Exemples de calculs de limites en un point

1 Enoncé

Le but de cet exercice est de montrer à l'aide de calcul d'aires le résultat fondamental suivant

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin(\theta)}{\theta}=1.$$

On travaillera dans le plan euclidien muni d'un repère orthonormé. Dans cet exercice on aura toujours : $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$. O désignera l'origine du repère, H le point de coordonnées $(1,0)$, S le point de coordonnées $(\cos(\theta),\sin(\theta))$, T le point de coordonnées $(1,\tan(\theta))$.

1. Tracer le cercle de rayon 1 centré en O, les points H, S, T.
2. À l'aide d'inégalités d'aires, montrez que: $\dfrac{\sin(2\theta)}{4}<\dfrac{\theta}{2}<\dfrac{\tan(\theta)}{2}$.
3. En déduire que pour tout $\theta\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, $0<\sin(\theta)<\theta<\tan(\theta)$, puis que $\lim\limits_{\theta\to 0}\sin(\theta)=0$.
4. Expliquer pourquoi $\cos(\theta)>0$ et $0H^2+HM^2=1$. En déduire que $\lim\limits_{\theta\to 0}\cos(\theta)=1$.
5. Conclure pour obtenir le résultat demandé.

2 Travail demandé au candidat

Pendant sa préparation le candidat réfléchira aux questions suivantes.

1. À quel(s) niveau(x) peut-on traiter l'exercice?
2. L'énoncé est-il utilisable pour $\theta<0$? $\theta>\pi/2$?
3. De l'exercice, peut-on déduire la $\lim\limits_{\theta\to\eta}\sin(\theta)$? $\lim\limits_{\theta\to\eta}\cos(\theta)$? $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{1-\cos(\theta)}{\theta^2}$?
   Puis en déduire que la fonction sin est dérivable sur $]0,\pi/2[$.
4. Comment trouverez vous au lycée $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^n-a^n}{x-a}$ pour $n\in\mathbb{N}$?

Le candidat rédigera sur sa fiche le travail suivant.

1. Répondre à la question *1*.
2. Proposer des exercices simples de calculs de limites.