Lissage par moyennes mobiles d'ordre 3 et marche aléatoire.

Etude à l'aide de suites récurrentes, fonctions génératrices, séries de Fourier, ...

1 Lissages de séries chronologiques par moyenne mobile

En statistiques on a l'habitude de régulariser une série chronologique pour mieux interpréter les données et réduire les fluctuations. Soit $(x_i)_{i=0}^{N+1}$ une série chronologique (i représente le temps). On construit une nouvelle série $(y_j)_{j=1}^{N}$ par moyenne mobile d'ordre 3 à l'aide de la formule suivante pour $1 \leq j \leq N$: $y_j := \dfrac{x_{j-1}+x_j+x_{j+1}}{3}$. Si cette nouvelle série n'est pas assez régulière on peut itérer le procédé.

1. Calculez $\overline{y} := \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{j=1}^{N} y_j$ en fonction de $\overline{x} := \dfrac{1}{N+2}\displaystyle\sum_{i=0}^{N+1} x_i$ et des termes de bords: x_0, x_1, x_N, x_{N+1}.

2. Comparez $Var(y)$ et $Var(x)$. Commencer par le cas où $\overline{x} = 0 = \overline{y}$, remarquer que $\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^2 \leq \dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}$.

2 Suites lissées

Pour simplifier l'étude du lissage, on élimine les termes de bords en considérant des suites indicées dans $\mathbb{Z}$. Soit

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{M}: & \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} & \to & \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} \\ & u=(u_n)_{n\in\mathbb{Z}} & \mapsto & v=(v_n)_{n\in\mathbb{Z}} \quad \text{avec} \quad v_n := \dfrac{u_{n-1}+u_n+u_{n+1}}{3} \end{array}$$

1. On note $l^\infty(\mathbb{Z})$ l'ensemble des suites bornées de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$. On muni $l^\infty(\mathbb{Z})$ de sa norme naturelle: $\|u\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{Z}} |u_n|$.

   (a) Vérifiez que $\mathcal{M}$ est un endomorphisme continue de $l^\infty(\mathbb{Z})$. Calculer $|||\mathcal{M}|||_\infty := \sup_{u\in l^\infty(\mathbb{Z})-\{0\}} \dfrac{\|\mathcal{M}(u)\|_\infty}{\|u\|_\infty}$.

   (b) Donnez une condition nécessaire et suffisante sur u pour que $\|\mathcal{M}(u)\|_\infty = \|u\|_\infty$.

2. Soit $p > 3$. On note $l_p^2(\mathbb{Z})$ l'ensemble des suites de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ p-périodiques: $u \in l_p^2(\mathbb{Z}) \Longleftrightarrow u_{n+p} = u_n$ pour tout n. On notera $\langle u, v\rangle_p := \dfrac{1}{p}\displaystyle\sum_{n=1}^{p} u_n\overline{v_n}$, $\|u\|_{2,p} := \sqrt{\langle u,u\rangle_p}$ et $\langle u\rangle_p := \langle u, 1\rangle_p$.

   (a) Montrez que $\langle u, v\rangle_p$ munie $l_p^2(\mathbb{Z})$ d'une structure hermitienne. Donnez une base orthogonale et dim $l_p^2(\mathbb{Z})$.

   (b) Vérifiez que $\mathcal{M}$, restreint à $l_p^2(\mathbb{Z})$, est un endomorphisme symétrique de $l_p^2(\mathbb{Z})$, en général ni défini, ni positif.

   (c) Calculer $|||\mathcal{M}|||_2 := \sup_{u\in l_p^2(\mathbb{Z}), \langle u,u\rangle_p = 1} \|\mathcal{M}(u)\|_{2,p}$.

   (d) Montrez que la plus grande valeur propre en module de $\mathcal{M}$ sur $l_p^2(\mathbb{Z})$ est 1. Calculer la dimension de l'espace propre associé à la valeur propre 1 dans $l_p^2(\mathbb{Z})$.

   (e) En déduire que $\lim_{k\to+\infty} \mathcal{M}^k(u) = \langle u\rangle_p$, pour tout $u \in l_p^2(\mathbb{Z})$.

3. On note $l^2(\mathbb{Z})$ l'ensemble des suites de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ dont le carré des modules sont sommables: $u \in l^2(\mathbb{Z}) \Longleftrightarrow \sum_{n\in\mathbb{Z}} |u_n|^2$ converge. On note: $\langle u, v\rangle := \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n\overline{v_n}$, $\|u\|_2^2 := \langle u, u\rangle$.

