Exemples de calculs approchés d'une intégrale

1 Enoncé

Le but de cet exercice est de comparer diverses méthodes pour donner des valeurs approchées de

$$I := \int_0^1 \frac{4dx}{1+x^2}. \tag{1}$$

Pour toute la suite on désignera par N un entier positif, $h := \frac{1}{N}$, $x_k := kh$, $f(x) := \frac{4}{1+x^2}$.

1. Présentez géométriquement la méthode des rectangles à gauche et à droite:

$$\mathcal{RG}_N := \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f(x_k), \qquad \mathcal{RD}_N := \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(x_k)$$

2. Grâce à la monotonie de f, montrez que

$$\mathcal{RD}_N \leq I \leq \mathcal{RG}_N, \quad \max\left(|\mathcal{RD}_N - I|, |\mathcal{RG}_N - I|\right) \leq h \times |f(1)-f(0)|, \quad \left|\frac{\mathcal{RD}_N + \mathcal{RG}_N}{2} - I\right| \leq \frac{h}{2} \times |f(1)-f(0)|.$$

3. En déduire une approximation de I à 10^{-3} près.

4. Appliquez la méthode des trapèzes au même exemple:

$$\mathcal{T}_N := \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2}.$$

5. Appliquez la méthode de Simpson au même exemple pour N pair: $N = 2M$

$$\mathcal{S}_N := 2h\sum_{k=0}^{M-1} \frac{f(x_{2k}) + 4f(x_{2k+1}) + f(x_{2k+2})}{6}$$

6. Comparez les résulats numériques et classez ces méthodes suivant leur précision.

2 Travail demandé au candidat

1. A la place des questions 1. et 2., on pourra proposer un exercices qui présente clairement l'encadrement d'une intégrale d'une fonction monotone par les méthodes des rectangles.

2. On pourra aussi proposer un exercice plus complet sur la méthode des trapèzes.

3. Complétez et modifiez l'énoncé proposé pour qu'il soit adapté à des élèves de terminale S. Cet énoncé devra inciter les élèves à utiliser la calculatrice.

4. *Question subsidiaire:* Le jury pourra demander aux candidats si le classement , obtenu précédement, des méthodes par le degré d'efficacité pour approcher la valeur exacte d'un intégrale reste valable pour les deux exemples suivant:

$$\int_0^1 4\sqrt{1-x^2}dx, \tag{2}$$

$$\int_0^1 \exp(\sin(2\pi x))dx \tag{3}$$