Coût de fabrication

1 Enoncé

Une entreprise qui fabrique des objets estime que le coût total, en milliers d'euros, de production de x tonnes d'objets s'exprime en fonction de x par $C_T(x) = x^3 - 12x^2 + 60x$.

1. Etudier les variations de la fonction C_T sur $[0, +\infty[$ et tracer sa représentation graphique (F) (1 cm pour une tonne, 1 cm pour 20 000 euros).

2. Le coût moyen de fabrication d'un objet est donné par $C_M(x) := \dfrac{C_T(x)}{x}$.

   (a) Soit O l'origine du repère et A le point de (F) d'abscisse x.
   Expliquer pourquoi $C_M(x)$ est égal au coefficient directeur de la droite (OA).

   (b) Exprimer $C_M(x)$ en fonction de x, étudier ses variations et tracer sa représentation graphique (G). (1 cm pour une tonne, 1 cm pour 10 000 euros).

3. On appelle coût marginal de x le coût de fabrication de la $x+1$-ème tonne. On le note $C_m(x)$.
   On admet que $C_m(x) = C_T'(x)$.

   (a) Etudier les variations de la fonction C_m sur $[0, +\infty[$ et tracer sa représentation graphique (H) dans le même repère que (G).

   (b) Déterminer l'abscisse α du point d'intersection des courbes (G) et (H).
   Que peut-on dire de $C_m(\alpha)$?

4. L'entreprise vend sa production 60 000 euros la tonne. On note $B(x)$ le bénéfice réalisé pour la vente de x tonnes.

   (a) Calculer $B(x)$ et étudier les variations de cette fonction.

   (b) Pour quelle valeur de x le bénéfice est-il maximum?
   Vérifier que, pour cette valeur, le coût marginal est égal au prix de vente unitaire.

2 Travail demandé au candidat

1. Indiquer l'objectif de l'exercice, la nature de la méthode et les différents outils utilisés ainsi que le (ou les) niveaux au(x)quel(s) s'adresse cet énoncé et les difficultés qu'il peut présenter pour des élèves.

2. Discuter le modèle proposé dans l'exercice, en particulier le comportement des diverses fonctions envisagées lorsque x devient grand.

3. Discuter la formulation de la question 3.: "On admet que $C_m(x) = C_T'(x)$", et en proposer éventuellement une autre.

4. Le résultat de la question $4.(b)$ est-il normal? exceptionel? ou général?

5. Proposer un autre exemple de situation décrite au moyen de fonctions (issue de la géométrie ou des sciences physiques ou biologiques, ou de la vie économique et sociale).

source: Dossier de D. Perrin, Orsay, 2004