   (a) Vérifiez que $\langle u, v\rangle$ est un produit scalaire sur $l^2(\mathbb{Z})$ qui le muni d'une structure hilbertienne.

   (b) Montrez que $\|\mathcal{M}(u)\|_2 \leq \|\ u\|_2$. A quelle condition a-t-on l'égalité?

   (c) Conjecturer la $\lim_{k\to+\infty} \mathcal{M}^k(u)$ pour tout $u \in l^2(\mathbb{Z})$.

4. Pour $u \in l_p^2(\mathbb{Z})$, on note $\overline{u} := \langle u \rangle_p$ et $Var(u) := \overline{(u-\overline{u})^2}$.

   (a) Démontrez et commentez cette égalité: $\overline{\mathcal{M}(u)} = \overline{u}$.

   (b) Démontrez et commentez cette inégalité:$Var(\mathcal{M}(u)) \leq Var(u)$. Quand a-t-on égalité?

5. utilisation de modèle linéaire: En pratique, on peut considérer que la suite représente une échantillon bruité d'une fonction modèle f, i.e. $u_n = f(n\delta t) + \varepsilon_n$. Prenons $\delta t = 1$ sans perte de généralité et, pour simplifier, le bruit $(\varepsilon_n)_n \in l_p^2(\mathbb{Z})$ de moyenne nulle: $\overline{\varepsilon} = 0$. On se propose de voir sur quelques exemples dans quelle mesure le lissage affecte la fonction modèle. On notera $v := \mathcal{M}(u)$

   (a) modèle linéaire: $f(x) := ax + b$, vérifiez que $v_n = f(n) + \eta_n$, avec, $\eta \in l_p^2(\mathbb{Z})$, $\overline{\eta} = 0$, $Var(\eta) \leq Var(\varepsilon)$.

   (b) modèle polynomiale: étudiez l'effet du lissage si $f(x) = ax^2 + bx + c, ax^3 + bx^2 + cx + d$ ou un polynme.

   (c) modèle de croissance exponentielle: Commentez l'intért de ce lissage si $f(x) = \exp(x)$.

3 Marche aléatoire

On se promène aléatoirement sur $\mathbb{Z}$. On note X_n l'entier relatif qui représente notre position à l'étape n. En moyennne, une fois sur trois on avance d'une unité, une fois sur trois on recule d'une unité, une fois sur trois on ne bouge pas. On suppose que l'on part de de 0. Pour $k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ on note $p_n^k = P(X_n = k)$.

1. Expliquez pourquoi, $p_0^0 = 1$, $\sum_{k\in\mathbb{Z}} p_k^n = 1$ pour tout n.
2. Calculez la loi de X_1, X_2, X_3.
3. Trouvez une relation de récurrence pour calculer p_k^n.
4. Fonctions génératrices: $G_n(t) = E(t^{X_n}), t \neq 0$.
   (a) Calculez G_0, G_1, G_2, G_3.
   (b) Trouvez une relation de récurrence entre G_{n+1} et G_n
   (c) Calculez explicitement G_n.
   (d) En déduire une nouvelle expression de p_k^n.
5. Fonctions caractéristiques: $\varphi_n(t) = E(\exp(itX_n)), i^2 = -1$.
   (a) Calculez $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$.
   (b) Trouvez une relation de récurrence entre φ_{n+1} et φ_n
   (c) Calculez explicitement φ_n.
   (d) En déduire une nouvelle expression de p_k^n.
   (e) Montrez que $\lim_{n\to+\infty} p_k^n = 0$.Conclure.
6. Méthode de Laplace: $I_n := \int_0^1 b(t)\exp(na(t))dt$,
   $a, b \in C^3$, $b(0) = \beta \neq 0$, $a(0) = 0, a'(0) = 0, a''(0) = -2\alpha \neq 0$ et $a'(t) < 0$ pour tout $t \in]0, 1]$.
   On va montrer que $I_n \sim b(0)\sqrt{\frac{\pi}{-2a''(0)n}}$
   (a) Expliquez pourquoi $\alpha > 0$.
   (b) Vérifiez que $a(t) = -\alpha t^2 + O(t^3)$ en 0.
   (c) Soit $1 > \varepsilon > 0$ fixé, montrez que $I_n \sim \int_0^\varepsilon b(t)\exp(na(t))dt$.
   (d) Soit $t_n = n^{-1/2+\delta}$, pour $1/6 > \delta > 0$. Vérifiez que $nt_n^2 \to +\infty$ et $nt_n^3 \to 0$.
   En déduire que $I_n \sim \beta \int_0^{t_n} \exp(na(t))dt \sim \beta \int_0^{t_n} \exp(-n\alpha t^2)dt$.
   (e) En rappelant la valeur de $\int_0^{+\infty} \exp(-\alpha x^2)dx$, trouvez l'équivalent de I_n.
   (f) En déduire que, pour tout k, p_k^n est en $O(1/\sqrt{n})$ quand $n \to +\infty$.

