Approximation de e

1 Enoncé

On se propose d'étudier la suite $(u_n)_{n>0}$ définie par

$$u_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

1. Montrer, pour $x \geq 0$, les inégalités:
$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x.$$
2. On pose $w_n = \ln u_n$.
Montrer qu'on a
$$1 - \frac{1}{2n} \leq w_n \leq 1.$$
En déduire la limite de la suite (w_n) puis celle de (u_n).
3. (a) Montrer, pour $x \geq 0$, les inégalités:
$$1 - x \leq \exp(-x) \leq 1.$$
(b) En déduire un encadrement de $e - u_n$.

2 Travail demandé au candidat

Après avoir résolu l'exercice:

1. Indiquer l'objectif de l'exercice, la nature de la méthode et les différents outils utilisés ainsi que le (ou les) niveaux au(x)quel(s) s'adresse cet énoncé et les difficultés qu'il peut présenter pour des élèves.
2. Indiquer comment peut on montrer directement la limite de la suite avec des outils du niveau DEUG.
Comment adapter cette méthode au niveau terminale?
Quel est l'intérêt de la voie choisie ici?
3. La convergence de la suite (u_n) est assez lente.
Comment peut-on accélérer la convergence de (u_n)?
4. Proposer une autre méthode pour encadrer la suite (w_n) en utilsant la formule
$$\ln(n+1) - \ln n = \int_n^{n+1} \frac{dx}{x}.$$
Comparer les deux méthodes.
5. Proposer un autre exercice utilsant une autre méthode pour calculer une valeur approchée de e.

source: sujet issu de la préparation au CAPES d'Orsay 2004.