

Exercices sur les équivalents, les développements limités et les primitives

1. Développements limités, généralisés, équivalents, applications.

(a) Soient  $(u_n)_n$  une suite réelle, et  $f$  une fonction réelle. Exprimer, à l'aide des symboles  $o, O, \sim$  les affirmations suivantes.

- i.  $u_n \rightarrow 1$  quand  $n \rightarrow \infty$ .
- ii.  $u_n \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ .
- iii.  $(u_n)_n$  est bornée.
- iv. le graphe de  $f$  possède l'asymptote  $y = 2x$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$

(b) Déterminer des équivalents (les plus simples possibles !) quand  $x \rightarrow 0$  et quand  $x \rightarrow +\infty$  pour les 3 fonctions suivantes :

$$f : x \rightarrow x + \sin x; g : x \rightarrow x - \sin x; h : x \rightarrow xe^x$$

(c) Comparer, au voisinage de zéro et de  $+\infty$  les fonctions  $x \rightarrow \frac{1}{x \ln^2 x}$  et  $x \rightarrow \frac{1}{x^\alpha \ln x}$  pour  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

(d) Déterminer les développements limités à l'ordre 2 en zéro des fonctions suivantes :

$$g(x) = \frac{e^x - 1 - x}{1 - \cos x}, f(x) = (\ln(e^x + x^4) - x) / \sin^2 x$$

(e) Déterminer la limite  $l$  de la suite  $u_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ , puis un équivalent de la différence  $u_n - l$ .

2. Développements limités, généralisés, équivalents, applications.(exercices plus difficiles)

(a) Soit  $f(x) = e^{\sqrt{x+x^2}}$ . Donner l'équivalent le plus simple possible de  $f$  en 0 et en  $+\infty$ . Faire le développement généralisé de  $f$  à 3 termes (en 0 et  $+\infty$ )

(b) En utilisant l'égalité  $\cos u = 1 - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$  déterminer un équivalent en  $0^+$  de  $f(x) = \arccos(1-x)$

(c) Trouver un équivalent simple  $v_n$  de  $u_n = \int_1^n e^{t^2} dt$  à l'aide d'une intégration par parties.

(d) (difficile) On pose  $\varphi_n(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \dots + \frac{1}{x-n}$  et on note  $x_n$  la solution supérieure à  $n$  de l'équation  $\varphi_n(x) = a$  ( $a > 0$ ). Déterminer un équivalent de  $x_n$ . (ind. : comparer à une intégrale.

(e) Démontrer que l'équation  $x \tan x = 1$  possède exactement une solution sur l'intervalle  $]n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}[$ , qui sera notée  $x_n$ . Etablir le développement  $x_n = n\pi + \frac{1}{n\pi} - \frac{4}{3(n\pi)^3} + o(\frac{1}{n^3})$ .

3. Primitives, calculs d'intégrales.

(a) Calculer les primitives des fonctions suivantes :  $x \rightarrow \frac{1}{1+e^x+e^{2x}}$ ,  $x \rightarrow \tan^n x$ ,  $x \rightarrow \frac{1}{1+\sqrt{1+x+x^2}}$  (pour  $n$  entier positif ou nul, puis pour  $n$  entier relatif).

(b) On souhaite calculer l'intégrale  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{2+\sin 2x} dx$ .

i. Effectuer le changement de variable  $t = \tan(\frac{x}{2})$  dans l'intégrale  $I$  et expliquer alors pourquoi cette méthode a peu de chances d'aboutir.

ii. Montrer, à l'aide d'un changement de variable bien choisi que  $I = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + \cos x}{2+\sin 2x} dx$ .

iii. Dans l'expression précédente, effectuer le changement  $t = x - \frac{\pi}{4}$  et trouver la valeur de  $I$  (reponse :  $\frac{1}{\sqrt{3}} \ln(\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}})$ )

(c) On pose  $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t dt$

i. Etablir une relation entre  $I_n$  et  $I_{n-2}$ . En déduire que  $I_n$  est équivalente à  $I_{n-1}$

ii. Montrer que la suite  $nI_n I_{n-1}$  est constante. En déduire un équivalent de  $I_n$

iii. Calculer la limite quand  $n$  tend vers l'infini de  $\int_0^{\sqrt{n}} (1 - \frac{x^2}{n})^n dx$

iv. en admettant qu'on peut permuter la limite et l'intégrale, en déduire  $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$