Problèmes de probabilités élémentaires

http://math.unice.fr/ junca/

1. Dans un jeu de 32 cartes non truquées, on tire une carte au hasard. Quelle est la probabilité d'obtenir un roi, un coeur, un roi de coeur, un roi ou un coeur?

2. Dans une usine, la fabrication d'une pièce nécessite son passage sur deux machines. Notons M_1 l'événement "la première machine tombe en panne"; M_2 l'événement "la deuxième machine tombe en panne". Une étude a permis d'estimer que:

   - $p(M_1) = 0,004$;
   - si M_1 est en panne, la probabilité que M_2 soit en panne est 0,5;
   - si M_1 n'est pas en panne, la probabilité que M_2 soit en panne est 0,002.

   Construisez un arbre représentant cette situation et inscrivez sur chaque branche la probabilité associèe. Puis calculez $p(M_2)$.

3. On tire deux cartes dans un jeu de 32 cartes. Une carte est un as. Quelle est la probabilité d'avoir deux as? Si de plus on sait qu'une carte est un as de pique, cela change-t'il la probabilité d'avoir deux as?

4. Le problème de la mariée.

   Supposons que vous soyez une femme ayant décidé de se marier et que pour sélectionner l'homme de votre vie, vous ayez un entretien avec un maximum de N candidats. Les entretiens sont conduits dans un ordre aléatoire, et vous n'avez aucune information sur les candidats auxquels vous n'avez pas encore parlé. Après chaque entretien , vous avez le choix entre épouser le prétendant ou perdre à jamais la possibilité de le faire. Si vous ne vous êtes pas mariée après le $N-1$ème entretien, alors vous devrez épouser le Nième candidat. L'objectif est évidemment d'épouser le meilleur des N prétendants.

Une stratégie est de choisir un entier a, $0 \leq a < N-1$. On fait a entretiens sans se décider mais en évaluant bien la *valeur* de chaque candidat rencontré. Puis on continue les entretiens suivant en s'arrêtant dès que l'on trouve un *record*, c'est à dire un homme qui est meilleur que les a premiers.

Dans le cas où le *meilleur* était dans les a premiers, je me marie forcément avec le dernier et j'ai perdu l'objectif.

Ainsi, le choix de l'entier a détermine une stratégie. Pour $a = 0$, on prendra le candidat numéro 1. Pour $a = 1$, on prendra le premier candidat qui est meilleur que le candidat numéro 1... Pour $a = N - 1$, on a plus le choix, on prendra le candidat numéro N. On mesurera la "valeur" du candidat qu'on devrait rencontrer à l'entretien numéro k par un nombre v_k et supposera que tous ces hommes ont des valeurs différentes. Comme les entretiens sont conduits dans un ordre aléatoire, indépendant de la valeur des candidats, on n'aura qu'une certaine chance d'obtenir le meilleur. On notera $p(N, a)$ la probabilité d'obtenir le meilleur des N candidats avec la stratégie déterminé par l'entier a.

On commentera les résultats obtenus aux questions suivantes.

(a) Evaluer les probabilités d'épouser le meilleur des N prétendants pour la stratégie avec $a = 0$ puis la stratégie où $a = N - 1$. En déduire que $p(N, 0) = p(N, N - 1)$.

(b) Même question pour $N = 2$ et $a = 0$ puis $a = 1$. Y-a-t'il une meilleure stratégie pour $N = 2$?

(c) Calculer $p(3, 1)$. En déduire que pour $N = 3$ il faut prendre $a = 1$.

(d) Lorsque $N = 4$, quelle est la meilleure stratégie?

(e) Pour $N = 100$ et $a = 50$, montrer que $p(100, 50) > 0,25$.
(considérer le cas où le meilleur a un numéro d'entretien > 50 et le deuxième meilleur un numéro d'entretien ≤ 50).

(f) En déduire que pour tout N, $\max_{0 \leq a < N} p(N, a) > 0,25$.

5. Chacun des mots de l'expression "par le plus grand des hasards" est écrit sur un carton et ces six cartons sont disposés dans une urne. On tire au hasard l'un des cartons de cette urne et on compte le nombre de lettres du mot inscrits sur ce carton.

(a) Précisez la loi de probabilité associée à cette expérience.

(b) Calculez l'espérance, la variance et l'écart type de cette loi.

6. Il y a deux cartes sur la table. Sur chaque carte est écrit un nombre inconnu v_k, $k = 1, 2$ avec $v_1 \neq v_2$. On cherche la carte qui a le plus grand nombre. On a le droit de retourner la première carte, de lire le nombre v_1 puis de choisir cette carte ou bien la deuxième carte.

   (a) Montrer que quelque soit votre choix après la lecture de la première carte, vous n'avez qu'une chance sur deux de choisir la carte avec le nombre le plus grand.

   (b) Cependant un chercheur de Berkeley a trouvé une méthode qui permet de gagner à ce jeu plus d'une fois sur deux.

   Tout d'abord, générer un nombre aléatoire R selon une loi gaussienne. Retourner alors l'une des cartes et lire le nombre v_1 inscrit dessus. Si $R > v_1$, prendre la deuxième carte , sinon garder la première.

      i. Montrer que la probabilité de gagner est strictement supérieur à 50%. Plus précisément si r est la probabilité que R soit entre v_1 et v_2, la probabilité de gain est $g = \dfrac{1+r}{2}$.

      ii. Supposez qu'une tierce personne, qui connaît v_1 et v_2 a envie de vous faire gagner. Elle peut seulement vous conseiller les paramètres de la loi normale: $\mu = E(R)$ et $\sigma^2 = Var(R)$. Cette personne n'a pas le droit de proposer un écart-type trop petit, (cela serait trop simple). Elle ne peut proposer qu'un σ tel que $4\sigma \geq |v_2 - v_1|$. Quels paramètres va-t'il vous proposer? Dans ce cas quelle est votre probalité de gain g?

      iii. Cette fois-ci la tierce personne, qui connaît toujours v_1 et v_2 a envie de vous faire *perdre*. Elle peut seulement vous conseiller les paramètres de la loi normale: $\mu = E(R)$ et $\sigma^2 = Var(R)$. Cette personne n'a pas le droit de proposer un écart-type ou une moyenne trop *grand(e)*, (cela serait trop simple). Elle ne peut proposer qu'un σ tel que $4\sigma \leq |v_2 - v_1|$ et $\min_k |\mu - v_k| \leq 2\sigma$. Quels paramètres va-t'il vous proposer? Dans ce cas majorez votre probalité de gain g.

      iv. Si l'on sait que les nombres v_k sont positifs, quelle loi proposeriez vous pour R à la place d'une gaussienne?

      v. Peut-on utiliser une loi uniforme pour R en étant sûr de toujours avoir $g > 50\%$?

      vi. Pourquoi ne pas utiliser une loi discrète pour R?