Exemples de calculs de limites en un point

1 Enoncé I

Le but de cet exercice est de montrer simplement le résultat fondamental suivant

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1.$$

On travaillera dans le plan euclidien muni d'un repère orthonormé.

1. Tracez le cercle unité et rappelez l'interprétation géométrique de $\sin(x),\cos(x),x$ en termes de longueurs.
2. Expliquez géométriquement, à l'aide du cercle unité, pourquoi la fonction sin est impaire, la fonction cos est paire, $\lim_{x\to 0}\sin(x)=0,\ \lim_{x\to 0}\cos(x)=1$.
3. Si f est une fonction dérivable sur l'intervalle $[a,b]$,
   $M[x]$ désigne le point du plan de coordonnées $(x,f(x))$,
   $Cor(x)$ désigne la longueur de la corde $[M[a],M[x]]$,
   $Arc(x)$ désigne la longueur de la courbe représentative de f entre les deux points $M[a]$ et $M[x]$ (longueur d'arc),
   alors expliquez pourquoi $\lim_{x\to a}\frac{Arc(x)}{Cor(x)}=1$.
4. Soit $x\in]0;\pi/2[$, A le point de coordonnées $(1,0)$, B le point de coordonnées $(\cos(x),\sin(x))$, C le point de coordonnées $(1,\sin(x))$. Appliquez le théorème de Pythagore dans le triangle ABC.
5. En déduire que $\lim_{x\to 0}\frac{2(1-\cos(x))}{x^2}=1$.
6. En déduire la limite en 0 de $\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2$.
7. Conclure.

2 Travail demandé au candidat

1. Vous pourrez modifier l'énoncé pour le rendre plus accessible à des élèves de TS.
2. Donnez la liste des arguments géométriques nécessaires au traitement de l'exercice.
3. Le jury pourra demander au candidat de justifier ces arguments au niveau du programme de l'écrit du concours.
4. Pourquoi dans la question 3. f doit être de classe C^1?
5. Proposez un légère modification de l'exercice pour obtenir le résultat demandé à l'aide du calcul classique de la longueur d'une corde avec l'angle moitié.
6. En quoi la limite trouvée est-elle fondamentale pour la théorie des fonctions trigonométriques?

3 Enoncé II

Le but de cet exercice est de montrer simplement le résultat fondamental suivant pour n un entier plus grand que 1:

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=na^{n-1}.$$

1. Montrez pour $n\in\{1,2,3\}$ que $\lim_{x\to a}x^n=a^n$.
2. Montrez pour tout $n\in N$ que $\lim_{x\to a}x^n=a^n$.
3. Calculez explicitement $(x-a)(x^{n-1}+x^{n-2}a+\cdots+xa^{n-2}+a^{n-1})$.
4. En déduire la limite demandée.

4 Travail demandé au candidat

1. Pourquoi la question 1. et 2. ne sont pas réunies sous la forme d'une seule et même question? Attend-t-on de la part des élèves un raisonement par récurrence? l'utilisation de la fonction exponentielle?
2. Vous pourrez modifier l'énoncé pour le rendre plus accessible à des élèves de TS.
3. On demandera au candidat de bien faire la différence entre un traitement de cet exercice au niveau TS et au niveau du programme de l'écrit du concours.
4. En quoi la limite trouvée est-elle fondamentale pour la théorie des fonctions polynômes?
5. Vous pourrez compléter ce dossier par un ou deux exercices simples, bien choisis, issus des manuels scolaires.