Suites récurrentes et et population de coccinelles

1 Enoncé

On sait tous qu'il y a des années à coccinelles et d'autres sans!

On se propose d'étudier l'évolution d'une population de coccinelles à l'aide d'un modèle utilisant la fonction numérique f définie par $f(x) = kx(1-x)$, k étant un paramètre qui dépend de l'environnement ($k \in \mathbb{R}$).

Dans le modèle choisi, on admet que le nombre de coccinelles reste inférieur à un million. L'effectif des coccinelles, exprimé en millions d'individus, est approché pour l'année n par un nombre réel u_n, avec u_n compris entre 0 et 1. Par exemple, si pour l'année zéro il y a 300000 coccinelles, on prendra $u_0 = 0,3$.

On admet que l'évolution d'une année sur l'autre obéit à la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, f étant la fonction définie ci-dessus.

Le but de l'exercice est d'étudier le comportement de la suite (u_n) pour différentes valeurs de la population initiale u_0 et du paramètre k.

1. Démontrer que si la suite (u_n) converge, alors sa limite l vérifie la relation $f(l) = l$.
2. Supposons $u_0 = 0,4$ et $k = 1$.
   (a) Etudier le sens de variation de la suite (u_n).
   (b) Montrer par récurrence que, pour tout entier n, $0 \leq u_n \leq 1$.
   (c) La suite (u_n) est-elle convergente? Si oui, quelle est sa limite?
   (d) Que peut-on dire de l'évolution à long terme de la population de coccinelles avec ces hypothèses?
3. Supposons maintenant que $u_0 = 0,3$ et $k = 1,8$.
   (a) Etudier les variations de f sur $[0,1]$ et montrer que $f\left(\frac{1}{2}\right) \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.
   (b) En utilisant éventuellement un raisonnement par récurrence,
   - montrer que, pour tout entier n, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$;
   - établir que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \geq u_n$.

   (c) La suite (u_n) est-elle convergente? Si oui, quelle est sa limite?
   (d) Que peut-on dire de l'évolution à long terme de la population de coccinelles avec ces hypothèses?
4. A l'aide de la calculatrice, formuler un conjecture sur l'évolution de la population au cas où $u_0 = 0,8$ et $k = 3,2$.

2 Travail demandé au candidat

1. Expliquez pourquoi cette exercice est adapté aux élèves de TS.
2. Proposez une modification de l'énoncé pour que le comportement de la suite récurrente soit différent.
3. On pourra justifier mathématiquement le cas $k = 4$, en considérant la suite $u_n = (\sin(\theta_n))^2$.
4. Expliquez pourquoi $k \in [0,4]$?
5. Donnez une liste de comportements possibles de ce genre de suite suivant les valeurs de k.
6. Proposez d'autres types d'énoncés pour faire travailler les élèves sur ce thème.

source: Série Accompagnement des programmes, 2004, Enseignement obligatoire, exercices pour la série S,