Calcul approché de logarithmes

1 Enoncé

1. (a) Montrer l'inégalité, pour tout $t \geq 0$: $t - \frac{t^2}{2} \leq \ln(1+t) \leq t$.

   (b) Calculer la valeur approchée à 10^{-8} près de $\ln(1.000132)$.

2. Soit a un réel > 1. On considère la suite (u_n) définie par récurrence par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$.

   (a) Montrer que la suite (u_n) tend vers 1 (on pourra considérer la suite $(\ln u_n)$).

   (b) On pose $v_n := u_n - 1$. Montrer que $v_{n+1} \leq \frac{1}{2} v_n$.

   En déduire l'inégalité: $v_n = u_n - 1 \leq \frac{1}{2^n}(a-1)$.

   (c) Montrer que $2^n v_n$ est une valeur approchée par excés de $\ln a$ et que l'erreur est $\leq \frac{1}{2^{n+1}}(a-1)^2$.

   (d) On dispose d'une calculatrice qui comporte exclusivement les quatres opérations arithmétiques usuelles et la touche racine carrée.

   On prend $a = 29$. Vérifier que l'on a $v_{16} < 10^{-4}$.

   Calculer $\ln a$ à 5×10^{-4} près.

   (e) Calculer $\ln 2$ et $\ln(0.37)$ à 10^{-4} près par une méthode analogue.

2 Travail demandé au candidat

1. Indiquer l'objectif de l'exercice, la nature de la méthode et les différents outils utilisés ainsi que le (ou les) niveaux au(x)quel(s) s'adresse cet énoncé et les difficultés qu'il peut présenter pour des élèves.

2. Indiquer pour quels réels x la méthode de la question 1. permet de calculer les valeurs du logarithme de x.

   Comment peut-on améliorer la précision obtenue?

   Comment pourrait-on rédiger un texte pour des élèves de lycée permettant de calculer $\ln(1.013)$ à 10^{-6} près?

3. Préciser comment un élève de lycée peut résoudre la question $2.(a)$ s'il n'a pas l'indication d'utliser $\ln u_n$.

4. Proposer un autre exercice utilisant une autre méthode pour calculer une valeur approchée de $\ln 2$.

source: Dossier de D. Perrin, Orsay, 2004