# Calcul approché de $\pi$

## 1 Enoncé

Soit $C$ un cercle de rayon 1. On construit, pour $n \geq 1$ deux polygones réguliers $P_n$ et $Q_n$ de $3 \times 2^n$ côtés, $P_n$ étant inscrit dans $C$ et $Q_n$ circonscrit à $C$.

On admettra que le périmètre du cercle (égal à $2\pi$) est encadré par ceux des polygones.

Dans la suite, on note $p_n$ et $q_n$ les demi-périmètres respectifs de $P_n$ et $Q_n$.

1. Montrer qu'on a $p_1 = 3$ et $q_1 = 2\sqrt{3}$.
2. (a) Evaluer, en fonction de $n$, l'angle au centre qui intercepte l'un des côtés de $P_n$ ou de $Q_n$.
   (b) En déduire les relations:
$$p_n = 3 \times 2^n \sin\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right), \text{ et } q_n = 3 \times 2^n \tan\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right).$$
3. On pose $\alpha := \dfrac{\pi}{3 \times 2^{n+1}}$.

   Exprimer $p_n$ et $q_n$ en fonction de $n$ et $\alpha$.

   Montrer qu'on a, pour $n \geq 1$:
$$\frac{1}{q_{n+1}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p_n} + \frac{1}{q_n}\right), \text{ et } p_{n+1} = \sqrt{p_n q_{n+1}}.$$
4. (a) Soient $a$ et $b$ deux réels vérifiant $0 < a < b$. Montrer qu'on a:
$$a < \sqrt{ab} < b \text{ et } a < \frac{2ab}{a+b} < \frac{a+b}{2} < b.$$
   (b) Montrer par récurrence qu'on a $p_n < q_n$.
   (c) En déduire que la suite $(p_n)$ (respectivement $(q_n)$) est croissante (respectivement décroissante).
   (d) Montrer qu'on a, pour tout $n \geq 1$,
$$q_{n+1} - p_{n+1} \leq \frac{1}{2}(q_n - p_n).$$
   Conclure sur les limites de $(p_n)$ et $(q_n)$.
5. A l'aide de la calculatrice, donner un encadrement de $\pi$ d'amplitude $10^{-10}$.

## 2 Travail demandé au candidat

1. Indiquer l'objectif de l'exercice, la nature de la méthode et les différents outils utilisés ainsi que le (ou les) niveaux au(x)quel(s) s'adresse cet énoncé et les difficultés qu'il peut présenter pour des élèves.
2. Expliquer comment les polygones $P_n$ et $Q_n$ sont obtenus.

   Présenter la figure sur la calculatrice, au moins dans le cas $n = 1$, à l'aide d'un logiciel de géométrie.

   Justifier l'encadrement $p_n < \pi < q_n$.
3. Discuter l'optimalité de l'encadrement obtenu à la question $4.(d)$.
4. Proposer un autre exercice permettant de calculer une valeur approchée du nombre $\pi$, par une méthode géométrique ou analytique.

source: Dossier de D. Perrin, Orsay, 2004