Fluctuations d'échantillonnage

1 Enoncé

Le but de cet exercice est d'introduire la notion de fluctuation d'échantillonnage à l'aide de simulation d'une loi binômiale.

On lance n fois une pièce de monnaie parfaitement équilibrée.

On note X_n la variable aléatoire qui représente le nombre de fois que l'on a obtenu le côté pile au bout de n lancers.

Pour les applications numériques on pourra prendre $n = 10, 30$ ou 100.

1. Donnez tous les arguments qui permettent de considérer que X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, 0.5)$.
2. Exécutez de **nombreuses** simulations numériques, puis comparer les résultats obtenus à la valeur espérée. Visualiser les résultats obtenus avec une boite à moustache.
3. Expliquez pourquoi l'on espère en moyenne obtenir $n/2$ comme valeur de X_n.
4. On admet que $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n\sqrt{2\pi n}}{e^n n!} = 1$. Montrez que $\lim_{n\to+\infty} P(X_n = n/2) = 0$. (le cas n impair est évident).
5. Les deux résultats précédents sont-ils contradictoires?

   (On pourra étudier ce qu'il advient pour une suite variables aléatoires qui ne prennent que les valeurs ± 1 avec la même probabilité).
6. Expliquez pourquoi les résultats de la question 3. et de la question 4. signifient d'une certaine manière que la fluctuation est inévitable.

2 Travail demandé au candidat

1. Expliquer ce que signifie les termes: population, échantillon, fluctuation d'échantillonnage en statistiques.
2. Donnez des exemples très concrets de fluctuations d'échantillonnage.
3. Dans le modèle probabiliste proposé, explicitez ce qui est censé représenter la population, l'échantillon, la fluctuation d'échantillonnage
4. Donnez un résultat utilisé en classe au lycée qui permet de contrôler la fluctuation d'échantillonnage.
5. Quel théorème du programme du concours permet de mieux comprendre le phénomène de fluctuation d'échantillonnage en statistiques?
6. Quel est le résultat clef qui permet d'affirmer dans certains cas que la fluctuation d'échantillonage devient négligeable quand la taille de l'échantillon est grande.

   Ce résultat s'applique t'il au nombre de côtés piles obtenus?
7. Proposez des modifications de l'énoncé intéressantes pour des élèves de Lycée.
8. Savez vous quel est le lien entre la fluctuation d'échantillonage et la température?