4 Lissage de fonctions

Notations: Pour $T > 0$, on note $C^0_{T\#}$ l'espace des fonctions de $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ périodique de période T; et $C^1_{T\#} = C^0_{T\#} \cap C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Pour $k \in \mathbb{Z}$, on note: $e_k(x) := exp(2ik\pi x)$ où $i^2 = -1$, $\langle f, g\rangle := \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}dx$, $\langle f\rangle := \langle f, 1\rangle$, $\|f\|_2^2 := \langle f, f\rangle$, $c_k[f] := \langle f, e_k\rangle$. Soit $0 < h < 1$, on considère l'opérateur:

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{M}: & C^0_{1\#} & \to & C^0_{1\#} \\ & f & \mapsto & g \quad \text{avec} \quad g(x) := \dfrac{f(x-h)+f(x)+f(x+h)}{3} \end{array}$$

1. Vérifiez que $\mathcal{M}$, restreint à $C^0_{1\#}$, est un endomorphisme symétrique de $C^0_{1\#}$.
2. Montrez que $\mathcal{M}(e_k) = \lambda_k e_k$ où λ_k est un réel que l'on encadrera.
3. En déduire que $\mathcal{M}(f) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} \lambda_k c_k[f] e_k$, d'abord pour $f \in C^1_{1\#}$ puis aussi pour $f \in C^0_{1\#}$.
4. On vérifie que $\mathcal{M}^\infty(f) := \lim_{n\to+\infty} \mathcal{M}^n(f)$ est bien définie pour tout $f \in C^0_{1\#}$.
   (a) Montrez que si $h \notin \mathbb{Q}$ alors $\mathcal{M}^\infty(f) = \langle f\rangle$.
   (b) En revanche, si $h = \dfrac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N} - \{0\}$, $pgcd(p, q) = 1$, alors, démontrez que $\mathcal{M}^\infty$ est le projecteur orthogonal de $C^0_{1\#}$ sur $C^0_{1/q\#}$.

5 Un modèle probabiliste pour l'étude du lissage par moyenne mobile

On suppose qu'une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de variable aléatoire satisfait, $X_n = an+b+\varepsilon_n$, pour tout n, où le "bruit" $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une famille de v.a. indépendantes de moyenne nulle et de variance $\sigma^2 > 0$. Soit $m \in \mathbb{N} - \{0\}$, on se donne $2m+1$ réels positifs: $(\alpha_k)_{k=-m}^m$ dont la somme est égale à 1. On considère le lissage suivant $Y_n := \sum_{k=-m}^m \alpha_k X_{n+k}$ pour tout n.

On note $s := \sum_{k=-m}^m k\alpha_k$.

1. Vérifiez que le lissage préserve le modèle linéaire bruité, i.e.: $Y_n = an + b + as + \eta_n, E(\eta_n) = 0, \forall n$. Et montrez que $\tau^2 := Var(\eta_n) = \sigma^2 \sum_{k=-m}^m \alpha_k^2 \leq Var(\varepsilon_n)$.
2. On va chercher à réduire au maximum la variance. Pour cela, on peut se ramener à une fonction de $2m$ variables: $f(\alpha_{-m}, \cdots, \alpha_0, \cdots, \alpha_{m-1}) := \sum_{k=-m}^m \alpha_k^2$ sachant que $\sum_{k=-m}^m \alpha_k = 1$.

   Pour résoudre ce problème d'optimisation avec contrainte, proposez une élégante, simple, et rapide solution géométrique ou, tentez les calculs algébriques suivants:
   (a) Vérifiez que que f n'admet qu'un extrémum local lorsque tous les coefficients sont égaux.
   (b) Calculez la Hessienne de f, en déduire que l'on a un minimum global stricte et conclure le problème de réduction de la variance. On pourra utilser la matrice de projecteur: $P \in M_{2m}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à $1/(2m)$.

6 Lissages répétés d'un bruit blanc par moyenne mobile

Soit une suite $(X^0_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ de variables aléatoires indépendantes d'espérance nulle et de variance commune $\sigma^2 > 0$.

