpson?Romberg

6 Soit f, $g \in C^0_{2\pi}$ et $\varphi(x) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)dt$, $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrez que $\varphi \in C^0_{2\pi}$.
2. Montrez que $c_n[\varphi] = c_n[f]c_n[g]$, $n \in \mathbb{Z}$.
3. En déduire que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n[\varphi]|$ converge.
4. En déduire que $\varphi \equiv S[\varphi]$ sur $\mathbb{R}$.
5. Enoncer une réciproque aux deux résultats précédents.
6. Une application: On cherche à résoudre l'équation fonctionelle suivante
$$f(x+y) = f(x)f(y) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R} \tag{1}$$
dans $C^0_{2\pi}$. (i.e. $f \in C^0_{2\pi}$). Pour cela, on se fixe $k \in \mathbb{Z}$ et on pose $g(x) := \exp(ikx)$ et φ la fonction définie plus haut.
   (a) En calculant les $c_n[g]$ puis les $c_n[\varphi]$, montrez que $\varphi \equiv c_k[f]g$.
   (b) A l'aide de l'équation fonctionelle vérifiée par f, montrez que $\varphi \equiv c_k[f]f$.
   (c) En déduire toute les solutions continues et 2π périodique de l'équation fonctionnelle (1).