Calcul approché de π à l'aide de la méthode de Monte-Carlo.

1 Enoncé

On considère une vecteur aléatoire M de coordonnées (X,Y) tels que X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$. On simulera un telle vecteur en appuyant deux fois sur la touche "nombre aléatoire de $[0,1]$" de votre calculatrice.

On dira que M suit la loi uniforme sur le carré $C=[0,1]\times[0,1]$. Un objectif de l'exercice est de montrer sur des exemples que, si A est une partie de C ayant une aire notée $\text{Aire}(A)$ alors:

$$P(M\in A)=\text{Aire}(A) \qquad \text{pour } A\subset C=[0,1]\times[0,1]. \tag{1}$$

1. Calculer $P(X\leq\frac{1}{2} \text{ et } Y\leq\frac{1}{2})$ et comparer au résultat de l'assertion (1).

2. Calculer $P(M\in[a,b]\times[c,d])$ où $[a,b]\times[c,d]$ est un rectangle contenu dans le carré C.

3. Dans cette question, on note T le triangle de sommets $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$. On va montrer que $P(X\leq Y)=P(M\in T)=\text{aire}(T)$. Pour cela, soit $N>0$, $h=\dfrac{1}{N}$,$x_k=kh$, $y_k=kh$, on pose:
   $r_k:=[x_{k-1},x_k]\times[0,y_{k-1}]$, $R_k:=[x_{k-1},x_k]\times[0,y_k]$, $d_k:=[x_{k-1},x_k]\times[y_{k-1},y_k]$,
   $I_N:=r_1\cup r_2\cup\cdots\cup r_N$, $S_N:=R_1\cup R_2\cup\cdots\cup R_N$, $D_N:=d_1\cup d_2\cup\cdots\cup d_N$.

   (a) Représenter graphiquement T, I_N, S_N pour $N=3$.

   (b) Montrer que $P(M\in I_N)\leq P(M\in T)\leq P(M\in S_N)$.

   (c) Expliquer pourquoi $P(M\in S_N)-P(M\in I_N)=P(M\in D_N)$.

   (d) Calculer $P(M\in I_N)$, $P(M\in S_N)$, $P(M\in D_N)$.

   (e) En passant à la limite quand N tends vers $+\infty$, montrer que $P(X\leq Y)=0,5$ puis conclure.

4. Soit $f:[0,1]\to[0,1]$, une fonction croissante, on va montrer que:

$$P(Y\leq f(X))=\int_0^1 f(x)dx. \tag{2}$$

   Pour cela, soit $N>0$, $h=\dfrac{1}{N}$, $x_k=kh$, $y_k=f(x_k)$, on pose:
   $r_k:=[x_{k-1},x_k]\times[0,y_{k-1}]$, $R_k:=[x_{k-1},x_k]\times[0,y_k]$, $d_k:=[x_{k-1},x_k]\times[y_{k-1},y_k]$,
   $I_N:=r_1\cup r_2\cup\cdots\cup r_N$, $S_N:=R_1\cup R_2\cup\cdots\cup R_N$, $D_N:=d_1\cup d_2\cup\cdots\cup d_N$.

   (a) Représenter graphiquement le graphe de f,I_N,S_N pour $N=3$.

   (b) Montrer que $P(M\in I_N)\leq P(Y\leq f(X))\leq P(M\in S_N)$.

   (c) En utilisant la méthode des rectangles, montrer que:
   $\lim_{N\to+\infty} P(M\in S_N)=\lim_{N\to+\infty} P(M\in I_N)=\int_0^1 f(x)dx$. En déduire (2).

5. A l'aide de la touche "nombre aléatoire de $]0,1[$" de votre calculatrice, simulez n fois le vecteur M et vérifiez expérimentalement le résultat de la question 1.

   Pour cela on calculera la fréquence de l'événement. On prendra $n=100$ et l'on comparera les fréquences obtenues aux probabilités théoriques obtenues dans la question 1.

6. Application à un calcul approché de π:

   (a) Pour $x \in [0,1]$ on pose $f(x) := \sqrt{1-x^2}$. On admet que (2) est vraie pour les fonctions décroissantes. Montrez que:

   $$\pi = 4 \times P(Y < f(X)) = 4 \times P(X^2 + Y^2 < 1).$$

   (b) Exécutez plusieurs simulations de M pour obtenir une valeur approchée de π.

7. Etude de la précision:

   En statistiques, on utilise les fourchettes suivantes :

   - si un événement (E) à une probabilité p de survenir au cours d'une expérience aléaltoire (A),
   - si l'on exécute n fois l'expérience (A) de manières indépendantes, et que l'on note f_n la fréquence d'apparition de l'événement (E) au bout de ces n simulations de (A),
   - et si $n \geq 30$, $np \geq 10$ et $n(1-p) \geq 10$,

   alors, dans 95% des cas:

   $$|f_n - p| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

   Utilisez cette fourchette, et, à l'aide de la calculatrice, donner un encadrement de π d'amplitude 10^{-1}, puis 10^{-2}.

2 Travail demandé au candidat

Pendant sa préparation le candidat réfléchira aux questions suivantes:

1. Indiquer l'objectif de l'exercice, la nature de la méthode et les différents outils utilisés ainsi que le (ou les) niveaux au(x)quel(s) s'adresse cet énoncé et les difficultés qu'il peut présenter pour des élèves.
2. Donner les notions Mathématiques qui permettent de justifier rigoureusement l'assertion (1).
3. Que vaut $P(X = Y)$?
4. Faut-il faire d'autres hypothèses sur f dans la question 3.?
5. Calculer l'espérance et la matice de covariance de M. Interpréter le résultat obtenu.
6. Sur quoi repose les résultats de la question 7.?
7. Dans la question 6. ne faudrait-il pas d'abord faire minorer l'entier n à l'èlève?
8. Discuter l'optimalité de l'encadrement obtenu à la question 6.
9. Donner deux autres méthodes pour approcher π à l'aide du calcul intégral. Puis comparer, l'efficacité de ces méthodes par rapport à la méthode de Monte-Carlo.

Le candidat rédigera sur ses fiches les réponses aux questions suivantes:

- La question 6.
- La question 9.

source: Dossier remanié de la préparation de Nice 2005.