A chaque étape $n+1$ on effectue le lissage:

$$X^{n+1}_k = \frac{X^n_{k-1} + X^n_k + X^n_{k+1}}{3}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

1. Calculez $E(X_k^n)$ pour tout n et tout k.

2. Calculez la variance de X_k^1, $k \in \mathbb{Z}$.

3. Montrez que $X_k^n = \sum_{j \in \mathbb{Z}} p_j^n X_{k+j}^0$,

   où $p_k^{n+1} = \frac{p_{k-1}^n + p_k^n + p_{k+1}^n}{3}$, et $p_0^0 := 1$, $p_k^0 = 0$ pour tout $k \neq 0$.

   On pourra vérifier que $\left(\frac{1+2\cos(t)}{3}\right)^n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k^n \exp(ikt) = p_0^n + 2\sum_{k=1}^{n} p_k^n \cos(kt)$.

4. En déduire la variance des X_k^n.

5. Montrez que $\sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(p_j^n\right)^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(\frac{1+2\cos(t)}{3}\right)^{2n} dt$.

6. En déduire que $\lim_{n \to +\infty} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(p_j^n\right)^2 = 0$.

7. Conclure

7 Indications de solutions

Si vous trouvez des fautes de frappe ou, si vous avez des remarques, n'hésitez pas à me les envoyer par email à l'adresse suivante: **junca@unice.fr** .
Merci d'avance pour votre collaboration.

7.1 Lissages de séries chronologique par moyenne mobile

1. $$\overline{y} := \frac{N+2}{N}\overline{x} - \frac{2x_0 + x_1 + x_N + 2x_{N+1}}{3N} = \overline{x} + \mathrm{O}(1/N),$$
   si, pour le dernier terme, la srie est borne et $N \to +\infty$.

   Tous les termes x_i apparaissent trois fois dans le calcul de $\overline{y}$ sauf x_0 une fois, x_1 2 fois, x_N 2 fois, x_{N+1} une fois.

   $N \to +\infty$ et (x_i) bornée alors $\overline{x} \simeq \overline{x}$

2. $Var(y) \leq \frac{N+2}{N} Var(x)$.

   Si $\overline{x} = 0 = \overline{y}$ alors, $Var(x) = \overline{x^2}$, $Var(y) = \overline{y^2}$ par la formule de Koenig. Or $x \mapsto x^2$ est convexe donc $\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 \leq \frac{a^2+b^2+c^2}{3}$, donc $Var(y) \leq \frac{N+2}{N} Var(x)$. idem si $\overline{x} = \overline{y}$

   Dans le cas général, $\overline{x} \neq \overline{y}$ une translation ne change pas la variance. On se ramène au cas où $\overline{y} = 0$ en changeant y par $Y := y - \overline{y}$ et $Var(Y) = Var(y)$. On a ainsi changé x par $X := x - \overline{y}$ et $Var(X) = Var(x)$. Mais $\overline{X} \neq 0$ en général. Donc, $Var(Y) = \overline{Y^2} \leq \frac{N+2}{N}\overline{X^2} = \frac{N+2}{N}\left(Var(X) + \overline{X}^2\right)$, i.e.

   $$Var(y) \leq \frac{N+2}{N}\left(Var(x) + (\overline{x} - \overline{y})^2\right) = Var(x) + \mathrm{O}(1/N).$$

   ... Dommage il faut faire un calcul exact ou avoir un contre-exemple qui augmente la variance à cause des termes de bords. $x_i = 0$ à l'intérieur (ainsi (x_i) et (y_j) ne varie pas à l'intérieur mais ...) et bien choisi au bord.

   On peut avoir une légère augmentation de la variance quand l'ingalit de convexit est presque une ingalit et que l'on conserve une moyenne nulle. Ainsi, par exemple, il suffit de discrtiser assez finiement sin sur $[0, 2\pi]$: $x_k := \sin(2\pi \times k/(N+1))$, $N = 30$, pour augmenter légèrement la variance.

7.2 Suites lissées

1. (a) $|||\mathcal{M}|||_\infty := 1$.
   (b) Une condition suffisante sur u pour que $\|\mathcal{M}(u)\|_\infty = \|u\|_\infty$:
   (**C**) Trois termes consécutifs égaux de module égale à $\|u\|_\infty$.

   En effet, vérifiez que $\left|\frac{a+b+c}{3}\right|^2 = \frac{|a|^2+|b|^2+|c|^2}{3}$ si et seulement si $a = b = c$.

