Calcul de racines carrées

1 Enoncé

Soit a un nombre réel strictement supérieur à 1, f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - a$ et $G[f]$ le graphe de f.

1. Soit $M_x = (x, f(x))$ un point de $G[f]$. Déterminer l'équation de la tangente T_x en M_x à $G[f]$. On suppose $x \neq 0$. Montrer que le point d'intersection de T_x et de l'axe des x a pour abscisse $\frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{2}\right)$.

   On considère la fonction g définie pour $x \neq 0$ par $g(x) := \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{2}\right)$ et on définit une suite (u_n) par la donnée de sa valeur initiale $u_0 > \sqrt{a}$ et par la formule $u_{n+1} = g(u_n)$ pour $n \geq 0$.

2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante minorée (on pourra calculer $u_{n+1} - \sqrt{a}$ en fonction de $u_n - \sqrt{a}$). Conclure sur la limite de la suite (u_n).

3. On suppose que $\sqrt{a} < u_0 < \sqrt{a}$. Montrer, pour $n \geq 0$, l'inégalité $u_{n+1} - \sqrt{a} \leq \frac{1}{2}(u_n - \sqrt{a})$.

   En déduire l'inégalité: $u_{n+1} - \sqrt{a} \leq \frac{1}{2^n}(u_0 - \sqrt{a})$.

4. On suppose $a = 2$ et $u_0 = 2$. Pour quel entier n_0 est-on sûr d'avoir $u_n - \sqrt{a} \leq 10^{-8}$ pour $n \geq n_0$?
   Programmer ou tabuler la suite (u_n) sur une calculatrice. Que constate-t'on?

2 Travail demandé au candidat

1. Indiquer l'objectif de l'exercice, la nature de la méthode et les différents outils utilisés ainsi que le (ou les) niveaux au(x)quel(s) s'adresse cet énoncé et les difficultés qu'il peut présenter pour des élèves.

2. Discuter la majoration de l'erreur obtenue en 3. et proposer éventuellement une modification du texte visant à l'améliorer.

3. Indiquer quelle(s) question(s) on pourrait poser à des élèves pour rendre plus concrète l'étude de la suite (u_n) et leur permettre de formuler des conjectures concernant sa monotonie et sa convergence.

4. Proposer un autre exercice utilisant une autre méthode pour calculer $\sqrt{2}$ ou une autre racine carrée.

source: sujet issu de la préparation au CAPES d'Orsay 2004.