Feuille d'exercices sur les suites numériques

1. On considère la relation de récurrence
   (R) $u_{n+2} = 2u_{n+1} + u_n + a^n$
   où a est un nombre réel donné. On cherche la solution vérifiant les conditions initiales $u_0 = u_1 = 1$
   (a) Dans le cas où $a = 0$ calculer u_n pour tout n On suppose désormais a non nul.
   (b) Montrer qu'il existe C tel que la suite $(C.a^n)$ ou bien la suite $(C.na^n)$ est solution de *(R)*. En déduire u_n.
   (c) Généraliser la méthode pour la résolution des récurrences linéaires de la forme $u_{n+2} = b.u_{n+1} + c.u_n + a^n$
2. Soit $a > 0$. On considère la suite définie par les relations suivantes :
   $u_0 = a$
   $u_{n+1} = \frac{e^{u_n}}{n+1}$
   (a) Quelles sont les limites, finies ou infinies, possibles pour (u_n) ?
   (b) On suppose que pour tout n $u_{n+1} > u_n$. Montrer que (u_n) tend vers l'infini.
   (c) On suppose qu'il existe n_0 tel que $u_{n_0+1} \leq u_{n_0}$. Montrer que la suite est décroissante à partir du rang n_0 et en déduire sa nature.
   (d) Dans quel cas se trouve t'on si l'on choisit $a = 0.3$?
   (e) Montrer que pour $n \geq 3$ $e^n > (n+1)^2$
   (f) On suppos que $u_3 > 3$. Montrer que $u_n > n$ pour tout $n > 3$
   (g) Dans quel cas se trouve t'on si l'on choisit $a = 0.4$?
3. On considère les suites définies par les deux relations suivantes :
   $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + ... + \frac{1}{n!}$
   $v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}$
   (a) Montrer que ces deux suites sont adjacentes.
   (b) A l'aide d'une formule de Taylor, montrer que leur limite commune est le nombre e.
   (c) On suppose que p, q sont deux entiers tels que pour tout n on ait $u_n < \frac{p}{q} < v_n$. En étudiant pour $n = q$ établir une contradiction.
   (d) Montrer que e est irrationnel.
4. On fixe $a > 1$. On considère la suite définie par les conditions : $u_{n+1} = \frac{u_n^2 + a}{2u_n}$,$u_0 = a$.
   (a) Justifier que la suite est bien définie. Montrer sa convergence vers $l = \sqrt{a}$.
   (b) Montrer que l'on a $u_{n+1} - l < (u_n - l)^2$ pour tout n.
   (c) On prend $a = 2$. En utilisant l'inégalité précédente, determiner un entier n tel que l'on ait surement $u_n - l < 10^{-100}$
5. on considère une suite vérifiant la récurrence $u_{n+1} = u_n + \frac{u_n^2}{1+u_n^2}$.
   (a) Vérifier que u_n tend vers l'infini
   (b) Trouver la limite de $u_{n+1} - u_n$. En utilisant le théorème de Césaro, en déduire un équivalent de u_n.
   (c) montrer qu'il existe une constante c (qu'on ne déterminera pas) telle que $u_n = n + c + o(1)$
6. Soit (u_n) une suite telle que les 3 suites extraites $(u_{2n}), (u_{2n+1}), (u_{3n})$ soient convergentes. Montrer que (u_n) est convergente.
7. Soit (u_n) une suite réelle positive qui tend vers 0
   (a) Est il vrai que (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang ?
   (b) Montrer que (u_n) possède une suite extraite décroissante.
   (c) (plus difficile) généralisation : montrer que toute suite réelle possède une suite extraite monotone.
8. Soit x un nombre réel. Montrer que x est rationnel si et seulement si son développement décimal est périodique.
9. Soit $\alpha \in [0, 1]$ un nombre irrationnel. on pose $u_n = e^{i\pi\alpha n}$.
   (a) Montrer que les terme de cette suite sont tous distincts et de module 1.
   (b) Montrer successivement :
   (u_n) possède une valeur d'adhérence l
   1 est valeur d'adhérence de (u_n)
   l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) est le cercle unité du plan complexe.