   Mais la concition (**C**) n'est pas nécessaire (difficile). A l'aide d'argument de compacité et de stricte convexité, on peut montrer que $\|\mathcal{M}(u)\|_\infty = \|u\|_\infty$ si et seulement si il existe un nombre $\overline{u} \in \mathbb{C}$ et une suite d'entiers relatifs $(n(k))_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $|\overline{u}| = \|u\|_\infty$, $\overline{u} = \lim_{k\to\infty} u_{n(k)} = \lim_{k\to\infty} u_{-1+n(k)} = \lim_{k\to\infty} u_{+1+n(k)}$.

2. $l^2_p(\mathbb{Z})$
   (a) $\dim l^2_p(\mathbb{Z}) := 1$,
   une base orthogonale: base canonique ou $(\exp(2ik\pi n))_n$, $k = 0, 1, \cdots, p-1$.
   (b) Pour montrer la symétrie de $\mathcal{M}$ il suffit de montrer que $\langle \mathcal{M}u, v\rangle = \langle u, \mathcal{M}v\rangle$ ou, d'écrire explicitement une matrice de $\mathcal{M}$ dans une base orthogonale.
   remarques: si p est pair $\mathcal{M}((-1)^n) = -1/3\times(-1)^n$, si 3 divise p, $\mathcal{M}(j^n) = 0 = \mathcal{M}(\overline{j}^n)$ avec $1 \neq j, j^3 = 1$.
   (c) $|||\mathcal{M}|||_2 := 1$.

(d) Suite récurrente d'ordre 2, équation caractéristique: $\frac{1+\lambda+\lambda^2}{3} = \lambda \ldots$
$\lambda = 1$ on a $u_n = 1$ ou n mais n n'est pas périodique.
On voit aussi que -1 n'est pas valeur propre, car les suites non identiquement nulles vérifiant $u_{n-1} + u_n + u_{n+1} = -3u_n$ sont des suites géométriques et non périodiques.

(e) $\lim_{k\to+\infty} \mathcal{M}^k(u) = \langle u \rangle_p$, pour tout $u \in l^2_p(\mathbb{Z})$.

3. $l^2(\mathbb{Z})$

(a) Complet

(b) $\|\mathcal{M}(u)\|_2 \leq \| u\|_2$. On a l'égalité si u est constante par un argument de stricte convexité. Comme u appartient à l^2, on a donc nécessairement $u \equiv 0$.

(c) $\lim_{k\to+\infty} \mathcal{M}^k(u) = 0$ Moyenne de Césaro g énéraliser. Cela peut se démontrer au moins ponctuellemnt à l'aide d'argument de stricte convexité et de compacité (difficile). Plus simplement, on verra une démonstration élémentaire utilisant des séries de Fourier.

4. Pour $u \in l^2_p(\mathbb{Z})$, on note $\overline{u} := \langle u \rangle_p$ et $Var(u) := \overline{(u - \overline{u})^2}$.

(a) $\overline{\mathcal{M}(u)} = \overline{u}$.

(b) $Var(\mathcal{M}(u)) \leq Var(u)$. On a égalité pour les suites constantes.

5. utilisation de modèle linéaire: $u_n = f(n) + \varepsilon_n$. $v := \mathcal{M}(u)$

(a) modèle linéaire: linéarité

(b) modèle polynomiale: $\mathcal{M}(n^2) = n^2 + 2/3$ translation verticale.
$\mathcal{M}(n^3) = n^3 + 2n$ et pour les polynme on garde les deux premières plus randes puissantes. Ok en équivalent ou erreur relative ou ordre de grandeur mais pas en erreur absolue

(c) modèle de croissance exponentielle: $f(x) = \exp(x)$ suite géoémtrique $\mathcal{M}(\rho^n) = (\rho^{-1} + 1 + \rho)/3\rho^n$, pire, on perd la précision relative mais $v_{n+1}/v_n \simeq u_{n+1}/u_n$.

7.3 Marche aléatoire

$P(X_{n+1} = X_n) = P(X_{n+1} = X_n + 1) = P(X_{n+1} = X_n - 1) = 1/3$. et $P(X_0 = 0) = 1$.

1. $1 = P(X_0 = 0) = p^0_0 = 1$, $\sum_{k\in\mathbb{Z}} p^n_k = 1$ pour tout n car c'est la loi de X_n.

