Suites divergentes.

1 Exercice proposé au candidat: $u_{n+1} = 1 - u_n^2$, $u_0 \in [0,1]$.

1. Montrez que $u_n \in [0,1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. A l'aide de votre calculatrice, calculez de nombreuses valeurs de u_n avec les conditions initiales suivantes:
   - $u_0 = 0$,
   - $u_0 = 1$,
   - $u_0 = l$, où l est l'unique racine positive de l'équation $f(x) = x$ avec $f(x) = 1 - x^2$.
   - $u_0 \in]0,l[\cup]l,1[$.
3. Tracez le graphe de f pour $x \in [0,1]$. Vérifiez que $f([0,l[) =]l,1]$ et que $f(]l,1]) = [0,l[$.
4. Soit $g(x) = f(f(x))$ et $v_{n+1} = g(v_n)$, $v_0 \in [0,1]$.
   (a) Résoudre $g(x) = 0$ pour $x \in \mathbb{R}$.
   (b) En déduire une factorisation de g de la forme $x(x-l)(x-1)(x-m)$.
   (c) Tracez le graphe de g pour $x \in [0,1]$.
   (d) Etudiez le conportement de $(v_n)_n$ suivant que $v_0 \in [0,l[$, $v_0 = l$, $v_0 \in]l,1]$.
5. Si $u_0 \in]0,l[$, montrez à l'aide de la suite $(v_n)_n$ que $\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = 0$ puis, que $\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = 1$.
6. Conclure l'étude de $(u_n)_n$.

2 Le travail demandé au candidat

En aucun cas le candidat ne doit rédiger surs sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totatlité lors de l'entretien avec le jury.

Pendant sa préparation le candidat traitera les question suivantes:

1. Chercher les objectifs de l'exercice, la nature de la méthode et les différents outils utilisés ainsi que le (ou les) niveaux au(x)quel(s) s'adresse cet énoncé et les difficultés qu'il peut présenter pour des élèves.
2. Faut-il ajouter des indications à cet énoncé pour le traiter en TS.
3. Peut-on dire que pour la calculatrice la suite $(u_n)_n$ diverge toujours?
4. Pourquoi $(u_{2n})_n$ converge-t-elle si vite?
5. Connaissez vous des exemples de suites récurrentes divergentes traitées en TS?

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera;

- sa réponse à la question 1,
- plusieurs énoncés d'exercices se rapportant au thème des suites récurrentes divergentes.