Problèmes de probabilité de Lycée

1. Combien y a-t-il de manière de colorier le drapeau de la France en utilisant uniquement les couleurs bleu, blanc, rouge, les trois couleurs devant être présentes suivant trois bandes verticales sur le drapeau?

   Solution: $3 \times 2 \times 1 = 3! = 6$

2. Combien y a-t-il de paires d'arêtes perpendiculaires dans un cube? (Deux droites sont perpendiculaires si elles sont concourantes et font un angle droit.)

   Solution: Il y a 12 arêtes dans un cube. Choisissons une arête, elle a 4 arêtes perpendiculaires. Ainsi, il y a 12×4 *possibiltés de choisir un couple ordonné d'arêtes perpendiculaires. Chaque paire est comptée 2 fois. Le résultat est donc* $\frac{12\times 4}{2} = 24$.

3. On tire au hasard 2 cartes d'un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité de tirer 2 coeurs?

   Solution: $\frac{\left(\begin{array}{c} 8 \\ 2 \end{array}\right)}{\left(\begin{array}{c} 32 \\ 2 \end{array}\right)} = \frac{8\times 7}{32\times 31} = \frac{7}{124} \simeq 6\%$.

4. Sur quelle ligne du triangle de Pascal, 14 apparaît-il pour la première fois?

   Solution: Il apparaît 2 fois sur la quinzième ligne: $14 = \left(\begin{array}{c} 14 \\ 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 14 \\ 13 \end{array}\right)$, *(la première ligne correspond à* $n = 0$*). En général,* $\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 1}$, *et 7 est un nombre premier. 7 doit apparaître au numérateur et ne doit pas disparaître après simplification donc* $n \geq 7 > k$ *(par symétrie du coefficient binomial on considère que les* $k \leq n/2$*),Donc* $n = 14$, $k = 1$ *(ou 13) donne le résultat.*

5. Combien y a-t-il de manières de payer 2008 euros en pièces de 1 & 2 euros?

Solution: 1005. $2008 = 1 \times x + 2 \times y$, *les valeurs possibles de* y *sont:* $y = 0, 1, \cdots 1004$ *et chaque valeur de* y *détermine* x.

6. On jette une pièce de monaie 4 fois de suite. Quelle est la probabilité d'avoir au moins 2 jets consécutifs marqués pile?

   Solution: $p = \frac{1}{2}$. *Par exemple, on étudie le cas contraire: pas de pile consécutif. On code le résultat des lancers 'par un mot de 4 lettres ne contenant que des P ou des F. Soit k le nombre de P.* $k = 0$ *donne un seul mot: FFFF.* $k = 1$ *donne 4 mots.* $k = 2$ *donne 3 mots (3=6-3, considérer les 2P consécutifs).* $k > 2$ *donne* 0 *mots.*$1 - p = \frac{1+4+3}{2^4}$.

7. On jette un dé jusqu'à obtenir un 6. Quelle est la probabilité d'y arriver au plus tard en 3 coups?

   Solution: $\frac{91}{216} \simeq 42\%$ *.Le cas contraire donne* $5^3/6^3$.

8. Dans une course de chevaux, si l'on joue complètement au hasard, il y a une chance sur 2730 de toucher le tiercé dans l'ordre. Combien y-a-t-il de chevaux?

   Solution: 15. Le nombre de résultats du tiercé est $n(n-1)(n-2) = 2730 = 2 \times 5 \times 3 \times 7 \times 13 = 15 \times 14 \times 13$.

9. Une urne U_1 contient 4 boules blanches et 2 boules noires. Une autre urne U_2 contient 1 boule blanche et 3 boules noires. On tire une urne au hasard puis une boule dans cette urne.

   - Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche?
     Solution: $\frac{11}{24} \simeq 46\%$. *On applique la formule des probabilités totales:*

     $$\begin{aligned} P(B) &= P_{U_1}(B) \times P(U_1) + P_{U_2}(B) \times P(U_2) \\ &= \frac{4}{6} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{11}{24}. \end{aligned}$$

     remarque:on ne peut pas tout mettre dans une seule urne car les urnes n'ont pas autant de boules. Avec une seule urne contenant toute les boules on aurait: $\frac{5}{10} = 50\%$.
   - Si la boule tirée est noire, quelle est la probabilité qu'elle provienne de l'urne U_1?
     Solution: $\frac{4}{13} \simeq 31\%$. *Debayes.* $P(N) = 13/24$.

     $$P_N(U_1) = \frac{P(U_1 \cap N)}{P(N)} = \frac{\frac{2}{6} \times \frac{1}{2}}{\frac{13}{24}} = \frac{4}{13}.$$