2. On peut faire des arbres et dénombrer: loi de X_1: $p^1_{-1} = p^1_0 = p^1_1 = 1/3$,
loi de X_2: $p^2_{-2} = 1/9, p^2_{-1} = 2/9, p^2_0 = 3/9 = 1/3, p^2_1 = 2/9, p^2_2 = 1/9$,
loi de X_3:$p^3_3 = p^3_{-3} = 1/27, p^3_2 = p^3_{-2} = 3/27, p^3_1 = p^3_{-1} = 6/27, p^3_0 = 7/27$.

3. $p^{n+1}_k = \frac{p^n_{k-1} + p^n_k + p^n_{k+1}}{3}$.
Explication: Soit $(Y_n)_n$ une suite de variables indépendantes suivant la loi uniforme sur $\{-1, 0, 1\}$. On a $X_0 = 1$ et $X_{n+1} = X_n + Y_n = Y_0 + \cdots + Y_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme l'événement
$\{X_{n+1} = k\} = \{X_n = k - 1 \text{ et } Y_n = 1\} \cup \{X_n = k \text{ et } Y_n = 0\} \cup \{X_n = k + 1 \text{ et } Y_n = -1\}$, et que X_n et Y_n sont indépendants, on obtient la formule de récurrence à l'aide de la formule des probabilités totales.

4. Fonctions génératrices: $G_n(t) = E(t^{X_n}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} p^n_k t^k, t \neq 0$.

(a) $G_0(t) = 1, G_1(t) = (t^{-1} + 1 + t)/3, G_2(t) = (t^{-2} + 2t^{-1} + 3 + 2t + 2t^2)/9$,
$G_3(t) = (t^{-3} + 3t^{-2} + 6t^{-1} + 7 + 6t + 3t^2 + t^3)/27$.

(b) Par la formule de récurrence des (p^n_k) ou, à l'aide de l'espérance conditionnelle on a: $G_{n+1} = 1/3E(t^{-1+X_n}) + 1/3E(t^{0+X_n}) + 1/3E(t^{+1+X_n}) = G_1(t)G_n(t)$.

(c) $G_n(t) = 3^{-n}\left(t^{-1}+1+t\right)^n = 3^{-n}\sum_{k=-n}^{n}\nu_k^n t^k$, avec

$\nu_k^n = \sum_{(j_-,j_0,j_+)\in J_k^n}\frac{n!}{j_-!j_0!j_+!}$ et $J_k^n := \{(j_-,j_0,j_+)\in\{0,1,\cdots,n\}, j_-+j_0+j_+=n, j_+-j_-=k\}$.

Pour n fixé, on a pour le plus grand des ν_k^n: $\nu_0^n = \sum_{0\le 2r\le n}\frac{n!}{(r!)^2(n-2r)!}$.

Il est bien sur plus simple d'utiliser une sorte de triangle de Pascal. $\nu_0^0=1$, $\nu_k^0=0$,si $k\neq 0$, puis $\nu_k^{n+1}=\nu_{k-1}^n+\nu_k^n+\nu_{k+1}^n$. On remarque que $\sum_{k=-n}^{n}\nu_k^n = 3^n$.

(d) Par unicité des coefficients (multiplier par t^n on a des polynômes) on a $p_k^n = \nu_k^n/3^n$.

5. Fonctions caractéristiques: $\varphi_n(t) = E(\exp(itX_n)), = \sum_{k\in\mathbb{Z}} p_k^n\exp(ikt)$.

(a) $\varphi_0(t)=1, \varphi_1(t)=(1+2\cos(t))/3, \varphi_2(t)=(3+4\cos(t)+2\cos(2t))/9$,
$\varphi_3(t)=(7+12\cos(t)+6\cos(2t)+2\cos(3t))/27$.

(b) idem: $\varphi_{n+1}=(e^{-ikt}+1+e^{ikt})/3\times\varphi_n(t)=\mu(t)\varphi_n(t)$, $\mu(t)=\phi_1(t)$.

(c) $\varphi_n(t)=\mu(t)^n=3^{-n}\sum_{k=0}^{n}C_n^k(\cos(kt))^k$. Cette deuxième formule est malheureusement de peu d'utilité.

(d) On calcul les coefficients de Fourier d'une fonction 2π périodique et paire:

$$p_0^n=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\mu(t)^n dt, \text{ et } p_k^n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\mu(t)^n\cos(kt)dt, \text{ si } k\neq 0.$$

(e) Comme $|\mu(t)|\le 1$ et $|\mu(t)|=1$ seulement pour $t=0$, on en déduit, en découpant l'intégrale sur $[0,\varepsilon[$ et $[\varepsilon,\pi]$ que que $\lim_{n\to+\infty}p_k^n=0$.

On remarque aussi que $p_k^n\le p_0^n$, mais comme μ change de signe, on ne le voie pas en majorant par la valeur absolue l'intégrale.

Conclure.

6. Méthode de Laplace: $I_n := \int_0^1 b(t)\exp(na(t))dt$,

$a,b\in C^3$, $b(0)=\beta\neq 0$, $a(0)=0, a'(0)=0, a''(0)=-2\alpha\neq 0$ et $a'(t)<0$ pour tout $t\in]0,1]$.

On va montrer que $I_n\sim\beta\sqrt{\frac{\pi}{-a''(0)n}}$

(a) $\alpha<0$ car sinon $a'(t)$ serait strictement positif prés de 0.

(b) DL: $a(t)=-\alpha t^2+O(t^3)$ en 0.

(c) $I_n=J_n+K_n$, $J_n:=\int_0^\varepsilon b(t)\exp(na(t))dt$.

Comme a est strictment décroissante, $K_n := \int_\varepsilon^1 b(t)\exp(na(t))dt$ vérifie: $|K_n|\le\|b\|_\infty\int_\varepsilon^1\exp(na(\varepsilon))dt\le\|b\|_\infty\exp(na(\varepsilon))$.

D'autre part, pour ε assez petit $|b(t)|\ge|\beta|/2>0$ sur $[1,\varepsilon]$. Ainsi, on a $|J_n|\ge|\beta|/2\int_0^{\varepsilon/2}\exp(na(t))dt\ge|\beta|/2\exp(na(\varepsilon/2)$. Donc,$K_n=o(J_n)$

remarque: si ε est trop grand, on prend ε' plus petit ...

(d) $t_n=n^{-1/2+\delta}$, pour $1/6>\delta>0$. $nt_n^2=n^{-2\delta}\to+\infty$ et $nt_n^3=n^{-1/2+3\delta}\to 0$.

Comme à la question précedente, on en déduit que $I_n\sim\int_0^{t_n}b(t)\exp(na(t))dt$.

Par continuité de b en 0, si l'on se fixe $\eta>0$, il existe $\alpha>0$, tel que $1-\eta<b(t)/\beta<1+\eta$ sur $[0,\alpha]$.

En faisant le rapport de deux intégrales non nulles on en déduit que: $I_n\sim\beta\int_0^{t_n}\exp(na(t))dt$.

Maintenant, on écrit que $\exp(na(t))=\exp(-n\alpha t^2)\times\exp(\mathrm{O}(nt_n^3))$ sur $[0,t_n]$, on en déduit, comme précédemment que: $I_n\sim\beta\int_0^{t_n}\exp(-n\alpha t^2)dt$.

(e) de la loi normale centré réduite on a : $2\int_0^{+\infty}\exp(-x^2/2)dx = \sqrt{2\pi}$, i.e. $\int_0^{+\infty}\exp(-x^2)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, $(y = x/\sqrt{2})$ i.e. $\int_0^{+\infty}\exp(-\alpha x^2)dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$, avec $s = \sqrt{\alpha}x$.

(f) On écrit $\mu(t) = \exp(a(t))$, on fait le DL de $a(.)$ en 0 ... Ainsi, pour tout k, p_k^n est en $O(1/\sqrt{n})$ quand $n \to +\infty$.

7.4 Lissage de fonctions

1. $\mathcal{M}(e_k) = \lambda_k e_k$ $\lambda_k := \frac{1+2\cos(2\pi kh)}{3} \in \left[-\frac{1}{3}, 1\right]$

2. $\mathcal{M}(f) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} \lambda_k c_k[f] e_k$, d'abord pour $f \in C^1_{1\#}$ en utilisant par exemple de la convergence normale, ou, plus simplement, en écrivant $\mathcal{M}(f)$ comme la somme de trois termes et en remarquant que $c_k[\mathcal{M}f] = \langle \mathcal{M}f, e_k\rangle = \langle f, \mathcal{M}e_k\rangle = \overline{\lambda}_k \langle \mathcal{M}f, e_k\rangle \lambda_k c_k[f]$.
On l'a aussi pour $f \in C^0_{1\#}$ en calculant les coeficients de Fourier de $\mathcal{M}(f)$ par la formule intégrale de Fourier. Dans ce cas la convergence de la série est à comprendre en moyenne quadratique (corollaire du théorème de Parseval).
remarque: On vérifie aisément que $\|\mathcal{M}f\|_\infty \le \|\mathcal{M}f\|_\infty$, $\|\mathcal{M}f\|_2 \le \|\mathcal{M}f\|_2$.

3. (a) $\dim(\ker(\mathcal{M} - id)) = 1$ ... si $h \notin \mathbb{Q}$ $\mathcal{M}^\infty(f) = \langle f\rangle$.
   (b) $h = \frac{p}{q}$, $\lambda_k = 1 \iff \cos(2k\pi p/q) = 1 \iff k \in q\mathbb{Z}$ donc $\mathcal{M}^\infty(f) = \sum_{k\in q\mathbb{Z}} c_k[f] e_k$,
   exemple numérique. A voir un exemple qui fait apparaître des oscillations.
   alors $\mathcal{M}^\infty$ est le projecteur orthogonal de $C^0_{1\#}$ sur $C^0_{1/q\#}$ car les e_k sont $\perp$.
   remarque: On vérifie que $\mathcal{M}(g) = g$ si g est h périodique mais comme g est de période 1, h doit être rationnel.

7.5 Un modèle probabiliste pour l'étude du lissage par moyenne mobile

1.

2. $f(\alpha_{-m}, \cdots, \alpha_0, \cdots, \alpha_{m-1}) := \left(\sum_{k=-m}^{m-1} \alpha_k^2\right) + \left(1 - \sum_{k=-m}^{m-1} \alpha_k\right)^2$
   Solution géométrique: f est strictment convexe sur $\mathbb{R}^{2m+1}$ et coercive i.e.: $\lim_\infty f = +\infty$. Donc f est aussi strictment convexe et coercive sur l'hyperplan H_1 d'équation $\sum_{k=-m}^{m} \alpha_k = 1$. Ainsi, f atteint en un seul point A son unique minimum (qui est global) sur H_1. Or l'expression de f ainsi que l'équation de H_1 est invariant par toutes permuations des coordonnées. Il en va donc de mme des coordonnées de A. Ainsi toutes les coordonnées de A sont identiques par unicité du point où f atteint son minimum. CQFD

   (a) Pour $-m \le j < m$: $\frac{\partial f}{\partial \alpha_j} = 2\alpha_j - 2\left(1 - \sum_{k=-m}^{m-1} \alpha_k\right)$ donc $\frac{\partial f}{\partial \alpha_j} = 0 \iff \alpha_j = \left(1 - \sum_{k=-m}^{m-1} \alpha_k\right)$ et les α_j sont égaux pour $-m \le j < m$ et on déduit que α_m est aussi égale à $1/(2m+1)$

   (b) $P := \frac{1}{2m}\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$, $P^2 = P$, donc ses valeurs propres sont 0 et 1. P est de rang 1 donc 1 est de multiplicité 1.
   f est quadratique donc la Hessienne H est constante et $H = 2Id + 4mP$ donc $\mathcal{S}(H) = \{2, 2+4m\}$ donc $H > 0$ CQFD.
   Finalement $\tau = \frac{\sigma}{\sqrt{2m+1}}$

7.6 Lissage répété d'un bruit blanc par moyenne mobile

Cette exercice utilise les notations et les résultats de l'exercice 3.

Soit une suite $(X_k^0)_{k\in\mathbb{Z}}$ de variables aléatoires indépendantes d'espérance nulle et de variance commune $\sigma^2 > 0$. A chaque étape $n+1$ on effectue le lissage:

$$X_k^{n+1} = \frac{X_{k-1}^n + X_k^n + X_{k+1}^n}{3}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

1. $Var(X_k^1) = \sigma^2/3$, $k \in \mathbb{Z}$.
2.
3. Par récurrence on a $X_k^n = \sum_{j\in\mathbb{Z}} p_j^n X_{k+j}^0$.
4. $VarX_k^n = \left(\sum_j (p_j^n)^2\right)\sigma^2$.
5. $\sum_{j\in\mathbb{Z}} \left(p_j^n\right)^2 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left(\frac{1+2\cos(t)}{3}\right)^{2n} dt$, appliquer le théorème de Parseval sur $\mu(t) := \frac{1+2\cos(t)}{3}$ et les résultats de l'exercice sur la marche aléatoire.
6. $\lim_{n\to+\infty} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \left(p_j^n\right)^2 = 0$ en écrivant $\int_0^\pi \cdots = \int_0^\varepsilon \cdots \int_\varepsilon^\pi \cdots$.
7. Ainsi $VarX_k^n = VarX_0^n \to 0$ quand $n \to +\infty$, donc, à l'aide de l'inégalité de Tchebycheff, on en conclut que : X_k^n converge, uniformément par rapport à k, *en probabilité* vers 0 quand $n \to \infty$.